Ru – Bri – COL⌐AGE

Frédéric de Ligt

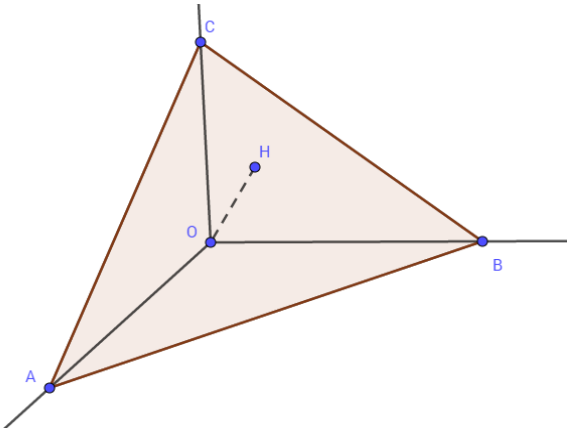
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

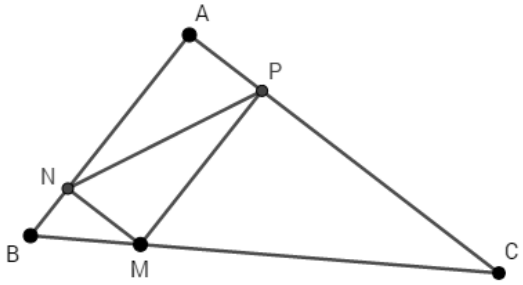
125-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Par rapport à un repère orthonormé d'origine O, on considère les trois points :
A(a ; 0 ; 0), B(0 ; b ; 0) et C(0 ; 0 ; c).
Le plan (ABC) est perpendiculaire en H à la sphère de centre O et de rayon 1. Comment s'expriment l'aire S du triangle ABC et les coordonnées u, v et w de H, en fonction de a, b et c ?



125-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Soit un triangle ABC et M un point du côté [BC]. N et P sont les points des côtés [AB] et [AC] respectivement tels que MNAP soit un parallélogramme. Déterminer M afin que la longueur NP soit minimale.



125-3 *proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Résoudre dans **R** l'équation : $x^{x^{x^{\cdots}}} = 2$.

(Le sens de cette écriture est à prendre de la façon suivante : $x^{x^x} = x^{(x^x)}$ et l'exponentiation est répétée indéfiniment).

125-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Amusette, gentille amusette

Placer tous les chiffres de 0 à 9, chacun pris une seule fois, de façon à rendre juste l'addition ci-dessous :

				*
+			*	*
+		*	*	*
+	*	*	*	*
	9	9	9	9

Des solutions

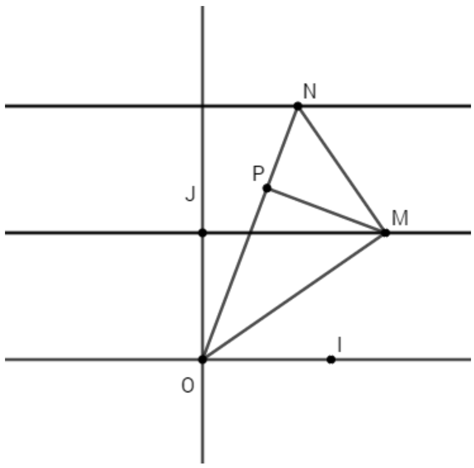
119-2 *Proposé par Jacques Chayé :*

Strophoïde droite

Soient D_1 la droite d'équation $y = 1$ et D_2 la droite d'équation $y = 2$ par rapport à un repère orthonormé (O, I, J). M est un point variable de D_1 et N un point variable de D_2. P est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OMN.

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MO})$ est l'angle droit direct.

Quel est l'ensemble décrit par P quand M décrit D_1 ?



Solution de l'auteur

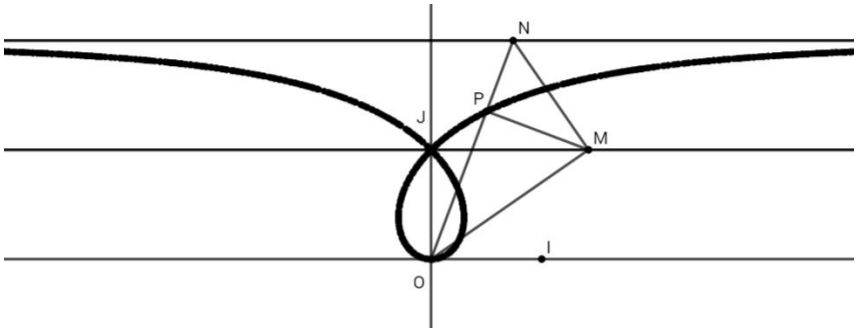
Soit Q le point d'intersection des droites (OI) et (MN). Le triangle OQN est isocèle car (OM) est hauteur et médiane ; elle est donc aussi bissectrice. Soit u l'abscisse de M, le coefficient directeur de (OM) est 1/u, celui de (ON) est alors : $\tan\left(2arctan\frac{1}{u}\right) = \frac{2\tan(\arctan\frac{1}{u})}{1-tan^2(arctan\frac{1}{u})} = \frac{\frac{2}{u}}{1-\frac{1}{u^2}} = \frac{2u}{u^2-1}$.

