Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

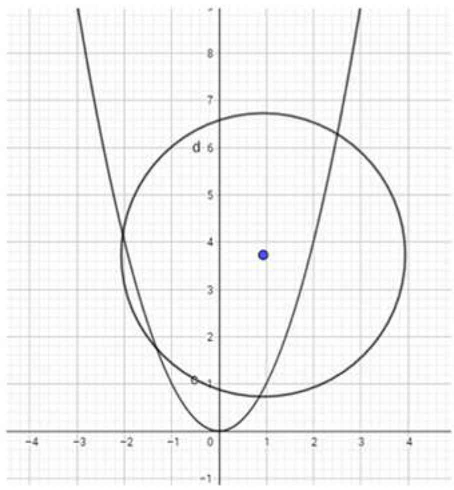
Des problèmes

130-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Il s'agit de placer tous les entiers de 1 à 16 dans cette grille de telle sorte que chaque entier soit la moyenne arithmétique des quatre entiers qui lui sont adjacents. Avant d'essayer de résoudre un système linéaire de 16 équations à 16 inconnues vous pourrez utilement visionner la vidéo d'Olivier Druet à l'adresse

https://video.math.cnrs.fr/carres-magiques-de-dirichlet/

	17	27	-10	36	
-18					-1
-15					33
20					-7
21					-2
	18	8	-1	-3	



130-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Si trois points distincts A, B et C, d'abscisses entières appartiennent à la parabole d'équation $y = x^2$, montrer qu'alors le cercle circonscrit au triangle ABC rencontre la parabole en un quatrième point d'abscisse entière.

130-3 *proposé par Daniel Perrin (Orsay)*

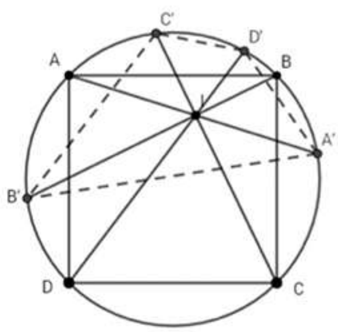
La question suivante est inspirée du quatrième exercice du concours René Merckhoffer (pour les élèves de quatrième) de 2022 :

On considère un triangle ABC. Construire à la règle et au compas des points $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ tels que l'on ait $BD = DE = EC$.

130-4 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)*

On donne un carré inscrit ABCD et un point I du plan. On joint le point I aux quatre sommets. Les droites obtenues coupent le cercle en quatre nouveaux points A', B', C', D'.

Montrer que dans le quadrilatère A'B'C'D' on a $A'B' \times C'D' = A'D' \times B'C'$.



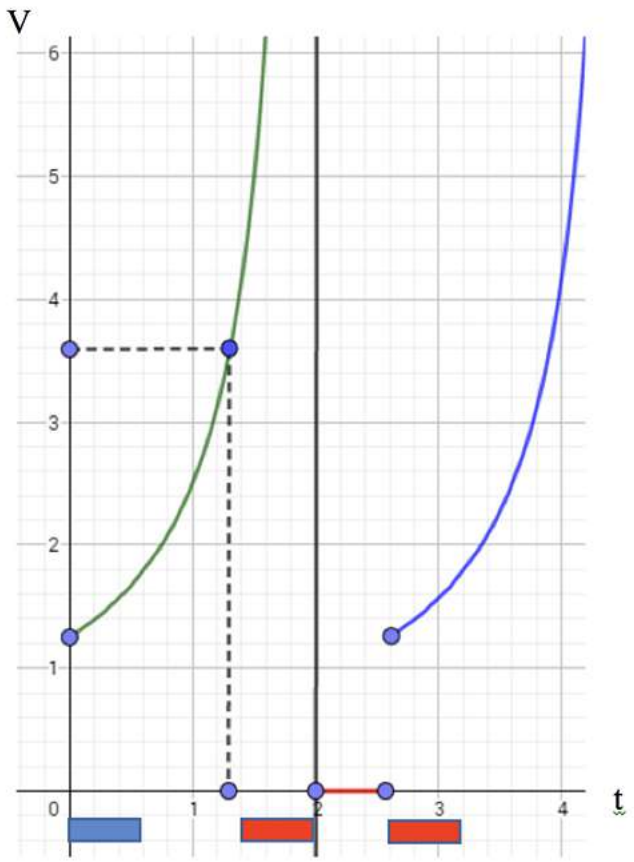
Des solutions

120-3 *proposé par Frédéric de Ligt*

Allez, on y croit !

