

Maths et Images : réalité ou illusion ?

Joséphine Aubin, Dominique Gaud (IREM&S de Poitiers, Régionale de l'APMEP)

Une nouvelle exposition en préparation

Tel est le titre (peut-être provisoire) de la prochaine exposition sur laquelle travaille une douzaine de collègues.

Pourquoi et comment représenter un objet, une scène de la vie courante, un jardin etc... Nécessairement dans l'espace sur une surface plane ?

Cette exposition a pour objet de montrer que les modes de représentation ont varié selon les époques et les civilisations, suivant l'usage qu'il devait en être fait tout en mettant en avant le rôle joué par les mathématiques dans ces représentations.

Alors que les Égyptiens ne se préoccupaient pas de rendre la profondeur, préférant donner le maximum d'informations, les Grecs et les Romains avaient le souci de représenter des scènes plus conformes à la réalité et on peut déceler chez eux des représentations rappelant la perspective cavalière. Les Byzantins et, par leurs influences, les peintres jusqu'au Moyen-Âge en Occident renièrent ce principe de conformité à la réalité pour donner d'autres canons de représentation largement influencés par la volonté de faire comprendre les textes sacrés chrétiens au peuple qui en grande majorité était analphabète.



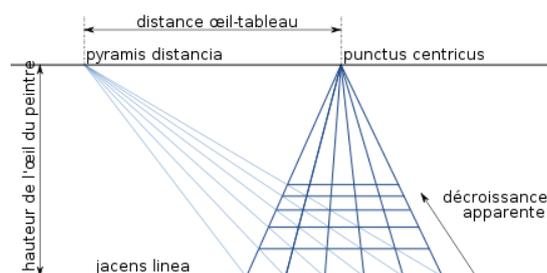
Tombe de Perséphone (350 av. J.-C.)



Fresque provenant de Nebamon, à Thèbes

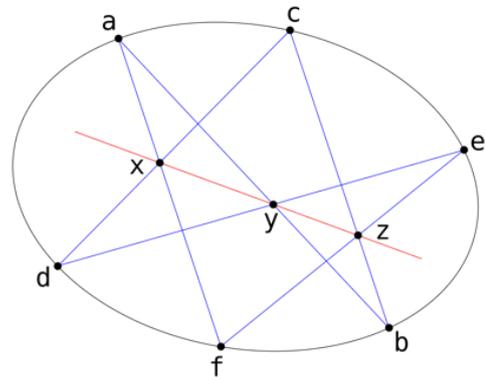
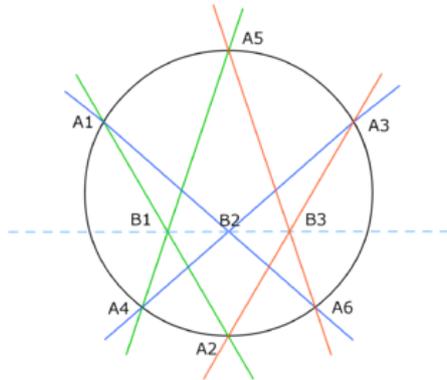
La Renaissance et l'humanisme vont révolutionner le mode représentation. Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca vont théoriser par les mathématiques les méthodes de représentation en inventant la perspective dite artistique. Ces peintres et architectes étaient aussi de brillants mathématiciens.

Mais quelles sont les règles mathématiques sur lesquelles s'appuie le dessin en perspective ? En quoi est-ce moins simple de dessiner en perspective artistique qu'en perspective cavalière ?



Perspective, méthode d'Alberti

On sait que, mathématiquement, la perspective est une projection centrale. Cette transformation sera étudiée en particulier par Desargues au XVII^e siècle. Ainsi, la première transformation étudiée en mathématiques est une transformation « déformante » non affine et qui permit à Desargues puis à Pascal de découvrir des résultats inconnus dans les coniques en « transportant » des propriétés connues dans le cercle à l'aide d'une projection centrale.



