Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

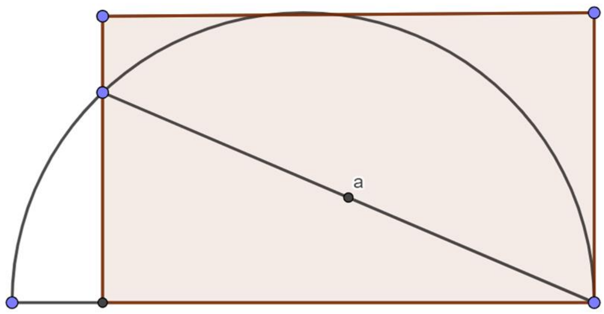
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

128-1 *proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Trouver une relation entre *a* et l'aire du rectangle



128-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que pour les réels positifs *x*, *y* et *z* on a toujours :

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{y+z}-\frac{y}{x+z}-\frac{z}{x+y}\leq\frac{3}{2}$$

128-3 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*

Pour réaliser un abat-jour, on dispose d'une structure métallique constituée de deux cercles de diamètres 15 cm et 18 cm, reliés par trois tiges rectilignes de 15 cm.

On désire habiller cette structure d'un tissu.

Quelle découpe doit-on prévoir ?

128-4 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :
Sur une poulie passe une corde à laquelle sont suspendus, d'un côté un poids, de l'autre un chat de même poids que le poids.
Le poids du chat plus le poids de la corde font une fois et demie le poids du poids.
Le poids du chat en livres anglaises est exprimé par le même nombre que l'âge de la mère du chat en années.
La mère du chat est deux fois plus âgée que ne l'était le chat quand sa mère avait la moitié de l'âge qu'il aura quand il aura trois fois l'âge qu'avait sa mère quand elle avait trois fois l'âge qu'il avait.
L'âge du chat et l'âge de la mère totalisent 8 ans. La livre anglaise vaut 16 onces. La corde pèse 4 onces par pied.
Quelle est, en pied, la longueur de la corde ?

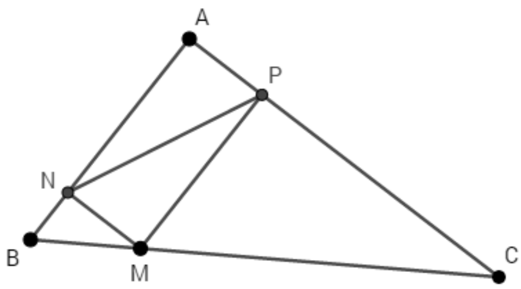
Les protagonistes :



Des solutions

125-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :

Soit un triangle ABC et M un point du côté [BC]. N et P sont les points des côtés [AB] et [AC] respectivement tels que MNAP soit un parallélogramme. Déterminer M afin que la longueur NP soit minimale.



Solution de Frédéric de Ligt
On note a = BC, b = AC, c = AB, a' = BM, AP = NM = b', BN = c', d = AM et e = NP.
On suppose que l'on cherche un point M sur le segment [BC].
Le théorème de Stewart :

$$a'b^2 + (a - a')c^2 = a\,(d^2 + a'(a - a')).$$

On en tire :

$$d^2 = (b^2 - c^2 - a^2)\,\frac{a'}{a} + c^2 + a'^2.$$

Une propriété du parallélogramme :

$$d^2 + e^2 = 2b'^2 + 2(c - c')^2.$$

La propriété de Thalès :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

À l'aide de ces trois égalités on parvient à exprimer NP^2 à l'aide des seules longueurs *a*, *b*, *c* et *a'* :

$$NP^2 = e^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 (2c^2 + 2b^2 - a^2) + \frac{a'}{a}(-3c^2 - b^2 + a^2) + c^2.$$

Si NP^2 est minimum, il en va de même pour NP.

Première observation :

$$0 < 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

En effet ABC est un triangle donc $a < b + c$ donc $a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$
donc $-2bc < b^2 + c^2 - a^2$ donc $b^2 + c^2 - 2bc < 2b^2 + 2c^2 - a^2$

donc $(b - c)^2 < 2b^2 + 2c^2 - a^2$ donc $0 < 2b^2 + 2c^2 - a^2$ car $(b - c)^2 \geq 0$.

Par conséquent il est légitime de dériver l'expression de NP^2 par rapport à a'/a pour obtenir la valeur minimale de NP^2 sous réserve que la dérivée s'annule sur l'intervalle [0 ; 1].