Un rat s'est mis en tête de traverser la nationale 10. Des poids lourds de toute l'Europe y circulent en convois serrés. Pour simplifier le problème on suppose que la file des camions est ininterrompue et que ceux-ci sont modélisés par des parallélépipèdes rectangles de longueur 15 m, de largeur 2,5 m et de hauteur 4 m. Ils roulent tous à 90 km/h en respectant une distance de sécurité de 50 m.
Si notre rat, nommons-le George, choisit une direction perpendiculaire au bord de la route, à partir de quelle vitesse a-t-il plus d'une chance sur deux de survivre à sa traversée ?

Solution de l'auteur



La situation est périodique. On restreint l'étude à une période. La vitesse minimale V (en m/s) de la traversée peut s'exprimer en fonction d'un instant t (en s). On fixe t à 0 quand un camion vient de passer et donc, quand le camion suivant arrive, t vaut 2 (durée nécessaire à un camion roulant à 90 km/h pour parcourir 50 m). Il faut que George ait parcouru 2,5 m avant le passage du camion suivant, et pour cela il lui reste (2 – t) s.
On a donc V(t) = 2,5/(2 - t). Quand t vaut 2, V prend une valeur infinie ! Pendant que le second camion passe, durant 0,6 s (durée correspondant à la durée du passage d'un camion de 15 m à la vitesse de 25 m/s), la vitesse V est nulle.
La période est de 2,6 s.
En adoptant une vitesse supérieure ou égale à V(1,3) = 2,5/0,7 ≈ 3,57 à n'importe quel moment, George a au moins une chance sur deux d'effectuer la traversée indemne.

125-3 *proposé par Louis Rivoallan*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^{x^{x^{\cdots}}} = 2$ (1).

(Le sens de cette écriture est à prendre de la façon suivante : $x^{x^{x}} = x^{(x^{x})}$ et l'exponentiation est répétée indéfiniment).

Solution de Frédéric de Ligt

Soit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $X_0 > 0$ et $X_{n+1} = X_0^{X_n}$. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers 2. On a alors nécessairement $X_0^2 = 2$ et donc $X_0 = \sqrt{2}$.

On va par conséquent étudier la suite définie par $X_0 = \sqrt{2}$ et $X_{n+1} = \sqrt{2}^{X_n}$. On considère la fonction continue f de R_+^* dans R_+^* définie par $f(X) = \sqrt{2}^X$. On peut ainsi redéfinir la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_{n+1} = f(X_n)$ et $X_0 = \sqrt{2}$.

On montre facilement par récurrence que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est (strictement) croissante puisque $X_1 > X_0 > 1$ et f est (strictement) croissante sur $[1 ; +\infty[$. Par ailleurs on montre encore par récurrence que pour tout entier naturel n on a $0 < X_n < 2$ car cela est vrai de $X_0 = \sqrt{2}$ et pour $X \in]0 ; 2[$ on a que $f(X) \in]0 ; 2[$.

La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée donc elle converge vers une limite $0 < l \leq 2$. D'après le théorème du point fixe l vérifie l'équation $l = f(l)$.

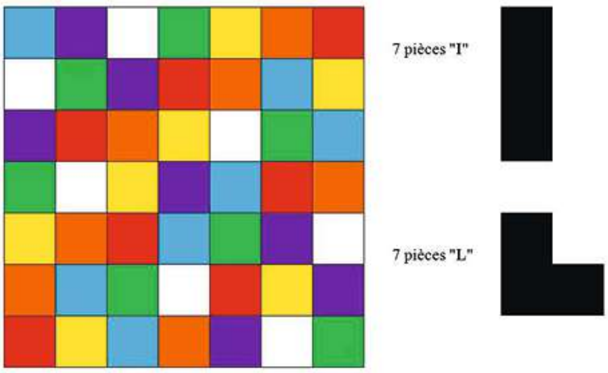
Reste donc à résoudre l'équation pour $l \in]0 ; 2]$:

$l = \sqrt{2}^l$

L'étude sur $]0 ; 2]$ de la fonction $g(X) = \sqrt{2}^l - l$ montre que g est strictement décroissante et que $g(2) = 0$, d'où $l = 2$.

