



Corol'aire

Mai 2022

n°128

De l'utilité d'une association professionnelle

Frédéric de Ligt

Dans une période de doute sur l'utilité d'adhérer ou de continuer à adhérer à une association professionnelle enseignante, l'actualité vient d'apporter des arguments forts pour continuer à soutenir ces groupes organisés de personnes qui ont des intérêts, des activités et des buts en commun. La réforme du lycée a placé les disciplines scientifiques dans une situation difficile, écartées du tronc commun à partir de la classe de première. À ce niveau de scolarité, de trop nombreux élèves se détournent totalement des mathématiques dans le choix de leur spécialité et par conséquent n'ont plus comme complément à leur formation en mathématiques que ce qu'ils peuvent apprendre dans l'enseignement scientifique, ce qui est reconnu très majoritairement par la profession comme très insuffisant. Les réactions des collègues et surtout des parents ont été nombreuses et ont utilisé divers canaux ; les médias ont pris le relais. Et l'on sait combien les politiques sont sensibles à ce que disent ou écrivent les médias.

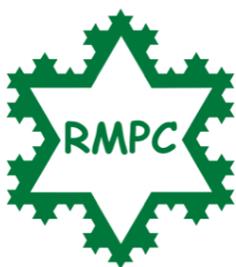
Mais il faut relire la presse sur ce sujet pour bien se rendre compte que les articles présentaient la situation qui leur avait été décrite justement par ces associations professionnelles et

Sommaire

Rallye.....	p.2
Compte-rendus du comité	p.4
Rubricollage.....	p.9

Suite page 16

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes



L'édition 2022 du Rallye Mathématique de Poitou-Charentes a dépassé les effectifs de l'édition 2020 ! Ce sont un peu plus de 5000 élèves qui ont participé dans 200 classes de 53 établissements. La nouveauté de cette édition est une participation plus importante des écoles avec 251 élèves de 11 CM1/2.

Pour autant, la pandémie a tout de même perturbé les classes participantes. Les protocoles sanitaires ont mis à mal l'organisation de la classe pour travailler sur le thème, il a été parfois difficile de traiter cette partie dans une période où élèves et enseignants étaient contraints de rester à la maison !

Et puis on est parti en vacances d'hiver et on a enlevé les masques... Et la 5^e vague est arrivée, à point pour l'épreuve finale du 8 mars. Malgré tous les efforts des collègues, certaines classes n'ont pas pu y participer.

Le thème « Maths et Nature »

La consultation des dossiers a montré que ce thème a recueilli l'adhésion des élèves : toujours, de leur part, de la créativité et de l'imagination, en particulier pour la réalisation de l'affiche du Rallye. Les morceaux choisis qui seront sur notre site fin juin en feront la démonstration. Nous envisageons aussi de les exposer lors des Journées Nationales de l'APMEP à Jonzac et de faire voter les congressistes.

Les problèmes

Nous avons donc maintenant pris l'habitude de proposer une même épreuve pour tous les niveaux, chacun réalisant seulement six problèmes, dont trois communs à deux niveaux successifs. Les bulletins réponses étant particularisés par niveau, pas de confusion possible.

Le palmarès

L'équipe organisatrice du Rallye s'est réunie le 4 mai pour établir le palmarès. Nous avons décidé cette année d'attribuer 3 prix par niveau (or, argent, bronze), nombre de prix qui peut varier en plus ou en moins en fonction du nombre de classes sur un niveau mais aussi de l'importance des résultats. Ce palmarès sera envoyé aux coordonnateurs du Rallye peu après la réunion et paraîtra dans le prochain Corol'aire.

La remise des prix

Nous sommes désolés de vous annoncer qu'elle n'aura pas lieu cette année. En effet, vous n'ignorez pas que nous organisons les prochaines Journées Nationales de l'APMEP qui auront lieu du 22 au 25 octobre avec une animation à Jonzac prévue le vendredi 21. Il se trouve que l'intersection des équipes Rallye et Journées Nationales est loin d'être vide et les mois de mai et juin sont particulièrement prenants dans l'organisation de ces Journées.

Les lots

Petite consolation, comme l'an dernier, des lots individuels seront attribués aux élèves des classes lauréates ainsi que des livres au bénéfice des CDI et seront donc envoyés dans les établissements concernés.

Les flocons

Nous enverrons dans les établissements les résultats des classes en leur attribuant de 2 à 5 flocons. Ces flocons seront bien sûr à relativiser en fonction des problèmes rencontrés par chaque classe. Seuls les établissements peuvent en juger.

Et l'an prochain ?

Nous sommes à nouveau désolés de vous annoncer que, comme la remise des prix, le Rallye ne pourra pas avoir lieu l'an prochain. En effet, la préparation du thème du Rallye débute pendant les vacances d'été et se poursuit essentiellement au premier trimestre de l'année scolaire. Vous comprendrez que les Journées Nationales nous occuperont complètement à cette période.

