Ru – Bri – COL⌝AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Pour ouvrir cette rubrique de nouvelle d'année, voici un texte envoyé par Jean-Christophe Laugier à propos de l'axiome des segments emboîtés.

On présente généralement $\mathbb{R}$ comme un corps commutatif, totalement ordonné, archimédien, vérifiant l'un ou l'autre des axiomes supplémentaires suivants.

Axiome de la borne supérieure : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Axiome des segments emboîtés : toute suite d'intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$, décroissante par inclusion, possède une intersection non vide (réduite donc à un point si la suite des longueurs des intervalles tend vers 0).

Si on l'adopte, ce dernier axiome, outre qu'il est plus intuitif que l'axiome de la borne supérieure, se révèle un outil puissant à l'origine de la méthode de dichotomie qui permet de montrer de manière constructive l'existence de certains objets.

Pour illustrer ce qui précède, voici deux exemples de démonstrations inhabituelles de résultats classiques mettant en œuvre l'axiome des segments emboîtés.

1) Toute suite de Cauchy est convergente

Soit (x_n) une suite de Cauchy de nombres réels. Il est aisé de montrer que (x_n) est bornée. Soit alors $[a\ ;\ b]$ un intervalle contenant tous les termes de (x_n). Posons $I_0 = [a\ ;\ b]$. Découpons I_0 en trois intervalles $[a\ ;\ c]$, $[c\ ;\ d]$ et $[d\ ;\ b]$.

Puisque la suite (x_n) est de Cauchy, les intervalles $[a\ ;\ c]$ et $[d\ ;\ b]$ *ne peuvent contenir tous les deux* une infinité de termes de la suite. Supposons par exemple que $[a\ ;\ c]$ ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite. Posons $I_1 = [c\ ;\ b]$. I_1 contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. On peut donc construire ainsi, par récurrence, une suite (I_n) d'intervalles emboîtés telle que la longueur de I_{n+1} soit $\frac{2}{3}$ de la longueur de I_n et chaque I_n contient tous les termes de la suite (x_n) sauf un nombre fini d'entre eux. Soit x l'unique point commun à tous les I_n. Tout voisinage de x contient un I_n pour n assez grand, donc tous les termes de (x_n) sauf un nombre fini. Par conséquent $\lim x_n = x$.

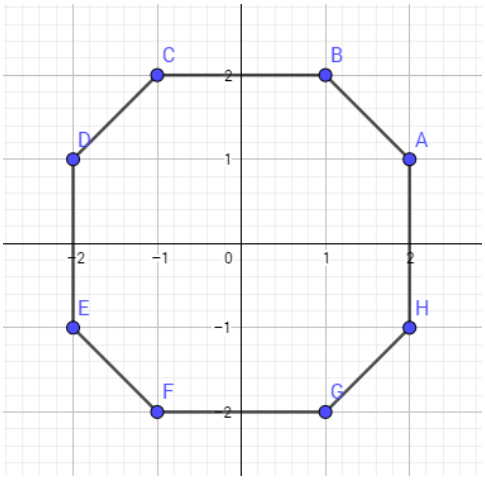
2) $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Il suffit de prouver que $[0\ ;\ 1]$ n'est pas dénombrable. On le démontre par l'absurde. Supposons donc que la suite (x_n), pour n entier, soit une énumération de $[0\ ;\ 1]$. Posons $I_0 = [0\ ;\ 1]$. On peut trouver un intervalle fermé borné I_1 de longueur inférieure ou égale à ½, inclus dans I_0 et ne contenant pas x_0. De même on peut trouver I_2 de longueur inférieure ou égale à ¼, inclus dans I_1 ne contenant ni x_0, ni x_1. On construit ainsi par récurrence une suite d'intervalles emboîtés (I_n) telle que la longueur de I_n soit inférieure ou égale à $1/2^n$ et I_{n+1} ne contient aucun des termes x_0, x_1, …, x_n. Soit a le point d'intersection des intervalles I_n. Il existe alors p tel que $a = x_p$. Donc a n'appartient pas à I_{p+1} ce qui est contradictoire avec la définition de a.

Remarque : on a supposé implicitement dans ce qui précède que tout intervalle $]a\ ;\ b[$ avec $a < b$ est non vide. C'est l'axiome d'Archimède qui permet de le démontrer, en supposant également que $\mathbb{R}$ contient au moins deux éléments distincts !

Des problèmes

127-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :
Par quelle équation caractériser ce polygone ?