Finalement l'unique solution de l'équation (1) est $X = \sqrt{2}$.

126-1 *proposé par Jean Fromentin*



Le Magic 7 est un jeu de plateau qui se joue sur une grille 7x7 sur laquelle sept couleurs différentes ont été réparties de façon à faire apparaître ces 7 couleurs sur chacune des lignes et sur chacune des colonnes. On dispose ensuite de 14 pièces en forme de I ou de L pouvant recouvrir trois pastilles colorées qu'il s'agira de placer selon certaines règles sur le plateau. Il n'est pas nécessaire de détailler ces règles car ce n'est pas l'objet de la question qui va suivre.

En observant plus attentivement la répartition des 7 couleurs dans la grille, on peut se rendre compte que le concepteur du jeu a disposé les pastilles d'une même couleur symétriquement par rapport à l'une ou l'autre des deux diagonales. Il s'agit donc en quelque sorte d'un hyper carré latin.

La question : « Combien y a-t-il de plateaux différents au Magic 7 ? », qui serait la question naturelle associée à ce jeu, étant trop longue à étudier, on demande plus modestement :

Combien y a-t-il de plateaux différents au Magic 5 ?

Solution de Frédéric de Ligt

On va plutôt travailler avec les numéros de 1 à 5 et attribuer aux cinq premières cases horizontales les numéros de 1 à 5 dans cet ordre. Il y alors 24 possibilités de disposer les numéros de 2 à 5 dans les quatre cases vacantes de la colonne de droite. On complète ensuite les grilles pour en faire des carrés latins d'ordre 5 en respectant la règle de symétrie par rapport à l'une ou l'autre des diagonales sachant qu'un numéro situé sur une des deux diagonales est son propre symétrique. Quand on aura épuisé toutes les combinaisons correctes de grilles, et qu'on en connaîtra le nombre, il suffira de multiplier ce résultat par 5 ! c'est-à-dire par 120 qui est le nombre de bijections entre les 5 numéros et les 5 couleurs, pour connaître le nombre de grilles possibles au Magic 5.
On effectue un premier remplissage et on constate que la moitié des 24 grilles ne peuvent être complétées selon les règles. Le numéro qui bloque est alors écrit gras et en rouge. On a deux grilles complètes la VIII et la XXIV.

