Ru – Bri – COL⌝AGE

Frédéric de Ligt

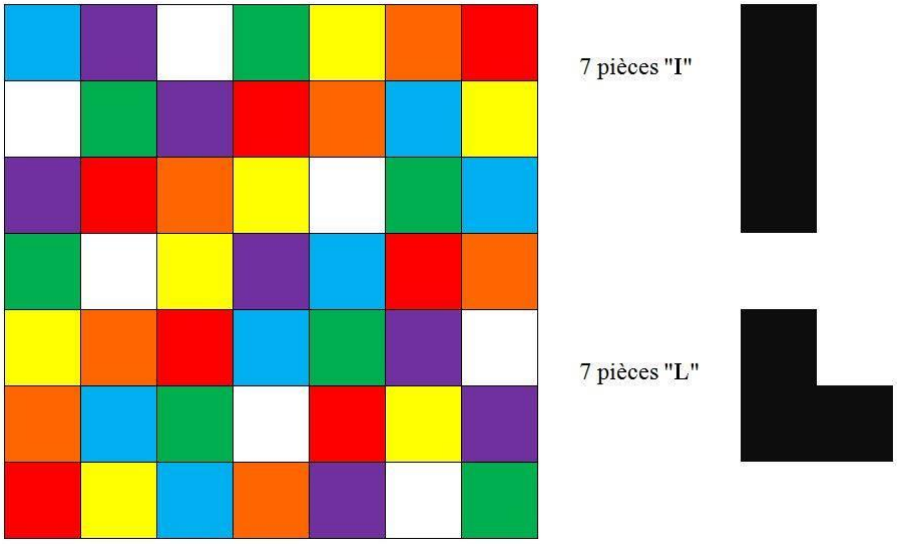
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

126-1 *proposé par Jean Fromentin (Niort)* :

Le Magic 7 est un jeu de plateau qui se joue sur une grille 7×7 sur laquelle sept couleurs différentes ont été réparties de façon à faire apparaître ces 7 couleurs sur chacune des lignes et sur chacune des colonnes. On dispose ensuite de 14 pièces en forme de I ou de L pouvant recouvrir trois pastilles colorées qu'il s'agira de placer selon certaines règles sur le plateau. Il n'est pas nécessaire de détailler ces règles car ce n'est pas l'objet de la question qui va suivre. En observant plus attentivement la répartition des 7 couleurs dans la grille, on peut se rendre compte que le concepteur du jeu a disposé les pastilles d'une même couleur symétriquement par rapport à l'une ou l'autre des deux diagonales. Il s'agit donc en quelque sorte d'un hyper carré latin.



La question : « Combien y a-t-il de plateaux différents au Magic 7 ? », qui serait la question naturelle associée à ce jeu, étant trop longue à étudier, on demande plus modestement :

Combien y a-t-il de plateaux différents au Magic 5 ?

126-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Soient *a*, *b*, *c* des réels positifs ou nuls. Démontrer l'inégalité :

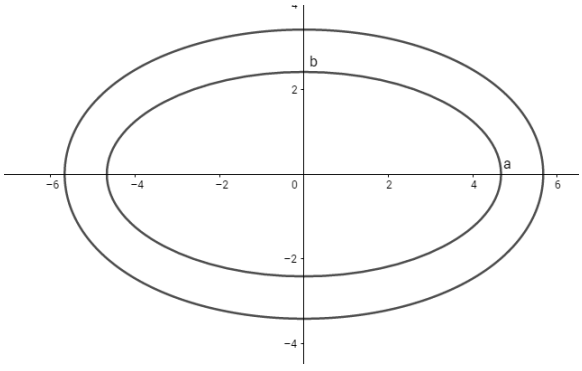
$$(2a + b + c)(a + 2b + c)(a + b + 2c) \geq 64abc$$

126-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Quelle est la probabilité de voir apparaître deux numéros consécutifs lors d'un tirage de 5 numéros dans une grille de Loto comportant 49 numéros ?

126-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Dans un repère orthonormé on considère une ellipse dont le grand axe est placé sur l'axe des abscisses et le petit axe sur celui des ordonnées. On désigne par *a* la longueur du demi-grand axe et par *b* celle du demi-petit axe. On porte sur chaque normale à l'ellipse et extérieurement à celle-ci une même longueur. Le lieu géométrique ainsi obtenu forme une courbe « parallèle » à l'ellipse. Si on note *l* la largeur de la bande qui ceinture maintenant cette ellipse, pouvez-vous donner une expression exacte ou à défaut approchée de l'aire de cette bande ?



126-5 *proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)* :

MNPQ est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R dont les diagonales [MP] et [NQ] sont orthogonales en un point A à l'intérieur du disque.
Montrer que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
$AM^2 + AN^2 + AP^2 + AQ^2 = 4R^2$
Le milieu de [OA] est l'isobarycentre de {M, N, P, Q}.

Des solutions

121-3 *Proposé par Louis Rivoallan :*

Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n supérieur ou égal à 2 sur le corps des réels ou des nombres complexes, quelles sont les matrices M telles que pour toute matrice A on ait :

$$\det(A + M) = \det(A) + \det(M) ?$$

Solution de l'auteur

Soit M une matrice vérifiant la propriété demandée.