Frustration au niveau des activités mathématiques dans notre académie ? Que non ! L'organisation dans notre Régionale des Journées Nationales de l'APMEP, ouvertes à tous les professeurs de mathématiques adhérents ou non, est l'occasion rêvée de participer à cette grande fête annuelle des mathématiques avec conférences, ateliers, exposants, spectacles, tourisme, beaucoup d'échanges et de convivialité.

Nous espérons vous y retrouver du 22 au 25 octobre prochains ; n'hésitez pas à vous inscrire sur le site dédié dès que possible : <https://jnjonzac.apmep.fr/>



Où se cachent les mathématiques ?

Compte-rendu du comité du 9 février 22

Préparation des Journées Nationales à Jonzac

Trésorerie

En l'absence de réponse de la Caisse d'Épargne de Jonzac, une demande d'ouverture de compte a été déposée auprès du Crédit Mutuel du Sud-Ouest à Barbezieux. Pour le lien entre le site des Journées et le paiement en ligne, Sébastien Soucaze avait suggéré cette banque dont il connaît le logiciel. Une fois créé le compte, le National pourra verser le fond de roulement prévu sur ce compte des Journées afin de régler les premiers frais engagés pour la préparation des Journées. Pour les demandes de subvention, Corinne Parcelier a monté un dossier pour une demande subvention de 4 000 € auprès du CTSI (culture scientifique technique et industrielle) de la Région Aquitaine. Des contacts ont été pris avec la CASDEN, la MAIF et la MGEN pour discuter de la nature des subventions qu'ils peuvent apporter.

Le off du vendredi 21 octobre

Dominique Souder va intervenir dans l'après-midi pour présenter une animation Maths et magie. Les associations Kangourou, Science Ouverte, CIJM, FFJM, Jeux à Bruxelles et bien sûr les Jeux de l'APMEP seront présentes à ce Off. Un géocaching sera proposé à la population ce vendredi 21 octobre sur la base des informations relevées par l'équipe lors de son déplacement sur Jonzac.

Conférenciers

Il manque une conférence à destination du premier degré. L'association M@ths en-vie va être contactée afin de savoir si un de ses membres peut présenter leur travail sous forme d'une conférence. Un message va être envoyé aux différents conférenciers pour qu'ils présentent leur thème, ceci afin de publication dans le BGV spécial Journées.

Liens avec la municipalité de Jonzac

Pour le off du vendredi, la municipalité va devoir nous fournir un tivoli ainsi que des grilles et des tables. Une réservation du théâtre va être déposée auprès de la mairie pour les représentations de Marie Lhuissier et Manu Houdart. Un rendez-vous est pris pour aller discuter avec l'office du tourisme des visites à proposer aux congressistes, de la billetterie pour les spectacles ainsi que des informations à diffuser auprès de la population comme par exemple des affiches pour les spectacles. Frédéric de Ligt va prendre un nouveau rendez-vous avec le maire de Jonzac pour préciser nos demandes.

Ateliers

Le site des Journées est ouvert, les propositions d'ateliers peuvent donc être déposées dès maintenant. Il faut activer nos réseaux pour inciter les personnes que nous aimerions voir animer un atelier à s'inscrire sur le site.

BGV spécial Journées

Il faudrait qu'il soit bouclé début avril, ce qui est court. Il faut donc récupérer un maximum d'informations d'ici là. L'office du tourisme va pouvoir nous fournir des plans de la ville que Jean Fromentin pourra retravailler. Les affiches au format A4 des Journées seront insérées à l'envoi de ce BGV. Frédéric de Ligt qui les stocke chez lui, voit avec le National pour l'expédition de 3 000 affiches.

Hébergement

Un lien, fourni par l'office du tourisme de Jonzac, a été donné dans la newsletter envoyée aux adhérents qui permet d'accéder à l'offre d'hébergement sur la commune de Jonzac. Dans un premier temps, il était envisagé de réserver un certain nombre d'appartements dans la résidence située en face du centre des congrès. Les conditions proposées étant peu avantageuses, il est décidé de réserver directement en ligne et ceci dès que le compte du Crédit Mutuel sera ouvert. Frédéric de Ligt va demander au National combien il lui faut prévoir de réservations pour les « officiels ».

Spectacles

Dominique Souder va présenter une conférence-spectacle dans l'auditorium le lundi soir. Ce sera l'occasion pour lui de vendre et dédicacer son dernier livre.

Centre des congrès

Une fiche récapitulative des besoins va être envoyée au responsable technique du centre des congrès, suite à la visite de notre délégation sur place le 12 janvier.

Centralisation des informations

Un Cosy est à disposition pour l'organisation des Journées, créé par Corinne Parcelier, qui permet de stocker les informations recueillies ainsi que la liste des tâches restant à réaliser. Jean Fromentin demande si un réglage peut envoyer une notification en cas de changement de son contenu.