I

1	2	3	4	5
2				
3				
4				
5				

II

1	2	3	4	5
2				4
3				
5				
4	5			

III

1	2	3	4	5
2				4
4				3
3				
5	3	4		

IV

1	2	3	4	5
2	3			4
4	1			3
5	4			
3	5	4		

V

1	2	3	4	5
2	5	1	3	4
5				3
3				
4	3	5		

VI

1	2	3	4	5
2				
5				3
4				
3		5		

VII

1	2	3	4	5
3				
2				3
4				2
5		2	3	

VIII

1	2	3	4	5
3	1	5	2	4
2	4	1	5	3
5	3	4	1	2
4	5	2	3	1

IX

1	2	3	4	5
3				
4				
2				**2**
5				

X

1	2	3	4	5
3	1			4
4				3
5		1	**1**	2
2	5	4	3	1

XI

1	2	3	4	5
3				
5				
2				**2**
4				

XII

1	2	3	4	5
3				
5				3
4	3	1	5	2
2		5	3	

XIII

1	2	3	4	5
4				**4**
2				
3				
5				

XIV

1	2	3	4	5
4				**4**
2				
5				
3				

XV

1	2	3	4	5
4				**4**
3				
2				
5				

XVI

1	2	3	4	5
4				**4**
3				
5				
2				

XVII

1	2	3	4	5
4				**4**
5				
2				
3				

XVIII

1	2	3	4	5
4				**4**
5				
3				
2				

XIX

1	2	3	4	5
5	**1**	1		4
2				3
3			1	2
4	3	2	5	1

XX

1	2	3	4	5
5	3		2	
2			1	3
4			3	2
3		2	5	

XXI

1	2	3	4	5
5				
3				
2				**2**
4				

XXII

1	2	3	4	5
5				
3				
4				2
2			5	

XXIII

1	2	3	4	5
5				
4				
2				**2**
3				

XXIV

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

On poursuit l’exploration avec les dix grilles restantes.
Les grilles IV, V, XII et XX ne peuvent être complétées que de deux façons.

IV					V					XII					XX				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	5	1	4	2	5	1	3	4	3	5	4	2	1	5	3	1	2	4
4	1	2	5	3	5	1	4	2	3	5	4	2	1	3	2	5	4	1	3
5	4	1	3	2	3	4	2	5	1	4	3	1	5	2	4	1	5	3	2
3	5	4	2	1	4	3	5	1	2	2	1	5	3	4	3	4	2	5	1
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	1	5	4	2	5	1	3	4	3	5	2	1	4	5	3	4	2	1
4	1	5	2	3	5	4	2	1	3	5	1	4	2	3	2	4	5	1	3
5	4	2	3	1	3	1	4	5	2	4	3	1	5	2	4	5	1	3	2
3	5	4	1	2	4	3	5	2	1	2	4	5	3	1	3	1	2	5	4

Il reste ensuite les six grilles I, II, III, VI, VII et XXII à exploiter.

I																			
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	4	5	3	1	2	4	5	1	3	2	4	1	5	3	2	5	4	1	3
3	5	2	1	4	3	1	2	5	4	3	5	2	1	4	3	4	2	5	1
4	3	1	5	2	4	5	1	3	2	4	1	5	3	2	4	1	5	3	2
5	1	4	2	3	5	3	4	2	1	5	3	4	2	1	5	3	1	2	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	5	1	3	4	2	3	1	5	4	2	3	5	1	4	2	3	5	1	4
3	1	4	5	2	3	5	4	1	2	3	1	4	5	2	3	5	4	2	1
4	3	5	2	1	4	1	5	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	5	3
5	4	2	1	3	5	4	2	3	1	5	4	2	3	1	5	4	1	3	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5										
2	4	1	5	3	2	3	4	5	1										
3	1	5	2	4	3	4	5	1	2										
4	5	2	3	1	4	5	1	2	3										
5	3	4	1	2	5	1	2	3	4										

II														
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	1	5	4	2	1	5	3	4	2	1	5	3	4
3	4	5	1	2	3	4	2	5	1	3	4	1	5	2
5	1	4	2	3	5	3	4	1	2	5	3	4	2	1
4	5	2	3	1	4	5	1	2	3	4	5	2	1	3
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	5	1	4	2	3	5	1	4	2	3	4	1	4
3	1	4	5	2	3	4	2	5	1	3	4	1	5	2
5	4	1	2	3	5	1	4	2	3	5	1	4	2	3
4	5	2	3	1	4	5	1	3	2	4	5	2	3	1
1	2	3	4	5										
2	3	5	1	4										
3	4	2	5	1										
5	1	4	3	2										
4	5	1	2	3										

III

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
4	5	1	2	3
3	4	2	5	1
5	3	4	1	2

1	2	3	4	5
2	5	1	3	4
4	1	5	2	3
3	4	2	5	1
5	3	4	1	2

1	2	3	4	5
2	5	1	3	4
4	1	2	5	3
3	4	5	2	1
5	3	4	1	2

1	2	3	4	5
2	5	1	3	4
4	1	2	5	3
3	4	5	2	2
5	3	4	2	1

1	2	3	4	5
2	5	1	3	4
4	1	5	2	3
3	4	2	5	2
5	3	4	2	1

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
4	5	2	1	3
3	4	1	5	2
5	3	4	2	1