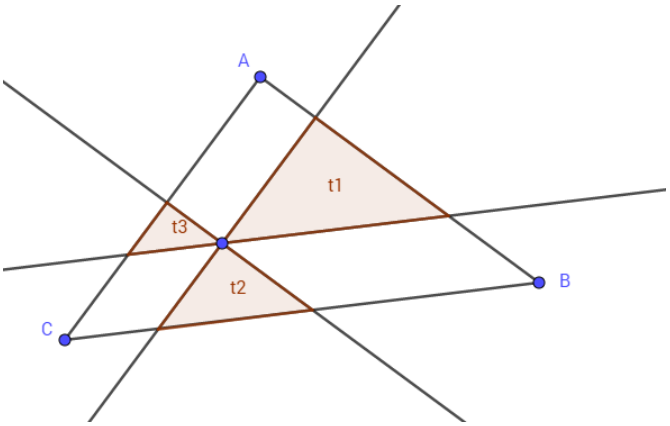


127-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Montrer que la série suivante converge vers une limite à déterminer :

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{2+3}+\frac{3}{4+5+6}+\frac{4}{7+8+9+10}+\cdots$$

127-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
On a tracé les droites parallèles aux côtés du triangle ABC passant par un point intérieur au triangle. Il apparaît trois triangles t_1, t_2 et t_3 d'aires respectives T_1, T_2 et T_3. Si on note S l'aire du triangle ABC, montrer qu'alors :

$$\sqrt{S}=\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}+\sqrt{T_3}$$

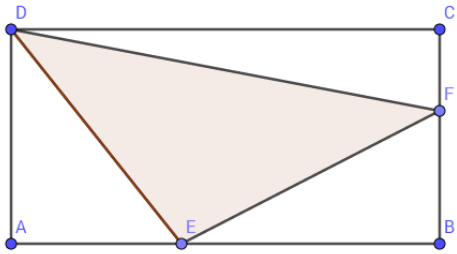


127-4 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Montrer que pour tout entier n > 0, il existe des entiers x_1, x_2, ..., x_n tels que :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1x_2\ldots x_n.$$

Des solutions

120-1 *Proposé par Dominique Gaud :*
Que d'or !
ABCD est un rectangle.
1- Où placer E et F pour que les trois triangles DCF, FBE et AED aient la même aire ?
2- Comment choisir alors le rectangle pour qu'en plus DE = EF ?
3- Que dire alors du triangle DEF ?



Solution de Jacques Chayé

1) Position de E et F

Posons : AB = L, BC = λ, AE = x, BF = y. En considérant les doubles des aires des triangles AED, EBF et FCD, on a :

$$\lambda x = (L - x)y = (\lambda - y)L$$

On a donc : $y = \lambda - \frac{\lambda}{L}x$, par suite :

$$(\lambda - \frac{\lambda}{L}x)(L - x) = \lambda x.$$

Après développement et simplifications, on obtient :

$$x^2 - 3Lx + L^2 = 0.$$

Des deux racines de cette équation, seule convient $\frac{3L - L\sqrt{5}}{2}$. Finalement, les positions des points E et F sont déterminées par AE = $\frac{3-\sqrt{5}}{2}L$ et BF = $\lambda - \frac{(\sqrt{5}-1)\lambda}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\lambda$.

Remarque : Φ désignant le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on voit que $\frac{BF}{AE} = \frac{\lambda}{L}\Phi$ et que la valeur commune aux aires des 3 triangles est $\frac{\lambda L}{1+\Phi}$.

2) Nature du rectangle ABCD si DE = EF

On a toujours :

$$DE^2 = \lambda^2 + \frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}L^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}L^2 + \lambda^2$$

et

$$EF^2 = \left(L - \frac{3-\sqrt{5}}{2}L\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\lambda\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}L\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\lambda\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(L^2 + \lambda^2).$$

Donc, DE = EF si et seulement si : $\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)L^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1\right)\lambda^2$,

soit :

$$(2-\sqrt{5})L^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\lambda^2 \text{ c'est-à-dire : } \frac{L^2}{\lambda^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi^2.$$

Conclusion : DE = DF si et seulement si : $\frac{L}{\lambda} = \Phi$ et alors $DE^2 = EF^2 = (5-\sqrt{5})\lambda^2/2$.

3) Nature du triangle DEF

On vérifie que $DF^2 = DE^2 + EF^2 = (5-\sqrt{5})\lambda^2$ et donc le triangle DEF est isocèle mais aussi rectangle en E.

