Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

131-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que quel que soit la disposition des quinze billes de billard américain dans le triangle ci-contre, il y a toujours deux billes portant un numéro pair qui sont en contact.

131-2 *proposé par Daniel Perrin (Orsay)* :

La maîtresse et les fractions

Madame Hortense Aignante, maîtresse du cours moyen de l'école des Aiguilles à Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne) a donné un exercice sur les fractions à ses élèves. Le pourcentage de réussite a été de 47,82% (valeur arrondie par défaut). Sachant que les classes de Saint-Tricotin ne sont pas surchargées (et qu'elles ont en tous cas moins de 30 élèves), dire combien la classe comporte d'élèves et combien ont réussi l'exercice.

131-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Si des points du plan, en quantité infinie, sont tous situés à des distances mutuelles mesurées par des nombres entiers alors ils sont nécessairement tous alignés.

131-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Soit ABC un triangle équilatéral et G son centre de gravité. D est un point du côté [AB] tel que AD = AG. La droite (DG) coupe le côté [AC] en E et la droite (BC) en F. Montrer que E est le milieu du segment [DF].

Des solutions

127-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Montrer que la série suivante converge vers une limite à déterminer :

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{2+3}+\frac{3}{4+5+6}+\frac{4}{7+8+9+10}+\cdots$$

Solution de Walter Mesnier

Je trouve que la série converge, puisque le terme général s'écrit après quelques efforts $2/(n^2+1)$. Pour la limite, il faut passer au niveau supérieur ; Fourier et Dirichlet nous donnent $\pi/\tanh(\pi) - 1 \approx 2{,}1533$.

N.d.l.r : L'expression du terme général de la série donnée par Walter est juste. Quant à son expression de la limite de la série, elle est exacte et la méthode pour y parvenir tout autant. Mais il manque cependant quelques détails de calculs pour convaincre le lecteur. La solution de Jacques Chayé complète la première partie.

Solution de Jacques Chayé

Désignons par u_n le dénominateur du $n^{\text{ième}}$ terme de la série. Pour tout entier n > 1, u_n est la somme de n entiers naturels consécutifs, le $n^{\text{ième}}$ étant le $(1 + 2 + \ldots + n)^{\text{ième}}$ entier naturel non nul. Ce $n^{\text{ième}}$ terme de u_n est donc égal à : $n(n+1)/2$. De même, le dernier terme de u_{n-1}, c'est-à-dire le $(n-1)^{\text{ième}}$, est égal à : $(n-1)n/2$. Par conséquent on a :

$$u_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)}{2} - \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2}$$

Soit après simplifications, $u_n = n(n^2+1)/2$. Notons que ce résultat est encore valable pour $n = 1$. Le terme général de la série est donc égal à $n/u_n = 2/(n^2+1)$. La série à termes positifs est majorée par $\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+1}dx$. Or, cette intégrale convergente est égale π. La série est donc convergente.

Solution de Louis Rivoallan

N.d.l.r : Louis Rivoallan parvient comme Jacques Chayé à l'expression du terme général de la série, à savoir $2/(n^2+1)$. Je ne retranscris pas cette partie de son courrier pour éviter les redites. En revanche il conclue à la convergence de la série en majorant le terme général par $2/n^2$ et rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Voici maintenant sa conclusion.

$$\frac{2}{n^2+1}=\frac{2}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{2}{n^2}(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\ldots)$$ et donc $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+1}=2(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2})-2(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4})+2(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6})\ldots$$

Or $(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{B_{2n}2^{n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}$ où B_{2n} sont les nombres de Bernoulli. Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_{2n}2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}$$

Solution de l'auteur

Je complète la seconde partie des résultats avancés par Walter Mesnier.

Théorème de Dirichlet

Si f est une fonction C_1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, alors pour tout x_0 réel :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f(x_0)) = \frac{\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)}{2}$$

Avec $S_N(f(x_0)) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

On considère maintenant la fonction C_1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par : $f(x) = e^{x-2k\pi}$ si $x \in]-\pi+2k\pi\ ;\ \pi+2k\pi], k \in \text{¢}$.