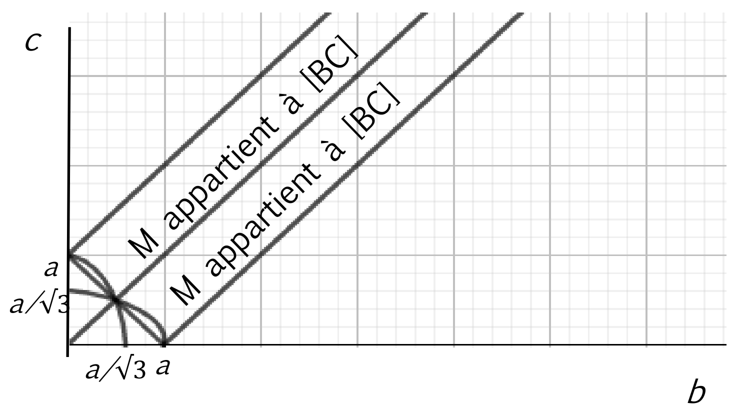
$$\frac{\mathrm{d}NP^2}{\mathrm{d}\left(\frac{a'}{a}\right)} = 2\,\frac{a'}{a}(2c^2 + 2b^2 - a^2) + (-3c^2 - b^2 + a^2) = 0$$

Et elle s'annule pour

$$\frac{a'}{a} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4c^2 + 4b^2 - 2a^2} = \frac{1}{2} + \frac{c^2 - b^2}{4c^2 + 4b^2 - 2a^2}.$$

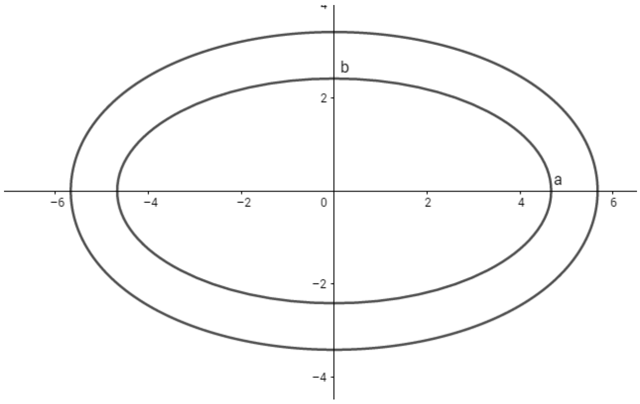
Seconde observation :
Quand $c = b$ alors $a'/a = 1/2$ et M est alors le milieu I de [BC].

Troisième observation :
Compte tenu du rôle des longueurs *b* et *c* dans l'expression de a'/a on ne va considérer que le cas où $c > b$. Le second cas s'en déduira facilement.
Dire que a'/a appartient à l'intervalle $]1/2 ; 1]$ revient à dire que $(c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2)$ appartient à l'intervalle]0 ; ½]. La première observation et le cas considéré amène à se restreindre à l'inégalité :
$(c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2) \leq 1/2$ ou encore à $3b^2 + c^2 - a^2 \geq 0$.
Avec cette condition, NP^2 est minimum pour $a'/a = 1/2 + (c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2)$. Le point M se situant dans l'intervalle]IC].
Si $3b^2 + c^2 - a^2 < 0$, alors $1/2 + (c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2) > 1$; NP^2 prend alors des valeurs décroissantes quand a'/a prend ses valeurs dans l'intervalle $]1/2 ; 1]$. Pour $a'/a = 1$, c'est-à-dire pour M placé en C, NP^2 aura une valeur minimum.



126-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Dans un repère orthonormé on considère une ellipse dont le grand axe est placé sur l'axe des abscisses et le petit axe sur celui des ordonnées. On désigne par a la longueur du demi-grand axe et par b celle du demi-petit axe. On porte sur chaque normale à l'ellipse et extérieurement à celle-ci une même longueur. Le lieu géométrique ainsi obtenu forme une courbe « parallèle » à l'ellipse. Si on note l la largeur de la bande qui ceinture maintenant cette ellipse, pouvez-vous donner une expression exacte ou à défaut approchée de l'aire de cette bande ?