122-3 *proposé par Jacques Chayé* :

Approximations rationnelles de $\sqrt{2}$.

Il n'existe pas de couple (a, b) d'entiers naturels vérifiant $a^2 = 2b^2$; on peut toutefois rechercher les couples vérifiant $a^2 = 2b^2 + 1$ (1) ou $a^2 = 2b^2 - 1$ (2).

Solution de l'auteur

En cherchant les premiers couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant les équations (1) ou (2) on trouve (1, 1) ; (3, 2) ; (7, 5) ; (17, 12) ; (41, 29) ; (99, 70) ; (239, 169) ; (577, 408) ; ..., où les couples sont alternativement solutions des équations (2) et (1). Si l'on présente ces solutions sous forme de fractions on a :

$$\frac{1}{1} \; ; \; \frac{3}{2} \; ; \; \frac{7}{5} \; ; \; \frac{17}{12} \; ; \; \frac{41}{29} \; ; \; \frac{99}{70} \; ; \; \frac{239}{169} \; ; \; \frac{577}{408} \; ; \; \ldots$$

On considère maintenant ces fractions comme les premiers termes d'une suite (u_n).

Comment passe-t-on du terme u_n au terme suivant u_{n+1} ?

Il semblerait, après quelques essais numériques, que si $u_n = \frac{a}{b}$, alors $u_{n+1} = \frac{a+2b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}+2}{\frac{a}{b}+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$.

On vérifie qu'avec une telle suite, on se trouve alternativement dans le cas (1) et dans le cas (2).

En effet, avec les notations ci-dessus :

Dans le cas (1) pour u_n on a $a^2 = 2b^2 + 1$, alors :

$$(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 = 6b^2 + 4ab + 1 \; ;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 3b^2 + 2ab + 1.$$

Donc, $(a + 2b)^2 = 2(a + b)^2 - 1$, on est alors dans le cas (2) pour u_{n+1}.

Dans le cas (2) pour u_n on a $a^2 = 2b^2 - 1$, alors :

$$(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 = 6b^2 + 4ab - 1 \; ;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 3b^2 + 2ab - 1.$$

Donc, $(a + 2b)^2 = 2(a + b)^2 + 1$, on est alors dans le cas (1) pour u_{n+1}.

Les termes de cette suite sont alternativement inférieurs ou supérieurs à $\sqrt{2}$.

si $u_n > \sqrt{2}$ alors $u_n + 1 > 1 + \sqrt{2}$, $\frac{1}{u_n+1} < \sqrt{2} - 1$, $\frac{u_n+2}{u_n+1} < \sqrt{2}$, soit : $u_{n+1} < \sqrt{2}$.

De même, si $u_n < \sqrt{2}$, alors $u_{n+1} > \sqrt{2}$.

Pour tout entier n on a u_{n+1} est plus proche de $\sqrt{2}$ que u_n.

$u_{n+1}^2 - 2 = \frac{u_n^2 + 4u_n + 4 - 2u_n^2 - 4u_n - 2}{(u_n+1)^2} = \frac{-u_n^2 + 2}{(u_n+1)^2}$, donc, comme $u_n + 1 > 1$, $\left|u_{n+1}^2 - 2\right| < \left|u_n^2 - 2\right|$.

La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

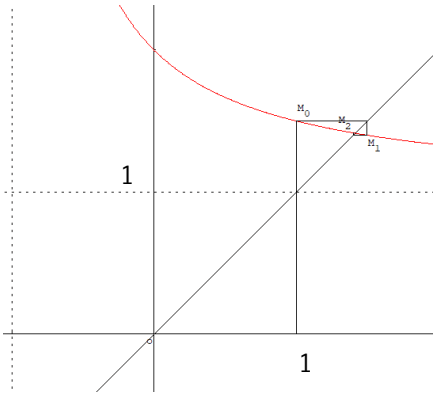
La suite $n \to \left|u_n^2 - 2\right|$ est minorée par 0 et strictement décroissante d'après ce qui précède ; elle converge donc et la suite (u_n) également.

Vue la définition récurrente de cette suite (u_n) et puisque $u_0 = 1$, on est sûr que sa limite λ est positive.

On a : $\frac{\lambda+2}{\lambda+1} = \lambda$ c'est-à-dire : $\lambda^2 = 2$, et puisque $\lambda > 0$ on peut conclure : $\lambda = \sqrt{2}$.