On a donc : $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt)dt$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt)dt$.

On calcule a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}([e^t \frac{\sin(nt)}{n}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^t \frac{\sin(nt)}{n}dt) = 0 - \frac{1}{\pi}([-e^t \frac{\cos(nt)}{n^2}]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^t \frac{\cos(nt)}{n^2}dt)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left((-1)^n \frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{n^2} + \frac{\pi a_n}{n^2}\right) = (-1)^n \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi n^2} - \frac{a_n}{n^2} = (-1)^n \frac{2\sinh(\pi)}{\pi n^2} - \frac{a_n}{n^2}.$$

Donc $a_n = (-1)^n \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(n^2+1)}$ et par ailleurs, pour tout entier n on a $b_n \sin(n\pi) = 0$.

On calcule alors $S_N(f(\pi))$:

$$S_N(f(\pi)) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(n^2+1)}(-1)^n = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n^2+1}\right)$$

On applique alors le théorème de Dirichlet :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f(\pi)) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+1}\right) = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \cosh(\pi).$$

On tire finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+1} = \frac{\pi}{\tanh(\pi)} - 1$$

129-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Pour quels nombres entiers positifs a, b, c et d a-t-on à la fois :

ab + cd = 2719

ac + bd = 2726

ad + bc = 7066

Solution de l'auteur

On va utiliser trois égalités :

(a + c)(b + d) = 2719 + 7066 = 9785 = 5x19x103 (1)

(a + d)(b + c) = 2719 + 2726 = 5445 = $5\text{x}3^2\text{x}11^2$ (2)

(b – c)(d – a) = 2726 – 2719 = 7 (3)

Avec (3)

Soit b – c = 7 et d – a = 1, alors (b + d) – (a + c) = 8 et en utilisant (1) on a :
b + d = 103 et a + c = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).

Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 82, b = 20, c = 13, d = 83.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 16, b = 86, c = 79, d = 17.

Soit b – c = 1 et d – a = 7, alors (b + d) – (a + c) = 8 et en utilisant (1) on a : b + d = 103 et a + c = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).
Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 79, b = 17, c = 16, d = 86.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 13, b = 83, c = 82, d = 20.

Soit c – b = 1 et a – d = 7, alors (a + c) – (b + d) = 8 et en utilisant (1) on a : a + c = 103 et b + d = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).
Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 86, b = 16, c = 17, d = 79.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 20, b = 82, c = 83, d = 13.

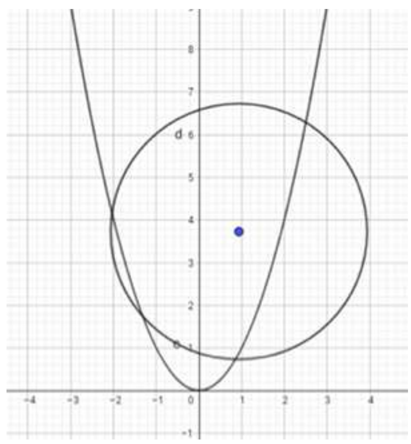
Soit c – b = 7 et a – d = 1, alors (a + c) – (b + d) = 8 et en utilisant (1) on a : a + c = 103 et b + d = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).
Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 83, b = 13, c = 20, d = 82.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 17, b = 79, c = 86, d = 16.

Il y a donc 8 quadruplets qui sont solutions et qui sont présentés dans le tableau ci-dessous. On remarquera la présence de quatre quadruplets bien connus.

a	b	c	d
16	86	79	17
86	16	17	79
79	17	16	86
17	79	86	16
82	20	13	83
20	82	83	13
13	83	82	20
83	13	20	82

130-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Si trois points distincts A, B et C, d'abscisses entières appartiennent à la parabole d'équation $y = x^2$, montrer qu'alors le cercle circonscrit au triangle ABC rencontre la parabole en un quatrième point d'abscisse entière.