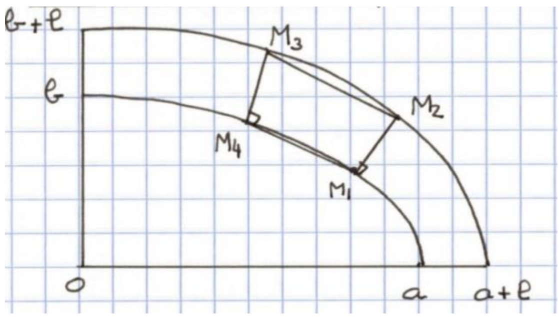


Solution de l'auteur

<u>Préparation :</u> Aire d'un quadrilatère convexe $M_1M_2M_3M_4$ en fonction des coordonnées de ses sommets. On note $(x_i;y_i)$ les coordonnées de M_i.

$$\mathcal{A}(M_1M_2M_4) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{M_1M_2};\overrightarrow{M_1M_4}\right)\right| = \frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_4-y_1)-(y_2-y_1)(x_4-x_1)|.$$
$$\mathcal{A}(M_3M_2M_4) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{M_3M_2};\overrightarrow{M_3M_4}\right)\right| = \frac{1}{2}|(x_2-x_3)(y_4-y_3)-(y_2-y_3)(x_4-x_3)|.$$
$$\mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4) = \mathcal{A}(M_1M_2M_4) + \mathcal{A}(M_2M_3M_4).$$

<u>Cas particulier d'un quadrilatère inscrit dans la bande du premier quadrant</u>

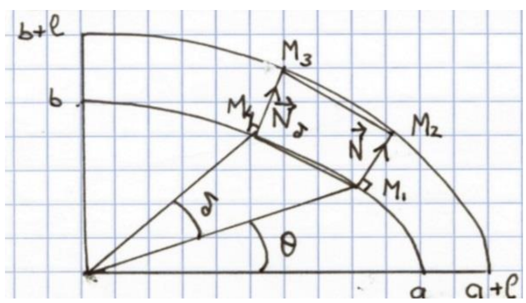


On se donne les inégalités :

$$\begin{array}{ll} x_2 \geq x_1 & y_2 \geq y_1 \\ x_3 \geq x_4 & y_3 \geq y_4 \\ x_2 \geq x_3 & y_3 \geq y_2 \\ x_1 \geq x_4 & y_4 \geq y_1 \\ x_2 \geq x_4 & y_3 \geq y_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4) &= \frac{1}{2}\big((x_2-x_1)(y_4-y_1)-(y_2-y_1)(x_4-x_1)\big) - \frac{1}{2}\big((x_2-x_3)(y_4-y_3)-(y_2-y_3)(x_4-x_3)\big) \\ &= \frac{1}{2}(-x_2y_1 - x_1y_4 + y_2x_1 + y_1x_4 + x_2y_3 + x_3y_4 - y_3x_4 - y_2x_3) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1-x_3)(y_2-y_4)-(y_1-y_3)(x_2-x_4)].\end{aligned}$$

<u>Coordonnées des sommets du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$.</u>



$M_1(a\cos\theta\,;b\sin(\theta))$

$M_4 = (a\cos(\theta+\delta)\,;b\sin(\theta+\delta))$

$M_2 = M_1 + \vec{N}\frac{l}{\|\vec{N}\|}$ avec $\vec{N}\begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}$

$M_3 = M_4 + \overrightarrow{N_\delta}\frac{l}{\|\overrightarrow{N_\delta}\|}$ avec $\overrightarrow{N_\delta}\begin{pmatrix} b\cos(\theta+\delta) \\ a\sin(\theta+\delta) \end{pmatrix}$