Interprétation graphique

Les points M_0 , M_1 , M_2 , … M_n sur la courbe d'équation $y=\frac{x+2}{x+1}$ ont pour abscisses respectives u_0, u_1, u_2, …, u_n et pour ordonnées respectives u_1, u_2, u_3, …, u_{n+1}.



123-3 *Proposé par Frédéric de Ligt :*
Le Cube Twist d'Eitan.
Peut-être connaissez-vous cet avatar du célèbre Rubik's Cube hongrois où la face supérieure est twistée d'un quart de tour. La boîte d'emballage est cubique.
Quel est le pourcentage de volume occupé par ce cube twisté quand il est dans son emballage ?

Solution de l'auteur

On fixe le côté de la boîte à 1. On attache un repère orthonormé direct (A ; B, D, D') à ce solide. La base est le carré ABCD avec :
A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0).
La face supérieure est le carré A'B'C'D' avec :
A'(1 ; 0 ; 1), B'(1 ; 1 ; 1), C'(0 ; 1 ; 1), D'(0 ; 0 ; 1).
Une coupe parallèle à la base, à la hauteur $h \in [0 ; 1]$ détermine un quadrilatère convexe. La symétrie d'ordre 4 du problème permet d'en déduire qu'il s'agit d'un carré A"B"C"D" avec A", B", C" et D" appartenant respectivement aux segments [AA'], [BB'], [CC'] et [DD']. On a A"(h ; 0 ; h) et B"(1 ; h ; h).
L'aire du carré à la hauteur h est donnée par l'expression $A"B"^2 = (1 - h)^2 + h^2 = 2h^2 - 2h + 1$. Le volume du cube twisté vaut donc $\int_0^1 (2h^2 - 2h + 1)\,dh = [\frac{2}{3}h^3 - h^2 + h]_0^1 = \frac{2}{3}$
Soit les deux tiers du volume de la boîte.

126-2 *Proposé par Jean-Christophe Laugier :*
Soient a, b, c des réels positifs ou nuls. Démontrer l'inégalité :

$$(2a + b + c)(a + 2b + c)(a + b + 2c) \geq 64abc$$

Solution de Louis Rivoallan
Soit $f(a, b, c) = (2a + b + c)(a + 2b + c)(a + b + 2c) - 64abc$.

On veut montrer que $f(a, b, c) \geqslant 0$. On pose $x = b/a$ et $y = c/a$ et $g(x, y) = f(a, b, c)/a^3$.

Alors $g(x, y) = (2 + x + y)(1 + 2x + y)(1 + x + 2y) - 64xy$.
On calcule le grad $g(x, y) = \begin{pmatrix} 7+14x+14xy+6x^2-48y+7y^2 \\ 7+14y+14xy+6y^2-48x+7x^2 \end{pmatrix}$

On peut remarquer que $g(1, 1) = (0 ; 0)$. 5999

On calcule alors la matrice Hessienne de g :

$$g''_x(x,y) = 12x + 14y + 14$$
$$g''_y(x,y) = 14x + 12y + 14$$
$$g''_{xy}(x,y) = 14x + 14y - 48$$

,

Au point de coordonnées (1 ; 1) cela donne :

$$g''_x(1,1) = g''_y(1,1) = 40 \text{ et } g''_{xy}(1,1) = -20 .$$

La matrice hessienne est :

$$\begin{pmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 40 \end{pmatrix}$$

Le déterminant et la trace sont strictement positifs. Cela montre que le point de coordonnées (1 ; 1) est un minimum de g. Or $g(1, 1) = 0$, donc $g(x, y) \geq 0$, et par suite $f(a, b, c) \geq 0$.

Solution de Frédéric de Ligt

À partir de l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique on tire que, pour $x_i \geq 0$; $i \in [1;4]$ on a toujours $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)^4 \geq x_1 x_2 x_3 x_4$.

Avec $a, b, c \geq 0$ on peut écrire successivement :

$$\left(\frac{a+a+b+c}{4}\right)^4 \geq aabc ,$$
$$\left(\frac{a+b+b+c}{4}\right)^4 \geq abbc ,$$
$$\left(\frac{a+b+c+c}{4}\right)^4 \geq abcc ,$$

En multipliant membre à membre ces quantités positives on obtient :

$$\left(\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{4^3}\right)^4 \geq a^4 b^4 c^4 .$$

Et finalement : $(2a + b + c)(a + 2b + c)(a + b + 2c) \geq 64abc$.