Petite enquête sur les polyèdres

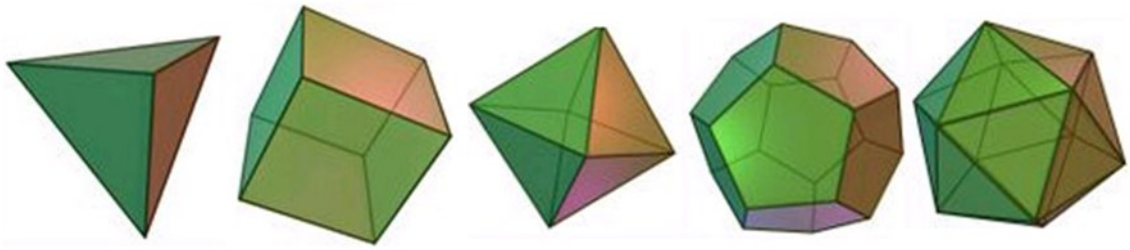
Dominique Gaud, avec l'aide précieuse de Jean-Paul Guichard

Épisode 3 : Suis-je un polyèdre ou bien un monstre ?

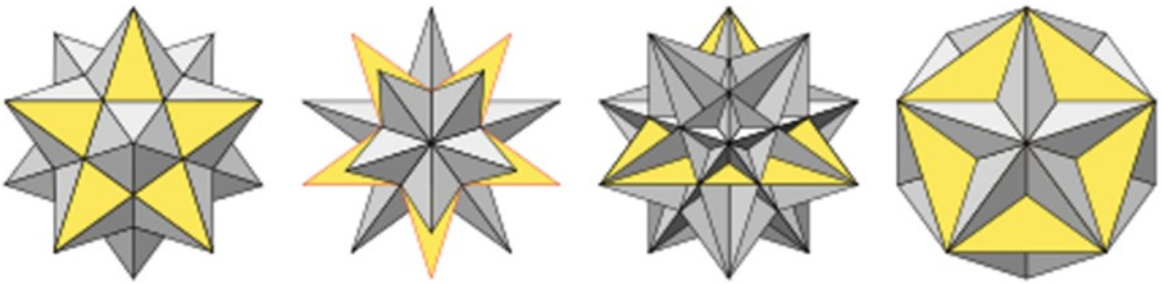
Il est bien connu et admis qu'il n'existe que 9 polyèdres réguliers ainsi que nous l'avons dit dans le premier épisode. Ceci est cependant paradoxal car sait-on vraiment ce qu'est un polyèdre, une face, une arête et un sommet ? Les questionnements de la stella octangula de l'épisode 2 jettent des doutes.

Les solides suivants sont-ils tous des polyèdres ? Sauriez-vous dénombrer les nombres de faces, d'arêtes et de sommets des polyèdres suivants.

1. Petite révision sur les 5 solides de Platon :



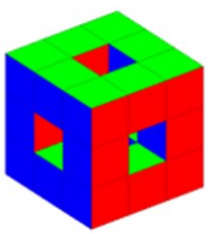
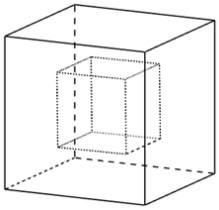
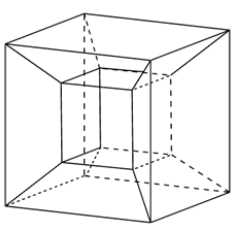
2. Les 4 solides de Kepler-Poinsot :

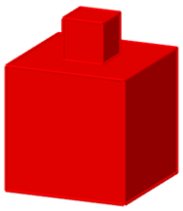


Petit dodécaèdre étoilé — Grand dodécaèdre étoilé — Grand icosaèdre — Grand dodécaèdre.

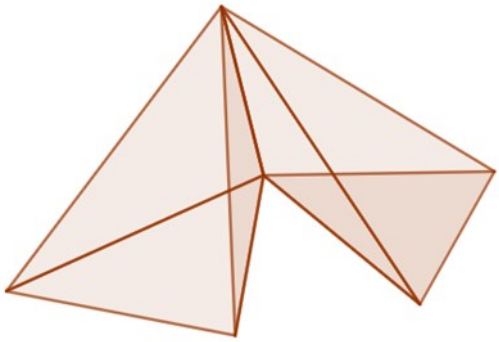
3. Des polyèdres parmi d'autres :

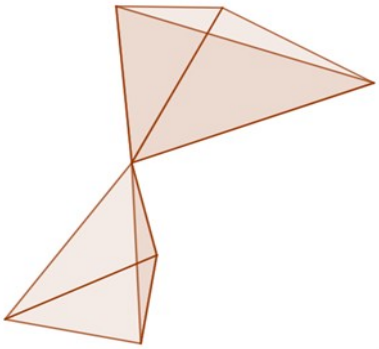
- L'éponge de Menger niveau 1
- Un cube creux , le creux étant un cube.
- « l'arche de la défense » constituée de deux cubes emboités de même centre et dont les faces sont parallèles (hypercube).
- Deux cubes empilés et collés .