Aire du quadrilatère infinitésimal

Soit δ un angle infinitésimal

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4)\\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\left(a\cos\theta - a\cos(\theta+\delta) - \frac{lb\cos(\theta+\delta)}{\|\overrightarrow{N_\delta}\|}\right)\left(b\sin\theta + \frac{la\sin\theta}{\|\vec{N}\|} - b\sin(\theta+\delta)\right)\\
&\quad - \left(a\cos\theta + \frac{lb\cos\theta}{\|\vec{N}\|} - a\cos(\theta+\delta)\right)\left(b\sin\theta - b\sin(\theta+\delta) - \frac{la\sin(\theta+\delta)}{\|\overrightarrow{N_\delta}\|}\right)\Bigg]\\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\left(a\sin\theta\delta - \frac{lb\cos(\theta+\delta)}{\|\overrightarrow{N_\delta}\|}\right)\left(-b\cos\theta\delta + \frac{la\sin\theta}{\|\vec{N}\|}\right)\\
&\quad - \left(a\sin\theta\delta + \frac{lb\cos\theta}{\|\vec{N}\|}\right)\left(-b\cos\theta\delta - \frac{la\sin(\theta+\delta)}{\|\overrightarrow{N_\delta}\|}\right)\Bigg]\\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\frac{a^2\delta\sin^2\theta}{\|\vec{N}\|} + \frac{b^2\delta l\cos^2\theta}{\|\vec{N}\|} + \frac{a^2\delta l\sin\theta\sin(\theta+\delta)}{\|\overrightarrow{N_\delta}\|} + \frac{b^2\delta l\cos\theta\cos(\theta+\delta)}{\|\overrightarrow{N_\delta}\|}\\
&\quad + \frac{l^2ab}{\|\vec{N}\|\|\overrightarrow{N_\delta}\|}(\cos\theta\sin(\theta+\delta) - \sin\theta\cos(\theta+\delta))\Bigg]\\
&= \frac{1}{2}\left[\delta l\,\|\vec{N}\| + \delta l\,\|\overrightarrow{N_\delta}\| + \frac{l^2ab\sin\delta}{\|\vec{N}\|\|\overrightarrow{N_\delta}\|}\right]
\end{aligned}$$

car $\delta\sin(\theta+\delta) = \delta\sin\theta$ et $\delta\cos(\theta+\delta) = \delta\cos\theta$ à l'ordre 1

$$= \frac{1}{2}\left(2l\delta\|\vec{N}\| + \frac{l^2ab\delta}{\|\vec{N}\|^2}\right)$$

car $\sin\delta = \delta$ à l'ordre 1 et $\|\vec{N}\| + \|\overrightarrow{N_\delta}\| = 2\|\vec{N}\|$ et $\|\vec{N}\| \times \|\overrightarrow{N_\delta}\| = \|\vec{N}\|^2$ à l'ordre 1.

On conclut $\mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4) = \delta\left(l\|\vec{N}\| + \frac{abl^2}{2\|\vec{N}\|^2}\right)$.

Aire A de la bande du premier quadrant

Avec $\|\vec{N}\| = (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(l\|\vec{N}\| + \frac{\frac{1}{2}(l^2ab)}{\|\vec{N}\|^2}\right)\mathrm{d}\theta.$$

En posant $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, et avec $M(a\cos\theta\,; b\sin\theta\,)$ qui donne $OM = (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$, on a : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(l.OM + \frac{1}{2}\frac{l^2ab}{OM^2}\right)\mathrm{d}\theta'$.

Une intégrale elliptique complète de seconde espèce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} OM\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta.$$

On pose $e = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ l'excentricité de l'ellipse. On sait que $E(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta$ est une intégrale elliptique complète de seconde espèce et qu'il n'existe pas de forme explicite de cette intégrale à l'aide des fonctions usuelles. (voir le site 123calculus.com pour des valeurs numériques approchées).

On connait des valeurs approximantes de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} OM\mathrm{d}\theta$ qui est l'expression de la longueur de l'arc d'ellipse du premier quadrant. On a par exemple, de Kepler :

$$\frac{\pi}{2}\frac{a+b}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} OM\mathrm{d}\theta \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

ou de Ramanujan :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} OM\mathrm{d}\theta \simeq \frac{\pi}{2}\left[\frac{a+b}{2} - \frac{3(a-b)^2}{20(a+b)+2\sqrt{a^2+14ab+b^2}}\right] \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} OM\mathrm{d}\theta \simeq \frac{\pi}{2}\left[3\frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{(3a+b)(a+3b)}}{2}\right]$$

<u>Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{OM^2}\mathrm{d}\theta$:</u>

On pose $\theta = 2\arctan t$ et on déduit $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{OM^2}\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \frac{1}{a^2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + b^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \times \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1+t^2}{a^2(1-t^2)^2+b^2(2t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1+t^2}{a^2t^4+(4b^2-2a^2)t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{a^2}\int_0^1 \frac{1+t^2}{t^4+\left(4\frac{b^2}{a^2}-2\right)t^2+1}\mathrm{d}t = \frac{2}{a^2}\int_0^1 \frac{1+t^2}{t^4+(2-4e^2)t^2+1}\mathrm{d}t$$

avec $2-4e^2 \in]-2;2]$.

