

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

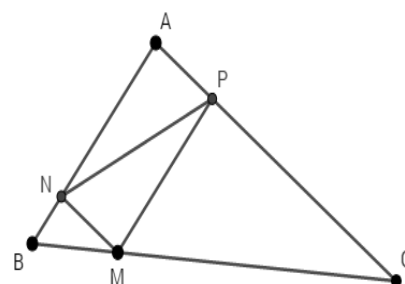
Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

129-1 proposé par Louis Rivoallan (Rochefort) :

Une variante plus simple de l'énoncé 125-2 proposé par Jean-Christophe Laugier qui a l'avantage de pouvoir être abordée par de nombreuses voies :

Soit un triangle ABC et M un point du côté [BC]. N et P sont les points des côtés [AB] et [AC] respectivement tels que MNAP soit un parallélogramme. Déterminer M afin que l'aire de MNAP soit maximale



129-2 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Pour quels nombres entiers positifs a, b, c et d a-t-on à la fois :

$$ab + cd = 2719$$

$$ac + bd = 2726$$

$$ad + bc = 7066$$

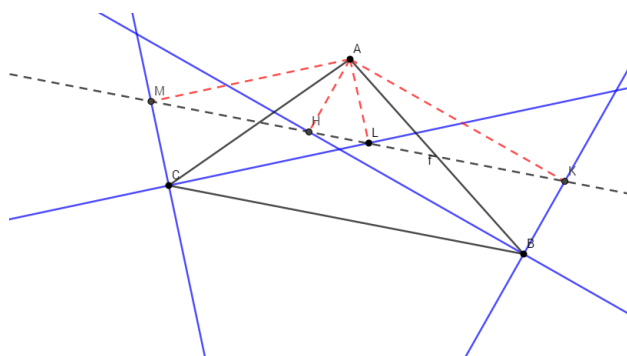
129-3 proposé par Louis Rivoallan (Rochefort) :

On donne quatre points A, B, C et D de l'espace non situés dans un même plan. À tout plan P de l'espace on associe les distances des points A, B, C et D à ce plan. Combien y a-t-il de plans P pour lesquels ces quatre nombres sont égaux ?

129-4 proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :

Exercice extrait de *Premiers éléments de géométrie* par Ch. Vacquant et A. Macé de Lépinay-Masson (1914).

Les pieds des perpendiculaires abaissées du sommet A d'un triangle ABC sur les quatre bissectrices des angles formés par la droite (BC) avec les droites (AB) et (AC) sont quatre points alignés.



126-3 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Quelle est la probabilité de voir apparaître deux numéros consécutifs lors d'un tirage de 5 numéros dans une grille de Loto comportant 49 numéros ?

Solution de l'auteur

On va plutôt évaluer la probabilité de l'évènement contraire, à savoir que les 5 numéros soient tous bien séparés entre eux par des numéros figurant parmi les 44 restants.

En balayant méthodiquement les différentes possibilités on arrive à l'expression de leur nombre :

$$\sum_{l=1}^{41} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j i$$

Maintenant on va utiliser une propriété des coefficients binômiaux :

$$\sum_{i=k}^N \binom{i}{k} = \binom{N+1}{k+1},$$

$$\sum_{l=1}^{41} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j i = \sum_{l=1}^{41} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^k \binom{j+1}{2} = \sum_{l=1}^{41} \sum_{k=1}^l \binom{k+2}{3} = \sum_{l=1}^{41} \binom{l+4}{4} = \binom{41+5}{5} = \binom{45}{5}.$$

La probabilité de cet évènement est $\binom{45}{5} / \binom{49}{5}$.

La probabilité demandée est donc $1 - \binom{45}{5} / \binom{49}{5} \approx 0,359$.

126-5 proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)

MNPQ est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R dont les diagonales [MP] et [NQ] sont orthogonales en un point A à l'intérieur du disque.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$$AM^2 + AN^2 + AP^2 + AQ^2 = 4R^2$$

Le milieu de [OA] est l'isobarycentre de {M, N, P, Q}.

Solution de Frédéric de Ligt

On place la figure dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de telle sorte que la corde [MP] soit parallèle à l'axe des x.