Le théorème de Pascal, démontrable avec la géométrie classique dans le cercle, devient évident dans toute conique par projection centrale

Ces travaux seront oubliés durant deux siècles car les savants de l'époque lui préféreront la géométrie des coordonnées inventée en particulier par Descartes et le calcul infinitésimal créé par Leibniz et Newton. Mais Poncelet ressuscitera les travaux de Desargues et la géométrie projective prendra sa place dans le programme d'Erlangen de Félix Klein.

Les artistes, toujours un peu mathématiciens, vont découvrir très tôt au XVI^e siècle, que si on regarde un objet de trop près, il semble déformé : ce sera la découverte des anamorphoses d'abord planes puis par cannelures ou par réflexions. Ces anamorphoses ont envahi notre quotidien : signalétique routière, publicité dans les stades, trompe l'œil etc. Comment fonctionnent-elles ? Et comment les construire ?



Passage piéton peint sur la route en Islande

Parallèlement, la représentation purement technique d'objets spatiaux se développe : on trouve des plans d'églises, de châteaux, de jardins très tôt dans l'histoire. Androuet du Cerceau, au XVI^e siècle, invente la perspective cavalière, certainement déjà perçue par les Grecs de l'Antiquité mais non formalisée par eux.

La projection cylindrique (projection sur un plan parallèlement à une droite) est la plus usuelle aux élèves et au commun des mortels. Mais pourquoi ?

La projection orthogonale est utilisée pour les vues (gauche, droite, dessus etc.) puis en géométrie descriptive. Pourquoi celle-ci est-elle indispensable en chaudronnerie et comment fonctionne-t-elle ? Voici ce qu'en dit Monge :

1. **L**A géométrie descriptive a deux objets : le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature, qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.

Le second objet est de donner la manière de reconnoître d'après une description exacte les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives.

Nous allons d'abord indiquer les procédés qu'une longue expérience a fait découvrir, pour remplir le premier de ces deux objets; nous donnerons ensuite la manière de remplir le second.

Comment reconnaître un objet à partir de sa représentation ou bien reconnaître un même objet vu sous des angles différents ? Comment passer de différentes vues à une perspective et vice versa. Toutes ces activités développent la vision dans l'espace des enfants... et des adultes.

Actuellement les ordinateurs sont massivement utilisés pour concevoir mécanismes, pièces diverses etc. Mais comment fonctionnent les logiciels de Dessin Assisté par Ordinateur ? En médecine, comment fonctionne l'IRM ?

Réalité ou illusion ? Les artistes se sont emparés aussi de la perspective pour s'en jouer. Le plus connu est Escher mais ce n'est pas le seul. Les objets représentés par ces artistes sont-ils aussi impossibles qu'ils le paraissent ?



L'usage des écrans nous a familiarisés avec les images pixelisées, autre façon de représenter l'espace. Les mosaïques byzantines et romaines étaient déjà une façon de pixeliser des images. La pixellisation a créé une nouvelle branche des mathématiques : la géométrie discrète. Qu'est-ce qu'une droite ? Deux droites sécantes dans la réalité ont-elles un pixel en commun sur notre écran ?

Et qu'en est-il des images dans les jeux vidéos ?

Cette exposition montrera, une nouvelle fois que les mathématiques se cachent partout. Elles sont liées aux arts, à l'architecture et trouvent des applications dans notre vie quotidienne. Issues souvent de préoccupations pratiques, ces applications ont permis la création de théories mathématiques qui elles aussi en retour enrichissent les techniques de représentation.

Cette exposition vise aussi à redonner du sens aux mathématiques enseignées et à montrer aux enseignants qu'une autre approche de l'enseignement des mathématiques est possible en classe.

Conformément à la philosophie de nos expositions, maquettes et manipulations permettront à la fois aux enfants dès la maternelle, aux collégiens, aux lycéens et au grand public de montrer les mathématiques sous un jour plus attrayant et, qui sait, feront naître des vocations pour un métier en manque de bras et de têtes.