Alors d'une part,

$$det(\mathrm{M} + \mathrm{M}) = det(\mathrm{M}) + det(\mathrm{M}) = 2det(\mathrm{M}),$$

et d'autre part,

$$det(M + M) = det(2M) = 2^n \times det(M).$$

Comme $n \geqslant 2$,on en déduit que $det(M) = 0$. Calculons son polynôme caractéristique :

$$P(X) = det(M - XI_n) = det(M) - det(XI_n) = -X^n det(I_n) = -X^{n.}$$

La seule valeur propre de Mest donc 0. Le polynôme caractéristique étant scindé, M est diagonalisable et il existe une matrice de Jordan J semblable à M dont la diagonale est nulle.

Supposons que J soit non nulle. Il existe un terme $a_{i,i+1} = 1$.

Pour $n = 5$ et $i = 3$, on a par exemple J = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Considérons la matrice B définie comme suit : des 0 partout et des n nombres 1 disposés sur la diagonale au-dessus de la ligne i et au-dessous de la ligne i+1 ainsi qu'aux places $a_{i,i+1}$et $a_{i+1,i}$

Par exemple, pour n = 5 et i = 3, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Alors $det(B) = -1$

Soit la matrice $A = B - J$; avec notre exemple précédent, on a A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La ligne numéro i de cette matrice ne contient que des 0, donc $det(A) = 0$.

On a $det(A + J) = det(B) = -1$, et $det(A) + det(J) = 0 + 0 = 0$.

L'hypothèse faite est donc fausse, et tous les termes de J sont nuls. M étant semblable à J, M est aussi la matrice nulle.

123-1 *Proposé par Louis Rivoallan :*

Dans une publicité télévisée on voit Henri Leconte déclarer :

« Pendant vingt ans j'ai été en situation d'obésité. En six mois j'ai perdu 15 kg et j'ai retrouvé un IMC normal. » (https://www.youtube.com/watch?v=mTGeBVvTNUc)
Sur Wikipédia on apprend que Henri Leconte mesure 1,85 m.

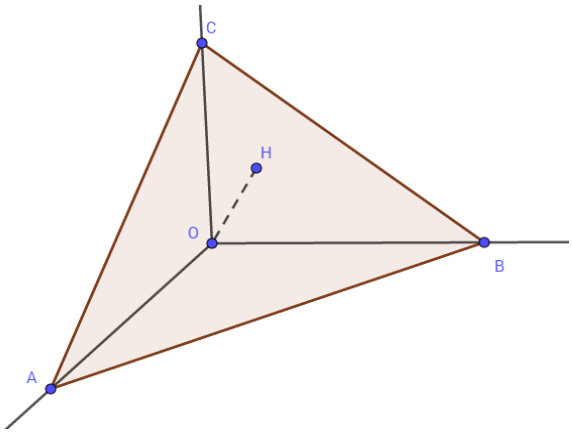
La publicité est-elle mensongère ?

Solution de Frédéric de Ligt

L'IMC est défini comme le rapport de la masse M exprimée en kg par le carré de la taille T exprimé en m^2. Selon les tables médicales un IMC supérieur à 30 kg/m^2 indique une obésité, alors que compris entre 18,5 et 25 il est considéré comme normal. La situation d'obésité d'Henri Leconte se traduit par $M/1{,}85^2 > 30$, soit $M > 102{,}675$. En perdant 15 kg, il a quand même une masse vérifiant $M > 87{,}675$. Son IMC vaut alors au moins $87{,}675/1{,}85^2$ soit environ 25,6. Cet IMC traduit au minimum un léger surpoids.

125-1 *Proposé par Jacques Chayé :*

Par rapport à un repère orthonormé d'origine O, on considère les trois points :
A(a ; 0 ; 0), B(0 ; b ; 0) et C(0 ; 0 ; c).
Le plan (ABC) est perpendiculaire en H à la sphère de centre O et de rayon 1. Comment s'expriment l'aire S du triangle ABC et les coordonnées u, v et w de H, en fonction de a, b et c ?



Solution de l'auteur

Supposons d'abord a, b et c positifs. Le volume de la pyramide OABC est égal à $\frac{1}{3}OH \times S = \frac{S}{3}$ mais aussi à $OC \times \frac{1}{3}\frac{OA \times OB}{2} = \frac{abc}{6}$. Par conséquent, $S = \frac{abc}{2}$. Recherchons l'équation du plan ABC. Un point M(x ; y ; z) appartient à ce plan si et seulement si $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$
c'est-à-dire :

$$(x - u)u + (y - v)v + (z - w)w = 0$$

ou encore :

$$xu + yv + zw = 1 \quad \text{(puisque } u^2 + v^2 + w^2 = 1\text{)}$$

Or A appartient à ce plan, donc au = 1 ; de même, bv = 1 et cw = 1.
En résumé :

$$S = \frac{abc}{2} \qquad u = \frac{1}{a} \quad v = \frac{1}{b} \quad w = \frac{1}{c}$$

Dans les autres cas (un, deux ou trois des nombres a, b et c négatifs) on obtiendrait les mêmes résultats, au signe près.

125-4 *Proposé par Frédéric de Ligt :*

Amusette, gentille amusette

Placer tous les chiffres de 0 à 9, chacun pris une seule fois, de façon à rendre juste l'addition ci-dessous :

				*
+			*	*
+		*	*	*
+	*	*	*	*
	9	9	9	9

Solution de l'auteur
Voilà une des solutions possibles

				8
+			3	6
+		7	0	1
+	9	2	5	4
	9	9	9	9