4. Deux tétraèdres dont les bases sont dans un même plan et reliés par une arête commune, puis deux tétraèdres ayant un sommet commun :





Mais qu'est-ce qu'un polyèdre ? Si on s'en réfère à Legendre, ces solides sont tous des polyèdres.

Legendre[1] : *on appelle polyèdre tout solide terminé par des plans ou des faces planes* (1801).

Cette définition semble apparaître pour la première fois au XVIII[e] siècle[2]. C'est ainsi qu'Euler les définit, tout comme D'Alembert qui dans sa grande encyclopédie donne comme définition : *un corps compris sous plusieurs faces ou plans rectilignes*. C'est souvent la définition usuelle que l'on donne des polyèdres.

Selon la définition usuelle, il est facile avec un peu de méthode de compter faces, arêtes et sommets à partir des petits polygones qui constituent les solides ci-dessus.

Polyèdre	Sommet	Faces	Arêtes	Commentaire
Tétraèdre régulier	4	4	6	
Cube	8	6	12	
Octaèdre	6	8	12	
Dodécaèdre	20	12	30	
Icosaèdre	12	20	30	
Petit dodécaèdre étoilé	32	60	90	
Grand dodécaèdre étoilé				Laissé au lecteur
Grand icosaèdre				Laissé au lecteur
Grand dodécaèdre				Laissé au lecteur
Éponge de Menger	32	10	40	À vérifier
Cube creux	16	12	16	
Arche	16	18	28	
Cubes empilés	16	11	24	
Tétraèdre siamois arête	8	8	11	
Tétraèdre siamois sommet	7	8	12	

[1] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) mathématicien français

[2] Lakatos, *Preuves et réfutations*, page 19

Comme nous l'avons dit dans l'épisode 2, Poinsot pour les polyèdres réguliers étoilés est obligé de préciser ce qu'il entend par face :

> *comme un même polyèdre peut paraître construit sous tels ou tels polygones, je prendrai pour les faces, les plans qui, en plus petit nombre, achèvent complètement ce même polyèdre.*

C'est ainsi que le petit dodécaèdre étoilé possède 12 faces qui sont des étoiles à 5 branches.

Mais de même que, pour un polygone, Poinsot précise que deux sommets doivent toujours être reliés par une suite d'arêtes, dans un polyèdre, deux arêtes doivent être reliées par une suite de faces (argument de connexité). Ainsi la stella octangula est exclue des polyèdres comme n'étant pas un polyèdre mais comme composé de deux polyèdres.

Le cube creux (comme les cubes empilés) n'est donc pas un polyèdre au sens de la définition de Poinsot car ne répond pas à l'argument de connexité.

De même les tétraèdres siamois par le sommet ne constituent pas un polyèdre au sens de Poinsot.

Polyèdre	Sommet	Faces	Arêtes	Commentaire
Tétraèdre régulier	4	4	6	
Cube	8	6	12	
Octaèdre	6	8	12	
Dodécaèdre	20	12	30	
Icosaèdre	12	20	30	
Petit dodécaèdre étoilé	12	12	30	
Grand dodécaèdre étoilé	20	12	30	
Grand icosaèdre	12	20	30	
Grand dodécaèdre	12	12	30	
Éponge de Menger	32	10	40	À vérifier
Cube creux				Pas un polyèdre
Arche	16	12	28	Des faces sont coplanaires
Cubes empilés				Pas un polyèdre
Tétraèdre siamois arête	8	7	11	Des bases sont coplanaires
Tétraèdre siamois sommet				Pas un polyèdre

Ces exemples ne sont pas choisis au hasard, ils résultent de controverses à propos de la démonstration de la fameuse formule d'Euler-Descartes (s + f = a +2). Ni Legendre, ni Poinsot n'ont imaginé de tels « monstres » tels que les exemples cités en 3 et 4.

La formule sera l'objet du dernier épisode.