Expositions

Les anciennes expositions sont déjà réservées sur 19 semaines de l'année 2022.

Les 14 concepteurs de la nouvelle exposition en préparation sont rattachés à l'association. Le thème développé est celui des mathématiques et de l'image, avec en sous-titre : représenter et tromper. Une demande a été faite auprès de l'Espace Mendès France pour que cet organisme prenne en charge l'achat de la documentation sur le sujet. Par ailleurs, il est acté que l'Espace Mendès France dédommagera les concepteurs de leurs frais de déplacement.

Une demande du groupe de travail est déposée auprès du comité pour engager une dépense comprise entre 500 € et 1 000 € pour la réalisation de maquettes qui seront la propriété de l'association et qui circuleront avec la future exposition.

Rallye

5 000 élèves sont inscrits dont 11 classes de cours élémentaire. Le nombre des inscrits repart à la hausse après la baisse de l'an passé. À notre demande, les IPR ont relancé les collègues pour les inciter à participer au rallye.

Pour ce qui concerne les lots, nous disposons de 1200 cartes mathématiques et l'IREM de Poitiers va fournir des livres en rapport avec le thème du Rallye.

Les fiches contenant les épreuves ont été envoyées dans les établissements et celles-ci se dérouleront, comme prévu initialement, le mardi 8 mars. L'existence d'une cérémonie de remise des prix est discutée car la charge de travail supplémentaire que cela représente semble peu compatible avec l'organisation des Journées Nationales à Jonzac. De même l'organisation du Rallye en 2023 est problématique car les mois de septembre et d'octobre 2022 seront occupés par la préparation des Journées Nationales, or c'est la période de la mise en place du Rallye.

Compte-rendu du comité du 6 avril 22

Préparation des Journées Nationales à Jonzac

Trésorerie

Le compte au Crédit Mutuel du Sud-Ouest est actif et les réservations des hébergements pour les personnalités présentes aux Journées Nationales peuvent commencer. L'adresse sur le RIB est incomplète car trop longue ; Frédéric va voir avec la banque pour une modification. Le devis pour la location du centre des congrès, qui date maintenant un peu, va être actualisé.

Ateliers

Sur le site de nos Journées, un délai de quinze jours supplémentaires, à compter du samedi 9 avril, est accordé aux animateurs souhaitant proposer un atelier lors des Journées Nationales à Jonzac. Certains membres de l'équipe collège de l'IREM vont être contactés pour les inciter à présenter leurs travaux dans le cadre d'un atelier. Il faudra demander à Cécile Boulesteix si elle est partante pour animer un atelier présentant notre Rallye pendant les Journées. Frédéric de Ligt a présenté, lors d'une réunion le 21 mars du GAM 16, à l'EN Charente Sud ainsi qu'aux référents mathématiques présents, les Journées Nationales. Une réunion avec l'EN de la circonscription de Jonzac est aussi prévue le 11 avril avec le même objectif.

Expositions

Une des expositions créées par notre Régionale sera visible à la médiathèque de Jonzac. Sa responsable va être contactée pour qu'elle fasse acheminer la version détenue par l'Espace Mendès France. Les plus belles affiches du Rallye réalisées cette année seront présentées lors de nos Journées Nationales et un vote élira la plus belle.

Subventions

La MAIF a établi une convention pour que notre association perçoive une subvention de 400 €. Pour finaliser la demande, un courrier est à rédiger et à la suite Jean-Paul Guichard pourrait se rendre dans les locaux de la MAIF.

Il faut déposer rapidement une demande de subvention pour les Journées Nationales dans le cadre de la Fête de Science.

Tourisme, restauration

La responsable de l'office du tourisme de Jonzac va proposer un planning des activités touristiques pendant les Journées Nationales ainsi que pour la « colo » des enfants. Il faudrait que l'office du tourisme dise s'il est possible qu'un exploitant viticole puisse vendre sa production sur son stand, auquel cas ce stand pourrait être déplacé dans le hall, en fin de congrès, pour que les congressistes puissent repartir avec un souvenir de la région. Enfin il

a été discuté du meilleur positionnement dans le planning du banquet. Corinne Parcelier apportera lors de la prochaine réunion de travail deux devis de traiteurs pour le banquet.

Assemblée générale

L'assemblée générale de l'association, qui se déroulait traditionnellement pendant la Journée de la Régionale, sera placée sur le créneau réservé aux Régionales pendant les Journées Nationales à Jonzac.

Comité National

Le mandat de Frédéric de Ligt, comme représentant de la Régionale au Comité National de l'association, se termine fin juin de cette année. Thierry Bacle se propose de prendre la suite avec tous les encouragements du comité. Il va être invité les 11 et 12 juin à participer au séminaire et le 26 juin au prochain Comité.