On sait qu'il va être possible d'exprimer cette intégrale en fonction de e.

$$= \frac{2}{a^2}\int_0^1 \frac{1+t^2}{(t^2+2et+1)(t^2-2et+1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+2et+1} + \frac{1}{t^2-2et+1}\mathrm{d}t$$

D'une part, en utilisant le changement de variable $x = t+e$, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+2et+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(t+e)^2+1-e^2}\mathrm{d}t = \int_e^{1+e} \frac{1}{x^2+1-e^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-e^2}\int_e^{1+e} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x$$

En posant $X = \frac{x}{\sqrt{1-e^2}}$, on poursuit :

$$= \frac{1}{1-e^2}\int_{\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}}^{\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}} \frac{1}{X^2+1}\sqrt{1-e^2}\mathrm{d}X = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2}\int_{\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}}^{\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}} \frac{1}{X^2+1}\mathrm{d}X$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+2et+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\arctan\left(\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}\right) - \arctan\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right)\right]$$

On montre aussi :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-2et+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\arctan\left(\frac{1-e}{\sqrt{1-e^2}}\right) + \arctan\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right)\right]$$

Rappel : Si $xy \neq 1$, alors $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

Cas particulier : si $xy = 1$ avec $x > 0$, alors $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+2et+1} + \frac{1}{t^2-2et+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\arctan\left(\frac{1-e}{\sqrt{1-e^2}}\right) + \arctan\left(\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}\right)\right].$$

Comme $\frac{1-e}{\sqrt{1-e^2}} \times \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = 1$, on a alors :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+2et+1} + \frac{1}{t^2-2et+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

d'où l'on tire

$$\int_0^1 \frac{1}{OM^2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

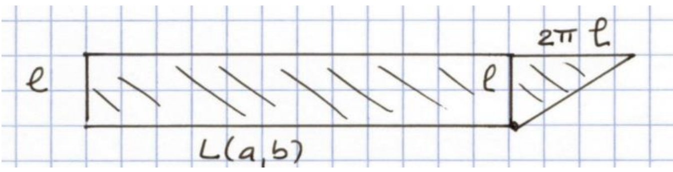
Finalement, comme $\sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a}$, on tire :

$$\frac{1}{2}l^2 ab \int_0^1 \frac{1}{OM^2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}l^2 ab \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot l^2.$$

Si on note $L(a,b)$ la longueur de l'ellipse, alors l'aire de la bande dans le premier quadrant est :

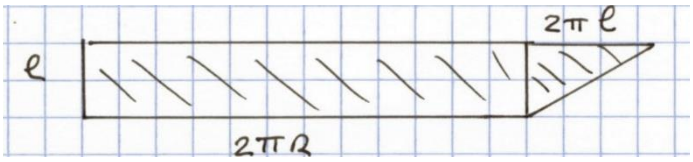
$$A = l\frac{L(a,b)}{4} + \frac{\pi}{4}l^2.$$

L'aire totale de la bande est donc : $4A = l \cdot L(a,b) + \pi l^2$



Cas particulier, la couronne d'un disque de rayon R a pour aire :

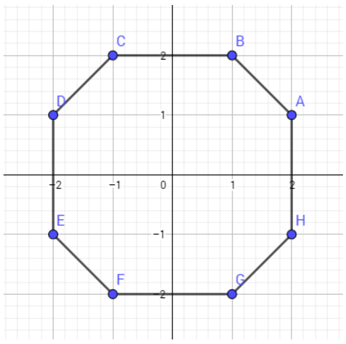
$$\pi(R+l)^2 - \pi R^2 = 2\pi RL + \pi l^2$$



Conjecture : La longueur externe de la bande est $L(a,b) + 2\pi l$ soit $2\pi l$ augmenté de la longueur de l'ellipse. L'excès de longueur est indépendant de la taille de l'ellipse.

127-1 *proposé par Jacques Chayé* :

Par quelle équation caractériser ce polygone ?



Solution de Walter Mesnier

$$|x-1| + |x+1| + |y-1| + |y+1| = 6$$

Solution de l'auteur

$$|y-x-1| + |y-x+1| + |y+x-1| + |y+x+1| = 8$$

127-4 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :

Montrer que pour tout entier n > 0, il existe des entiers x_1, x_2, ..., x_n tels que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Solution de Frédéric de Ligt

On prend $x_n = n$, $x_{n-1} = 2$ et $x_i = 1$ pour les entiers i de 1 à $n-2$.

On a bien $\sum_{i=1}^n x_i = n + 2 + n - 2 = 2n$ et $\prod_{i=1}^n x_i = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 2 \times n = 2n$.