Solution de Walter Mesnier

Un extrait de son courrier :

« *Je pensais avoir trouvé une solution rapide, mais je me demande si j'ai bien compris le problème ou s'il est « maladroitement » posé, je veux dire qu'on pourrait croire que le quatrième point est distinct des trois autres or ce n'est clairement pas obligatoirement le cas...* »

Une partie de ma réponse :

« *L'illustration est correcte mais, tu as raison, ma formulation est maladroite. Il aurait fallu plutôt que j'écrive : « Un cercle coupe la parabole d'équation* $y = x^2$ *en quatre points distincts. Si trois d'entre eux ont une abscisse entière montrer qu'alors le quatrième point a aussi une abscisse entière."* »

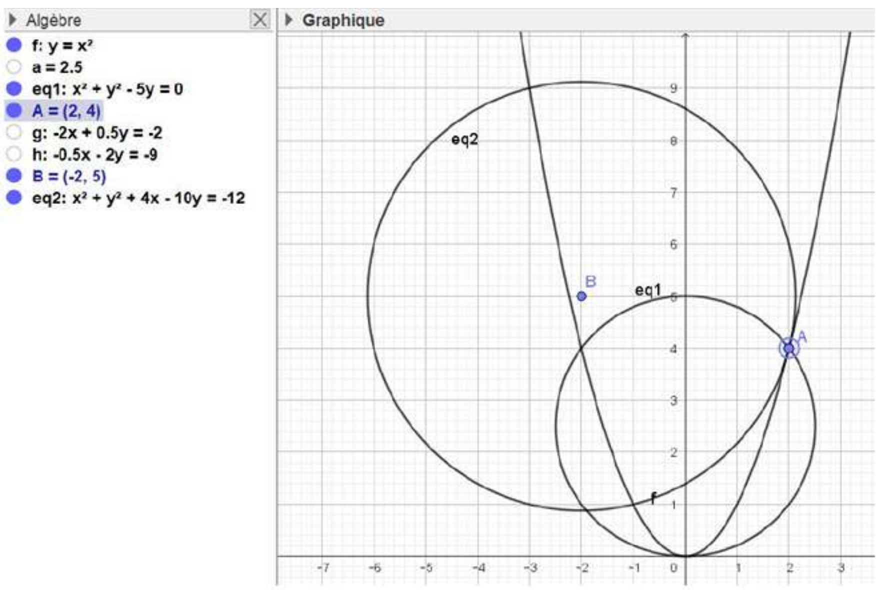
Et voici la jolie solution proposée par Walter Mesnier :

Dans ce problème de parabole, on suppose que le système admet trois solutions d'abscisses x entières et distinctes. Cela revient à dire que l'équation de degré 4 : $x^4 + (1 + b)x^2 + ax + c = 0$ a trois solutions distinctes et entières. Nommons-les n, p, q. Le théorème fondamental de l'algèbre nous permet de factoriser l'équation en :

$(x - n)(x - p)(x - q)(x - r) = 0$ avec r a priori complexe. Mais en fait le coefficient de x^3 est nul, la somme des racines est nulle, autrement dit $r = -(n + p + q)$. Ainsi r est nécessairement une somme d'entiers, donc r est entier.

Cela impliquerait que lorsque cette parabole rencontre un cercle en trois points d'abscisses entières et distinctes alors elle le rencontre en fait en quatre points d'abscisses entières. Notons toutefois que ce quatrième point pourrait très bien être confondu avec l'un des trois premiers points.

En effet il est tout à fait possible d'avoir trois points d'intersection et non quatre. Par exemple le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 5y = 0$ n'a que trois points d'intersection d'abscisses -2, 0 et 2 ou encore le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 12 = 0$ n'a que trois points d'intersection d'abscisses -2, -1 et 2.



Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9 Site :

http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. regapmep@apmep-poitoucharentes.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication F. de Ligt
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon
Siège social Voir adresse ci-dessus
Imprimerie IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)
Dépôt légal Janvier 2023