Alors faut-il préciser encore ce qu'est un polyèdre ou bien se restreindre aux polyèdres « fréquentables » qui, pour certains mathématiciens du XIX^{e} siècle, seraient ceux qui sont eulériens c'est-à-dire vérifiant la formule d'Euler ?

C'est ce que tentent plusieurs mathématiciens dont De Jonquières[3] qui parle de polyèdres ordinaires ou simples.

Reprenant un article de Lhuilier[4], il exclut des « monstres » c'est-à-dire :

- Les polyèdres qui renferme une cavité intérieure comme le cube creux, car il y a deux polyèdres distincts à savoir deux cubes.
- Les polyèdres annulaires c'est-à-dire ceux qui ont une surface unique mais qui sont traversés par un tunnel comme l'arche de la défense.
- Les polyèdres *qui résultent de l'union de deux autres polyèdres, par deux faces inégales, dont la plus petite se trouve entièrement comprise dans la plus grande…*

Derrière, il y a une représentation mentale des polyèdres simples :

> *Un polyèdre quelconque étant donné, on peut arriver à le détruire complètement par l'ablation de tétraèdres détachés un à un et successivement de l'extérieur du solide.*

Il ajoute :

> *Cette démonstration est facile, et je ne m'y attarde pas.*

Chacun sait, que ce genre de remarque où l'appel à la conviction intime prend le pas sur la démarche logique rend toujours un peu suspecte la démarche de l'auteur.

D'autres, comme Möbius[5], essaient de redéfinir un polyèdre :

> Un système de polygones tel que :
>
> - Deux polygones et deux seulement sont adjacents à chaque arête,
> - Il est possible d'aller de l'intérieur d'un polygone à l'intérieur de n'importe quel autre par un chemin qui ne coupe jamais une arête en un sommet[6].

Le lecteur intéressé pourra vérifier si les polyèdres ci-dessus sont acceptés par Möbius.

Une définition[7] de H. S. M. Coxeter[8] : Un polyèdre est un ensemble fini de polygones tels que tout côté de chacun d'eux appartienne exactement à un autre, avec la restriction qu'aucun sous-ensemble n'ait la même propriété. Les faces ne sont pas restreintes à être convexes, et peuvent entourer leurs centres plus d'une fois… ; de même en un sommet les faces peuvent entourer le sommet plus d'une fois.

Rien n'est simple : pour certains mathématiciens il faut oublier les monstres (cf. De Jonqières) et se contenter des polyèdres « ordinaires ». L'ennui c'est que chacun a ses

[3] Ernest de Jonquières (1820-1901) mathématicien français

[4] Simon Antoine Lhuillier (150-1840) mathématicien suisse

[5] August Ferdinand Möbius (1790-1868) mathématicien allemand

[6] Cité par Lakatos

[7] Citée par http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/start.htm

[8] Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003) mathématicien anglais

monstres et ce ne sont pas les mêmes : selon Hessel[9] , il faut garder ceux qui vérifient la formule d'Euler mais alors sont exclus les polyèdres de Kepler Poinsot si on les admet réguliers ou bien se contenter de polyèdres fréquentables (sans que l'on sache précisément ce que veut dire fréquentable) mais qui suffit dans notre enseignement.

Bien sûr nous pouvons faire le parallèle avec la phase d'Hermite[10] à Stieljes[11] à propos de la découverte de fonctions continues dérivables en aucun point : *je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées*. Et pourtant cette plaie allait conduire aux fractales et à la théorie du chaos.

Il en est de même de la définition des polyèdres et de la recherche des polyèdres « eulériens » qui contribueront à l'avancée de la topologie algébrique.

Faut-il reléguer les monstres ?

À suivre.

Sitographie

http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/rbsm?cc=K__14_b%2A

Coxeter

http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/start.htm

Cauchy

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f15.image

Formule d'Euler Jonquières

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k30663/f121.image.n6

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k30663/f184.image.n5

Lebesgue

http://www.numdam.org/article/BSMF_1924__52__315_1.pdf

[9] Johann Friedrich Christian Hessel (1796-1872) minéralogiste allemand

[10] Charles Hermite (1822-1901) mathématicien français

[11] Thomas Joannes Stieljes (1856-1894) mathématicien néerlandais

Maths et élections

Frédéric de Ligt

Relevé sur Internet : la Poste et la société privée Adrexo se sont réparties la distribution du courrier électoral lors du premier tour des élections régionales et départementales. À cette occasion, elles ont été toutes deux fautives puisque chacune n'a pas distribué 9 % des tracts qu'elles devaient déposer dans les boîtes. C'est donc au total 18 % des tracts qui n'ont pas été remis !