Expositions

Dominique Gaud présente l'état d'avancement de la préparation de la prochaine exposition « *Maths et images, réalité ou illusion* ». De nouvelles réunions sont à venir prochainement. Un document d'accompagnement sera rédigé pour faciliter l'usage de l'exposition par les collègues. Des maquettes vont être réalisées, qui seront ensuite reproduites par l'Espace Mendès France. Des animations dans Poitiers sont aussi envisagées.

Jean-Marie Parnaudeau a récapitulé les locations des expositions.

« Comment tu comptes ? » 2 semaines.

« Maths et puzzle » 10 semaines.

« Maths et mesures » 12 semaines (les utilisateurs auraient apprécié pouvoir disposer d'une brochure).

La durée moyenne de location est de 3 à 4 semaines.

L'exposition « Comment tu comptes ? » est revenue dans les locaux de l'IREM et est désormais disponible à la location.

Rallye

Voir article page 2 et 3

Questions d'actualité

Le comité évoque les modifications qui vont intervenir l'an prochain au lycée suite à la réintroduction des mathématiques dans le tronc commun en classe de première. Les sociétés savantes et l'APMEP ont participé à cette évolution.

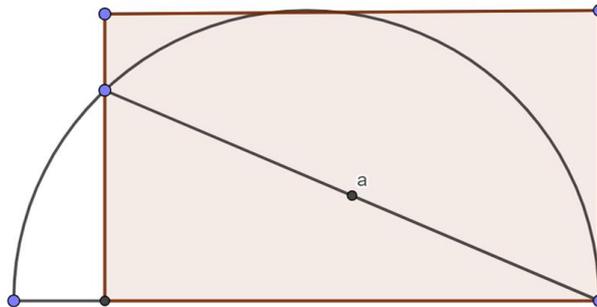
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

128-1 proposé par Louis Rivoallan (Rochefort) :

Trouver une relation entre a et l'aire du rectangle



128-2 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Montrer que pour les réels positifs x , y et z on a toujours :

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{y+z} - \frac{y}{x+z} - \frac{z}{x+y} \leq \frac{3}{2}$$

128-3 proposé par Jacques Chayé (Poitiers)

Pour réaliser un abat-jour, on dispose d'une structure métallique constituée de deux cercles de diamètres 15 cm et 18 cm, reliés par trois tiges rectilignes de 15 cm.

On désire habiller cette structure d'un tissu.

Quelle découpe doit-on prévoir ?



128-4 proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :

Sur une poulie passe une corde à laquelle sont suspendus, d'un côté un poids, de l'autre un chat de même poids que le poids.

Le poids du chat plus le poids de la corde font une fois et demie le poids du poids.

Le poids du chat en livres anglaises est exprimé par le même nombre que l'âge de la mère du chat en années.

La mère du chat est deux fois plus âgée que ne l'était le chat quand sa mère avait la moitié de l'âge qu'il aura quand il aura trois fois l'âge qu'avait sa mère quand elle avait trois fois l'âge qu'il avait.

L'âge du chat et l'âge de la mère totalisent 8 ans. La livre anglaise vaut 16 onces. La corde pèse 4 onces par pied.

Quelle est, en pied, la longueur de la corde ?

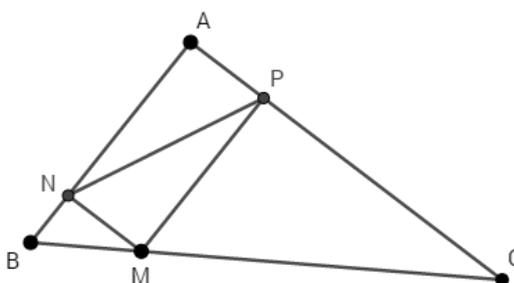
Les protagonistes :



Des solutions

125-2 proposé par Jean-Christophe Laugier :

Soit un triangle ABC et M un point du côté [BC]. N et P sont les points des côtés [AB] et [AC] respectivement tels que MNAP soit un parallélogramme. Déterminer M afin que la longueur NP soit minimale.



Solution de Frédéric de Ligt

On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a' = BM$, $AP = NM = b'$, $BN = c'$, $d = AM$ et $e = NP$.
On suppose que l'on cherche un point M sur le segment [BC].

Le théorème de Stewart :

$$a'b^2 + (a - a')c^2 = a(d^2 + a'(a - a')).$$

On en tire :

$$d^2 = (b^2 - c^2 - a^2) \frac{a'}{a} + c^2 + a'^2.$$

Une propriété du parallélogramme :

$$d^2 + e^2 = 2b'^2 + 2(c - c')^2.$$

La propriété de Thalès :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

À l'aide de ces trois égalités on parvient à exprimer NP^2 à l'aide des seules longueurs a , b , c et a' :

$$NP^2 = e^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 (2c^2 + 2b^2 - a^2) + \frac{a'}{a}(-3c^2 - b^2 + a^2) + c^2.$$

Si NP^2 est minimum, il en va de même pour NP.