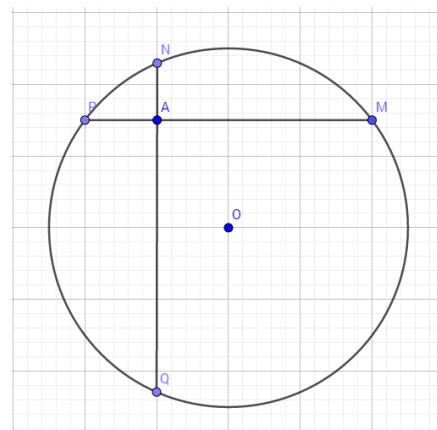
Soit $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$, $P(x_P, y_P)$ et $Q(x_Q, y_Q)$.

On a $y_M = y_P$, $x_N = x_Q$, $A(x_N, y_M)$, $x_P = -x_M$, $y_Q = -y_N$.

En conséquence :

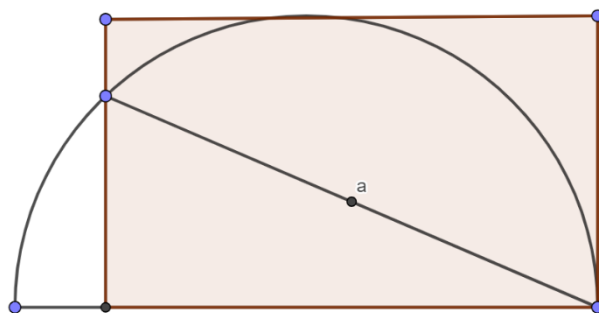
$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 + AP^2 + AQ^2 &= (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (x_N + x_M)^2 + (y_N + y_M)^2 \\ &= 2x_M^2 + 2y_M^2 + 2x_N^2 + 2y_N^2 = 2R^2 + 2R^2 \\ &= 4R^2. \end{aligned}$$

Soit I(0, y_M) le milieu de la corde [MP] et J(x_N , 0) le milieu de la corde [QN]. L'isobarycentre G de {M, N, P, Q} est le milieu du segment [IJ]. On a donc $G(x_N/2, y_M/2)$ qui se trouve alors être le milieu du segment [OA].



128-1 proposé par Louis Rivoallan :

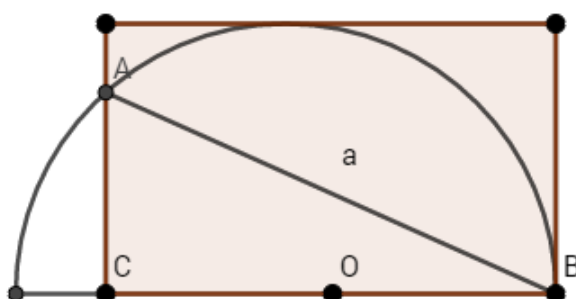
Trouver une relation entre a et l'aire du rectangle



Solution de l'auteur

Notons x la distance OC et y la distance AC .

$$a^2 = (x + R)^2 + y^2 = x^2 + 2xR + R^2 + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xR + R^2 = R^2 + 2xR + R^2 = 2R(R + x) = 2 \times \text{aire du rectangle}$$



Solution de Walter Mesnier

Pour le savoir, j'ai d'abord fait une figure sur GeoGebra qui m'a permis de deviner le résultat. Ensuite, place au calcul pour justifier ce résultat.

Soit R le rayon du cercle et O son centre.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a $B(R, 0)$, $D(R\cos(\alpha), R\sin(\alpha))$ et $H(R\cos(\alpha), 0)$, α étant la mesure de l'angle $(\vec{OB}, \vec{OD})$ et on pose $BD = a$.