(ON) admet donc l'équation : $y = \frac{2u}{u^2-1}x$.

(MP) a pour coefficient directeur $\frac{1-u^2}{2u}$ et pour équation $y - 1 = \frac{1-u^2}{2u}(x-u)$.

L'abscisse x de P vérifie donc $\frac{2u}{u^2-1}x = 1 + \frac{1-u^2}{2u}(x-u)$ c'est-à-dire $x\left(\frac{2u}{u^2-1} - \frac{1-u^2}{2u}\right) = \frac{1+u^2}{2}$ ou encore $x = \frac{u^3-u}{u^2+1}$. L'ordonnée de P vérifie alors $y = \frac{2u^2}{u^2+1}$.

En résumé, le lieu de P admet la représentation paramétrique : $x = \frac{u^3-u}{u^2+1}$ et $y = \frac{2u^2}{u^2+1}$.



Autres présentations

I) Soient R et S les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur D_2. On a MS = MR = MP. Le cercle de centre M et de rayon 1 passe par R, S et P et la droite (ON) est tangente à ce cercle en P. D'où une autre manière de décrire la courbe obtenue plus haut.

C'est le lieu des points de contact d'un cercle variable centré sur D_1 et de rayon 1 avec la tangente issue de O et distincte de l'axe des abscisses.

II) On a $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{MS}$ donc (JS)//(OM) et alors (JS) est perpendiculaire à (MN). Mais comme (PS) est perpendiculaire à (MN) (axe de symétrie dans le quadrilatère MPNS), on en déduit que les points J, P et S sont alignés et que (JP) // (OM).
Or $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = 2(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ donc $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = 2(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{JP})$, d'où la conclusion :

P est le point d'intersection de deux demi-droites pivotant, l'une autour de O, l'autre autour de J, la première tournant deux fois plus vite que la deuxième.

122-1 *Proposé par Chika Ofili (Nigéria) :*

392 est divisible par 7 car 39 + 2 x 5 = 49 et 49 est divisible par 7.
1673 est divisible par 7 car 167 + 3 x 5 = 182 est divisible par 7 en effet 18 + 2 x 5 = 28 est divisible par 7.
Pourriez-vous justifier ce critère de divisibilité par 7 ?

Solution de Hugues Biratelle
Soient *n* un entier naturel et *u* le chiffre des unités de *n*. On considère l'entier $m = (n - u)/10 + 5u$. Alors *n* est divisible par 7 si et seulement si *m* est divisible par 7.
Démonstration
Puisque $m = (n - u)/10 + 5u$, on a $n = 10(m - 5u) + u = 10m - 49u$ puis $n + 49u = 10m$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
n est divisible par 7 ;
$n \equiv 0$ [7] ;
$n + 49u \equiv 49u$ [7] ;
$n + 49u \equiv 0$ [7] ;
$10m \equiv 0$ [7] ;
$m \equiv 0$ [7] d'après le théorème de Gauss car 7 est premier avec 10 ; *m* est divisible par 7.

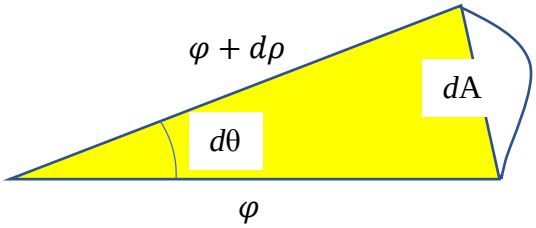
123-4 *proposé par Frédéric de Ligt* :

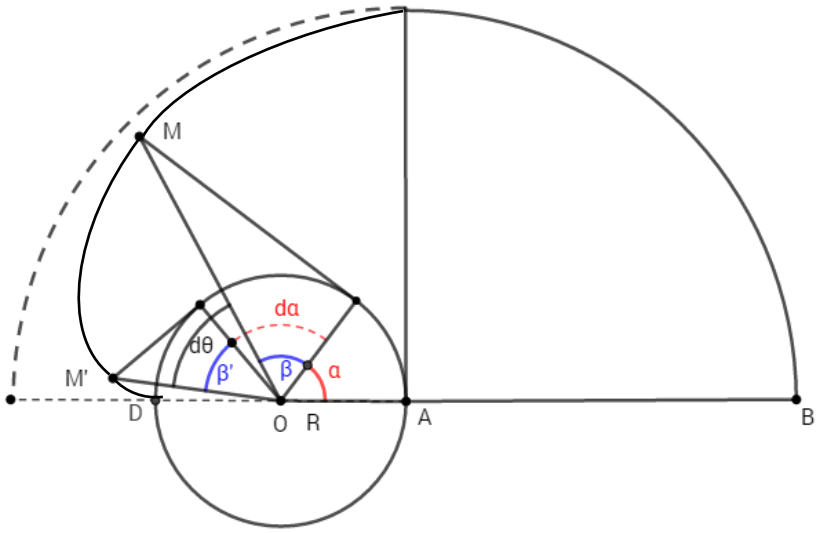
Une chèvre est attachée à un piquet planté le long du mur d'une bergerie dont la base est circulaire. Elle peut brouter autant d'herbe autour de la bergerie que sa longe le lui permet. Si le rayon de la bergerie est de R mètres et la longueur de sa longe de πR mètres, quelle est alors la superficie de terrain que cette brave chèvre peut brouter ?