Première observation :

$$0 < 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

En effet ABC est un triangle donc $a < b + c$ donc $a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$

donc $-2bc < b^2 + c^2 - a^2$ donc $b^2 + c^2 - 2bc < 2b^2 + 2c^2 - a^2$

donc $(b - c)^2 < 2b^2 + 2c^2 - a^2$ donc $0 < 2b^2 + 2c^2 - a^2$ car $(b - c)^2 \geq 0$.

Par conséquent il est légitime de dériver l'expression de NP^2 par rapport à a'/a pour obtenir la valeur minimale de NP^2 sous réserve que la dérivée s'annule sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

$$\frac{dNP^2}{d\left(\frac{a'}{a}\right)} = 2 \frac{a'}{a} (2c^2 + 2b^2 - a^2) + (-3c^2 - b^2 + a^2) = 0$$

Et elle s'annule pour

$$\frac{a'}{a} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4c^2 + 4b^2 - 2a^2} = \frac{1}{2} + \frac{c^2 - b^2}{4c^2 + 4b^2 - 2a^2}.$$

Seconde observation :

Quand $c = b$ alors $a'/a = 1/2$ et M est alors le milieu I de [BC].

Troisième observation :

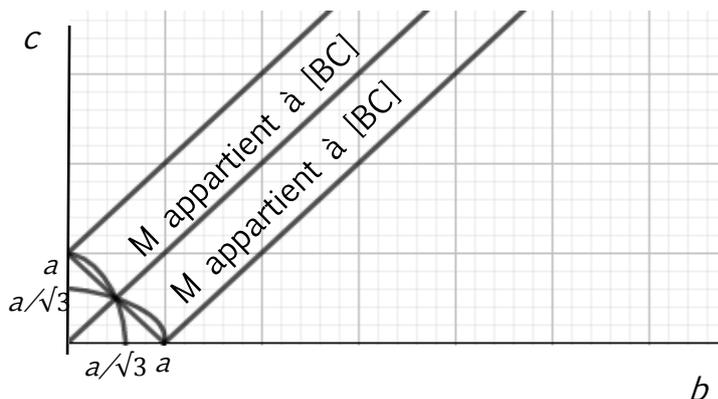
Compte tenu du rôle des longueurs b et c dans l'expression de a'/a on ne va considérer que le cas où $c > b$. Le second cas s'en déduira facilement.

Dire que a'/a appartient à l'intervalle $]1/2 ; 1]$ revient à dire que $(c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2)$ appartient à l'intervalle $]0 ; 1/2]$. La première observation et le cas considéré amène à se restreindre à l'inégalité :

$(c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2) \leq 1/2$ ou encore à $3b^2 + c^2 - a^2 \geq 0$.

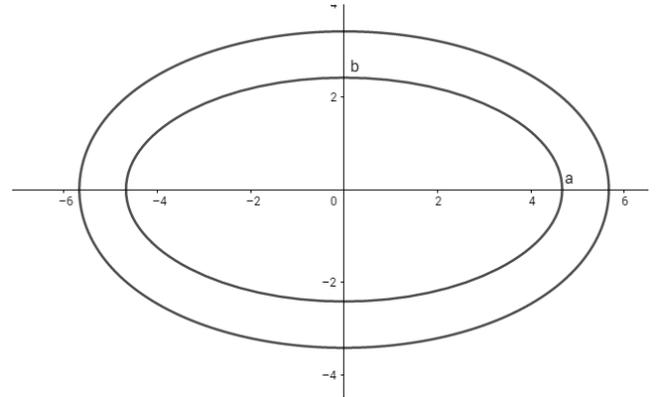
Avec cette condition, NP^2 est minimum pour $a'/a = 1/2 + (c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2)$. Le point M se situant dans l'intervalle]IC].

Si $3b^2 + c^2 - a^2 < 0$, alors $1/2 + (c^2 - b^2)/(4c^2 + 4b^2 - 2a^2) > 1$; NP^2 prend alors des valeurs décroissantes quand a'/a prend ses valeurs dans l'intervalle $]1/2 ; 1]$. Pour $a'/a = 1$, c'est-à-dire pour M placé en C, NP^2 aura une valeur minimum.



126-4 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Dans un repère orthonormé on considère une ellipse dont le grand axe est placé sur l'axe des abscisses et le petit axe sur celui des ordonnées. On désigne par a la longueur du demi-grand axe et par b celle du demi-petit axe. On porte sur chaque normale à l'ellipse et extérieurement à celle-ci une même longueur. Le lieu géométrique ainsi obtenu forme une courbe « parallèle » à l'ellipse. Si on note l la largeur de la bande qui ceinture maintenant cette ellipse, pouvez-vous donner une expression exacte ou à défaut approchée de l'aire de cette bande ?