Calculons l'aire du rectangle en fonction de a :

$$\text{Aire rectangle} = BH \times R = R^2(1 - \cos(\alpha)).$$

Or

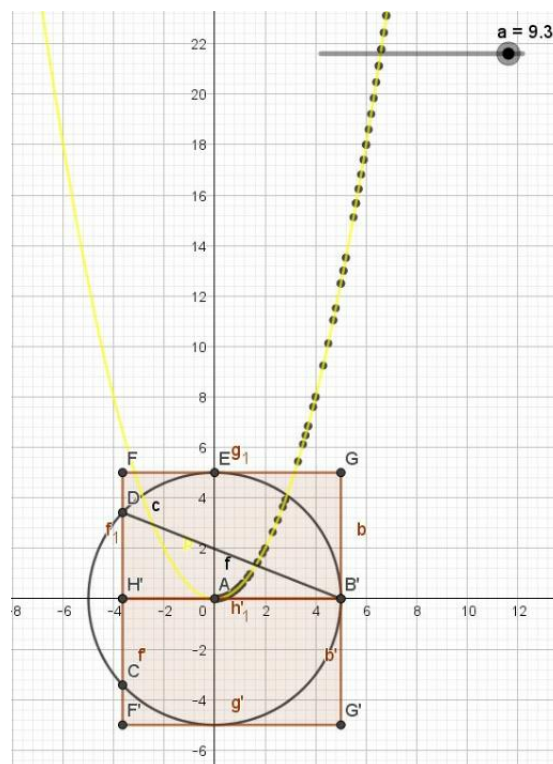
$$a^2 = BD^2 = R^2(\cos(\alpha) - 1)^2 + R^2\sin^2(\alpha).$$

D'où

$$a^2 = R^2 - 2R^2\cos(\alpha) + R^2 = 2R^2(1 - \cos(\alpha))$$

On retrouve le double de l'aire du rectangle. Donc l'aire du rectangle vaut $a^2/2$.

Remarque : On devrait donc pouvoir découper le double rectangle de la figure pour former un carré de côté a . Je n'ai pas trouvé comment.



128-2 proposé par Frédéric de Ligt :

Montrer que pour les réels positifs x , y et z on a toujours :

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{y+z} - \frac{y}{x+z} - \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Solution de l'auteur

Une malencontreuse coquille s'était glissée dans cet énoncé. Le symbole d'inégalité large ayant été disposé dans le mauvais sens. Toutes mes excuses pour cette étourderie. Partant maintenant d'un bon pied, on va utiliser deux inégalités bien utiles pour prouver celle-ci. Tout d'abord un cas particulier de l'inégalité de réordonnement :

Si a_1 , a_2 et a_3 sont trois nombres rangés dans l'ordre croissant, de même que les nombres b_1 , b_2 et b_3 et si σ désigne une permutation des indices 1,2 et 3 alors on a l'inégalité :

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + a_3 b_{\sigma(3)} \geq a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$

Puis l'inégalité de Nesbitt, qui en est une conséquence :

Pour trois nombres strictement positifs a , b et c donnés, on a toujours :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Soit donc trois nombres strictement positifs x , y et z . En réduisant au même dénominateur les fractions ayant même numérateur on modifie ainsi l'expression initiale :

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{y+z} - \frac{y}{x+z} - \frac{z}{x+y} = \frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(x+z)} + \frac{zx}{y(x+y)}$$

Sans perte de généralité on peut supposer que z , y et x sont rangés dans l'ordre croissant.

On a alors les inégalités suivantes :

$$\frac{yz}{x} \leq \frac{zx}{y} \leq \frac{xy}{z}$$

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{y+z}$$

D'après l'inégalité de réordonnement :

$$\frac{xy}{z} \times \frac{1}{y+z} + \frac{yz}{x} \times \frac{1}{x+z} + \frac{zx}{y} \times \frac{1}{x+y} \geq \frac{xy}{z} \times \frac{1}{x+y} + \frac{zx}{y} \times \frac{1}{x+z} + \frac{yz}{x} \times \frac{1}{y+z}.$$

Mais :

$$\frac{xy}{z} \times \frac{1}{x+y} + \frac{zx}{y} \times \frac{1}{x+z} + \frac{yz}{x} \times \frac{1}{y+z} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

En posant $a = 1/x$, $b = 1/y$ et $c = 1/z$ dans cette dernière expression on peut appliquer l'inégalité de Nesbitt et conclure.