VI

1	2	3	4	5
2	5	4	3	1
5	4	2	1	3
4	3	1	5	2
3	1	5	2	4

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
5	4	2	1	3
4	3	1	5	2
3	1	5	2	4

1	2	3	4	5
2	3	1	5	4
5	1	4	2	3
4	5	2	3	1
3	3	4	2	1

1	2	3	4	5
2	5	1	3	4
5	1	4	2	3
4	3	2	5	1
3	4	5	1	2

VII

1	2	3	4	5
3	1	5	2	4
2	5	4	1	3
4	3	1	5	2
5	4	2	3	1

1	2	3	4	5
3	5	1	2	4
2	1	4	5	3
4	3	5	1	2
5	4	2	3	1

1	2	3	4	5
3	5	4	2	1
2	4	1	5	3
4	3	5	1	2
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
3	5	4	2	1
2	4	5	1	3
4	3	1	5	2
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
3	4	5	2	1
2	5	4	1	3
4	3	1	5	2
5	1	2	3	4

XXII

1	2	3	4	5
5	4	1	2	3
3	5	2	1	4
4	1	5	3	2
2	3	4	5	1

1	2	3	4	5
5	4	2	1	3
3	1	5	2	4
4	5	1	3	2
2	3	4	5	1

1	2	3	4	5
5	4	2	3	1
3	5	1	2	4
4	3	5	1	2
2	1	4	5	3

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
3	5	4	2	1
4	3	5	1	2
2	4	1	5	3

1	2	3	4	5
5	4	2	1	3
3	5	1	2	4
4	1	5	3	2
2	3	4	5	1

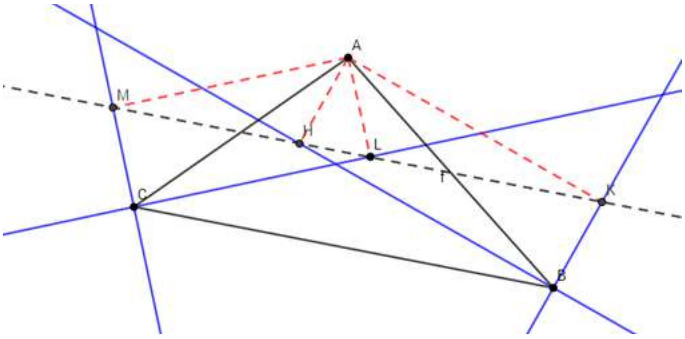
1	2	3	4	5
5	4	2	1	3
3	5	4	2	1
4	1	5	3	2
2	3	1	5	4

1	2	3	4	5
5	3	2	1	4
3	5	4	2	1
4	1	5	3	2
2	4	1	5	3

On obtient finalement un total de 49 grilles et donc $49 \times 120 = 5880$ plateaux de Magic 5.

129-4 *proposé par Jacques Chayé* :

Les pieds des perpendiculaires abaissées du sommet A d'un triangle ABC sur les quatre bissectrices des angles formés par la droite (BC) avec les droites (AB) et (AC) sont quatre points alignés.



Solution de l'auteur

Le quadrilatère AHBK est un rectangle, donc $\widehat{BHK}$ = $\widehat{ABH}$. Mais $\widehat{ABH}$ = $\widehat{HBC}$, par conséquent on a $\widehat{HBC}$ = $\widehat{BHK}$.
Les demi-droites [BC) et [HK) sont situées de part et d'autre de la droite (HB) ; on en déduit que les droites (HK) et (BC) sont parallèles. D'autre part, les segments [HK] et [AB] ont le même milieu, donc la droite (HK) passe par le milieu du segment [AB] et par le milieu du segment [AC].
On démontrerait de même que la droite (LM) est parallèle à la droite (BC) et que la droite (HM) passe par le milieu du segment [AC] et par le milieu du segment [AB].
Les droites (HK) et (LM) sont donc confondues, c'est dire que les points H, K, L et M sont alignés.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9 Site :

http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication F. de Ligt
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon
Siège social Voir adresse ci-dessus
Imprimerie IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)
Dépôt légal Décembre 2022