Solution de l'auteur

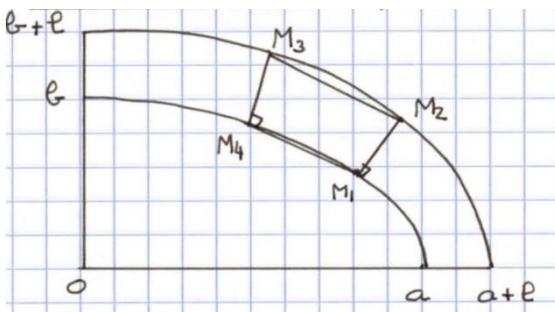
Préparation : Aire d'un quadrilatère convexe $M_1M_2M_3M_4$ en fonction des coordonnées de ses sommets. On note $(x_i; y_i)$ les coordonnées de M_i .

$$\mathcal{A}(M_1M_2M_4) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_4})| = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_1)|.$$

$$\mathcal{A}(M_3M_2M_4) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{M_3M_2}; \overrightarrow{M_3M_4})| = \frac{1}{2} |(x_2 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_3)(x_4 - x_3)|.$$

$$\mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4) = \mathcal{A}(M_1M_2M_4) + \mathcal{A}(M_2M_3M_4).$$

Cas particulier d'un quadrilatère inscrit dans la bande du premier quadrant

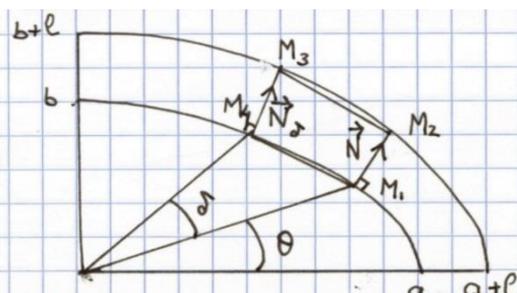


On se donne les inégalités :

$$\begin{aligned} x_2 &\geq x_1 & y_2 &\geq y_1 \\ x_3 &\geq x_4 & y_3 &\geq y_4 \\ x_2 &\geq x_3 & y_3 &\geq y_2 \\ x_1 &\geq x_4 & y_4 &\geq y_1 \\ x_2 &\geq x_4 & y_3 &\geq y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4) &= \frac{1}{2} ((x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_1)) - \frac{1}{2} ((x_2 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_3)(x_4 - x_3)) \\ &= \frac{1}{2} (-x_2y_1 - x_1y_4 + y_2x_1 + y_1x_4 + x_2y_3 + x_3y_4 - y_3x_4 - y_2x_3) \\ &= \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_4)]. \end{aligned}$$

Coordonnées des sommets du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$.



$$\begin{aligned} M_1 &(a \cos \theta ; b \sin(\theta)) \\ M_4 &= (a \cos(\theta + \delta) ; b \sin(\theta + \delta)) \\ M_2 &= M_1 + \vec{N} \frac{l}{\|\vec{N}\|} \quad \text{avec } \vec{N} \begin{pmatrix} b \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix} \\ M_3 &= M_4 + \vec{N}_\delta \frac{l}{\|\vec{N}_\delta\|} \quad \text{avec } \vec{N}_\delta \begin{pmatrix} b \cos(\theta + \delta) \\ a \sin(\theta + \delta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aire du quadrilatère infinitésimal

Soit δ un angle infinitésimal

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4) &= \frac{1}{2} \left[\left(a \cos \theta - a \cos(\theta + \delta) - \frac{lb \cos(\theta + \delta)}{\|\vec{N}_\delta\|} \right) \left(b \sin \theta + \frac{la \sin \theta}{\|\vec{N}\|} - b \sin(\theta + \delta) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(a \cos \theta + \frac{lb \cos \theta}{\|\vec{N}\|} - a \cos(\theta + \delta) \right) \left(b \sin \theta - b \sin(\theta + \delta) - \frac{la \sin(\theta + \delta)}{\|\vec{N}_\delta\|} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(a \sin \theta \delta - \frac{lb \cos(\theta + \delta)}{\|\vec{N}_\delta\|} \right) \left(-b \cos \theta \delta + \frac{la \sin \theta}{\|\vec{N}\|} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(a \sin \theta \delta + \frac{lb \cos \theta}{\|\vec{N}\|} \right) \left(-b \cos \theta \delta - \frac{la \sin(\theta + \delta)}{\|\vec{N}_\delta\|} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 \delta \sin^2 \theta}{\|\vec{N}\|} + \frac{b^2 \delta l \cos^2 \theta}{\|\vec{N}\|} + \frac{a^2 \delta l \sin \theta \sin(\theta + \delta)}{\|\vec{N}_\delta\|} + \frac{b^2 \delta l \cos \theta \cos(\theta + \delta)}{\|\vec{N}_\delta\|} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l^2 ab}{\|\vec{N}\| \|\vec{N}_\delta\|} (\cos \theta \sin(\theta + \delta) - \sin \theta \cos(\theta + \delta)) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\delta l \|\vec{N}\| + \delta l \|\vec{N}_\delta\| + \frac{l^2 ab \sin \delta}{\|\vec{N}\| \|\vec{N}_\delta\|} \right]
 \end{aligned}$$