Solution de l'auteur

Rappel : L'aire dA balayée par un segment de longueur variable passant de la longueur φ à la longueur $\varphi + d\varphi$ en ayant tourné autour d'un point fixe d'un angle de mesure $d\theta$ radian vaut approximativement l'aire du triangle de côtés φ et $\varphi + d\varphi$ et d'angle au sommet $d\theta$:

$$d\text{A} \approx \frac{1}{2}\,\varphi(\varphi + d\varphi)\sin(d\theta) \approx \frac{1}{2}\,\varphi^2 d\theta.$$





AB = πR et $\beta' = \beta + d\beta$.

Avec les notations proposées on a dans notre situation :

$$d\theta = (\beta + d\beta + d\alpha + \alpha) - (\beta + \alpha) = \beta + d\beta - \beta + d\alpha = d\beta + d\alpha.$$

Dans le triangle rectangle d'hypoténuse OM' : $\tan(\beta + d\beta) = \frac{R(\pi - \alpha - d\alpha)}{R} = \pi - \alpha - d\alpha$.

Dans le triangle rectangle d'hypoténuse OM : $\tan(\beta) = \frac{R(\pi-\alpha)}{R} = \pi - \alpha$.

$$\tan(\beta + d\beta) - \tan(\beta) = -d\alpha \ ; \ \frac{\tan(\beta+d\beta)-\tan(\beta)}{d\beta} \approx 1 + tan^2(\beta) \ ;$$

$$d\beta \approx \frac{\tan(\beta+d\beta)-\tan(\beta)}{1+tan^2(\beta)} \approx \frac{-d\alpha}{1+(\pi-\alpha)^2} \ ; \ d\theta = d\beta + d\alpha \approx d\alpha(1 - \frac{1}{1+(\pi-\alpha)^2}) \ ;$$

$$dA \approx \frac{1}{2}OM^2 d\theta \approx \frac{1}{2}(R^2 + R^2(\pi-\alpha)^2)\left(1 - \frac{1}{1+(\pi-\alpha)^2}\right)d\alpha = \frac{1}{2}R^2(\pi-\alpha)^2 d\alpha.$$

D'où finalement :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} R^2(\pi-\alpha)^2 d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} R^2\alpha'^2 d\alpha' = \frac{R^2}{6}\pi^3 \text{ en posant } \alpha' = \pi - \alpha.$$

L'aire finale vaut l'aire du demi-disque de rayon πR plus l'aire balayée par le segment [OM], soit 2A, plus l'aire du triangle isocèle de sommet principal O, de base $2\pi R$ et de hauteur R (aire non balayée par [OM]) moins l'aire du disque de rayon R (la bergerie).

$$\text{Aire finale } = \frac{1}{2}\pi(\pi R)^2 + 2A + \frac{R2\pi R}{2} - \pi R^2 = \frac{R^2\pi^3}{3} + \frac{R^2\pi^3}{2} = \frac{5}{6}R^2\pi^3$$

L'aire cherchée correspond donc aux cinq sixièmes de l'aire du disque de rayon πR (longueur de la longe).

Quelque part sur la toile

Le site pythontutor.com permet d'exécuter un script python en ligne soit directement (mais il y a plein d'autres outils plus simples pour cela), soit pas à pas en visualisant à chaque ligne la variable modifiée, la condition testée…

Sur https://jeux2maths.fr vous trouverez près d'une trentaine de jeux de maths (bien sûr) destinés aux élèves du cycle 3 jusqu'au lycée. Tous les thèmes sont abordés, de la numération (FracMily) aux opérations sur les limites (Limitix) en passant par la géométrie euclidienne (Kelpolygoness) ou vectorielle (vectominos). Les fonctions (Trifonc) et la démonstration (Démotron) ne sont pas oubliées. Les jeux sont expliqués clairement en ligne, avec des fiches à imprimer pour la classe. On dirait un cousin des brochures Jeux de l'APMEP.

Le travail à distance a obligé à découvrir de nouvelles pistes pour aborder certaines notions. Je connaissais la légende de Sissa et de l'échiquier pour aborder les suites géométriques. La version chantée, à découvrir ici https://youtu.be/7v4jHU8D0iA, est aussi très intéressante. Et belle !