car $\delta \sin(\theta + \delta) = \delta \sin \theta$ et $\delta \cos(\theta + \delta) = \delta \cos \theta$ à l'ordre 1

$$= \frac{1}{2} \left(2l\delta \|\vec{N}\| + \frac{l^2 ab \delta}{\|\vec{N}\|^2} \right)$$

car $\sin \delta = \delta$ à l'ordre 1 et $\|\vec{N}\| + \|\vec{N}_\delta\| = 2\|\vec{N}\|$ et $\|\vec{N}\| \times \|\vec{N}_\delta\| = \|\vec{N}\|^2$ à l'ordre 1.

On conclut $\mathcal{A}(M_1M_2M_3M_4) = \delta \left(l\|\vec{N}\| + \frac{abl^2}{2\|\vec{N}\|^2} \right)$.

Aire A de la bande du premier quadrant

Avec $\|\vec{N}\| = (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(l\|\vec{N}\| + \frac{1}{2} \frac{(l^2 ab)}{\|\vec{N}\|^2} \right) d\theta.$$

En posant $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, et avec $M(a \cos \theta; b \sin \theta)$ qui donne $OM = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(l \cdot OM + \frac{1}{2} \frac{l^2 ab}{OM^2} \right) d\theta'.$$

Une intégrale elliptique complète de seconde espèce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} OM d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

On pose $e = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ l'excentricité de l'ellipse. On sait que $E(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$ est une intégrale elliptique complète de seconde espèce et qu'il n'existe pas de forme explicite de cette intégrale à l'aide des fonctions usuelles. (voir le site 123calculus.com pour des valeurs numériques approchées).

On connaît des valeurs approximantes de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} OM d\theta$ qui est l'expression de la longueur de l'arc d'ellipse du premier quadrant. On a par exemple, de Kepler :

$$\frac{\pi a + b}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} OM d\theta \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

ou de Ramanujan :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} OM d\theta \simeq \frac{\pi}{2} \left[\frac{a+b}{2} - \frac{3(a-b)^2}{20(a+b) + 2\sqrt{a^2 + 14ab + b^2}} \right] \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} OM d\theta \simeq \frac{\pi}{2} \left[3 \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{(3a+b)(a+3b)}}{2} \right]$$

Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{OM^2} d\theta$:

On pose $\theta = 2 \arctan t$ et on déduit $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ et $d\theta = \frac{2}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{OM^2} d\theta &= \int_0^1 \frac{1}{a^2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + b^2 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \times \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1+t^2}{a^2(1-t^2)^2 + b^2(2t)^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1+t^2}{a^2 t^4 + (4b^2 - 2a^2)t^2 + a^2} dt = \frac{2}{a^2} \int_0^1 \frac{1+t^2}{t^4 + \left(4\frac{b^2}{a^2} - 2\right)t^2 + 1} dt = \frac{2}{a^2} \int_0^1 \frac{1+t^2}{t^4 + (2 - 4e^2)t^2 + 1} dt \end{aligned}$$

avec $2 - 4e^2 \in]-2; 2]$.

On sait qu'il va être possible d'exprimer cette intégrale en fonction de e .

$$= \frac{2}{a^2} \int_0^1 \frac{1+t^2}{(t^2 + 2et + 1)(t^2 - 2et + 1)} dt = \frac{1}{a^2} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2et + 1} + \frac{1}{t^2 - 2et + 1} dt$$

D'une part, en utilisant le changement de variable $x = t + e$, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2et + 1} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+e)^2 + 1 - e^2} dt = \int_e^{1+e} \frac{1}{x^2 + 1 - e^2} dx = \frac{1}{1 - e^2} \int_e^{1+e} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2 + 1} dx$$

En posant $X = \frac{x}{\sqrt{1-e^2}}$, on poursuit :

$$= \frac{1}{1 - e^2} \int_{\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}}^{\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}} \frac{1}{X^2 + 1} \sqrt{1 - e^2} dX = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2} \int_{\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}}^{\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}} \frac{1}{X^2 + 1} dX$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2et + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \left[\arctan\left(\frac{1+e}{\sqrt{1 - e^2}}\right) - \arctan\left(\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\right) \right]$$

On montre aussi :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2et + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \left[\arctan\left(\frac{1-e}{\sqrt{1 - e^2}}\right) + \arctan\left(\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\right) \right]$$

Rappel : Si $xy \neq 1$, alors $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

Cas particulier : si $xy = 1$ avec $x > 0$, alors $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2et + 1} + \frac{1}{t^2 - 2et + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \left[\arctan\left(\frac{1-e}{\sqrt{1 - e^2}}\right) + \arctan\left(\frac{1+e}{\sqrt{1 - e^2}}\right) \right].$$

Comme $\frac{1-e}{\sqrt{1-e^2}} \times \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = 1$, on a alors :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2et + 1} + \frac{1}{t^2 - 2et + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

d'où l'on tire

$$\int_0^1 \frac{1}{OM^2} d\theta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

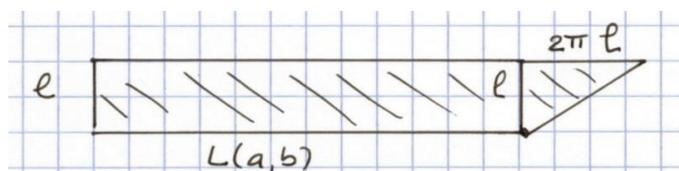
Finalement, comme $\sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a}$, on tire :

$$\frac{1}{2} l^2 ab \int_0^1 \frac{1}{OM^2} d\theta = \frac{1}{2} l^2 ab \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot l^2.$$

Si on note $L(a,b)$ la longueur de l'ellipse, alors l'aire de la bande dans le premier quadrant est :

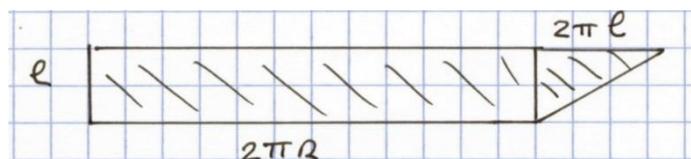
$$A = l \frac{L(a,b)}{4} + \frac{\pi}{4} l^2.$$

L'aire totale de la bande est donc : $4A = l \cdot L(a,b) + \pi l^2$



Cas particulier, la couronne d'un disque de rayon R a pour aire :

$$\pi(R+l)^2 - \pi R^2 = 2\pi Rl + \pi l^2$$



Conjecture : La longueur externe de la bande est $L(a,b) + 2\pi l$ soit $2\pi l$ augmenté de la longueur de l'ellipse. L'excès de longueur est indépendant de la taille de l'ellipse.

127-1 proposé par Jacques Chayé :

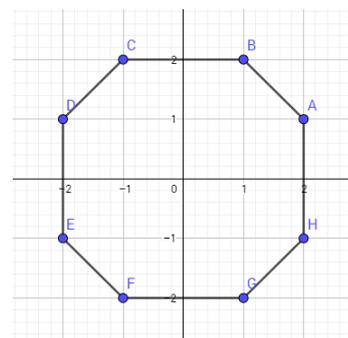
Par quelle équation caractériser ce polygone ?

Solution de Walter Mesnier

$$|x-1| + |x+1| + |y-1| + |y+1| = 6$$

Solution de l'auteur

$$|y-x-1| + |y-x+1| + |y+x-1| + |y+x+1| = 8$$



127-4 proposé par Jean-Christophe Laugier :

Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe des entiers x_1, x_2, \dots, x_n tels que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Solution de Frédéric de Ligt

On prend $x_n = n$, $x_{n-1} = 2$ et $x_i = 1$ pour les entiers i de 1 à $n-2$.

On a bien $\sum_{i=1}^n x_i = n + 2 + n - 2 = 2n$ et $\prod_{i=1}^n x_i = 1 \times 1 \times \dots \times 1 \times 2 \times n = 2n$.

tout particulièrement par l'APMEP. Quand l'affaire a commencé à faire des remous, les journalistes se sont tournés vers le ministre de l'éducation d'une part et en contrepoint vers les associations professionnelles de mathématiques pour comprendre et faire comprendre les problèmes posés au grand public. L'exposé des faits par notre association et la publicité qui en a été faite, a contribué à faire bouger les lignes, et des évolutions importantes sont en cours. La mobilisation de l'APMEP sur cette question a aidé sans conteste à obtenir des avancées significatives. Que le bureau actuel, qui va, selon nos statuts, laisser la place à une nouvelle équipe dès le mois de juin, soit chaleureusement remercié pour son action efficace. À charge maintenant pour le nouveau bureau de poursuivre dans ce sens car tous les problèmes soulevés par cette réforme n'ont pas encore été solutionnés.

Un petit mot plus régional. La préparation des Journées Nationales à Jonzac avance bien. Si vous n'avez jamais participé aux Journées Nationales de l'APMEP, il faut absolument profiter de la proximité géographique pour découvrir cette ambiance stimulante, studieuse et conviviale. Vous ne serez pas déçu. Les inscriptions seront ouvertes à partir du mois d'août.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
11 Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : <http://apmep.poitiers.free.fr/>

Mél. : apmep.poitiers@free.fr

Tél. : 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication

F. de Ligt

Éditeur

APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

Comité de rédaction

F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne,
J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.

Siège Social

Voir adresse ci-dessus

Imprimerie

IREM de Poitiers. Adresse ci-dessus.

Dépôt légal

Mai 2022