Ru – Bri – COL AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

123-1 *proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Dans une publicité télévisée on voit Henri Leconte déclarer :
« Pendant vingt ans j'ai été en situation d'obésité. En six mois j'ai perdu 15 kg et j'ai retrouvé un IMC normal. »
(https://www.youtube.com/watch?v=mTGeBVvTNUc)

Sur Wikipédia on apprend que Henri Leconte mesure 1,85 m.
La publicité est-elle mensongère ?

123-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Soit (u_n) une suite d'entiers strictement croissante d'entiers naturels. On suppose qu'il existe des réels a et b, $1 \leq a < 2$, $b > 0$ tels que $u_n \leq an + b$ pour tout n.
Montrer que pour tout entier $k > 0$, il existe des entiers i et j tels que $a_i = a_j + k$.

123-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Le Cube Twist d'Eitan.
Peut-être connaissez-vous cet avatar du célèbre Rubik's Cube hongrois où la face supérieure est twistée d'un quart de tour. La boîte d'emballage est cubique.
Quel est le pourcentage de volume occupé par ce cube twisté quand il est dans son emballage ?

123-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

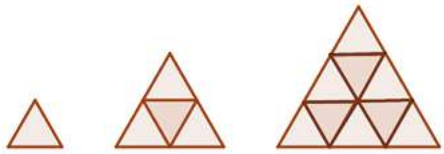
« Où la chèvre est attachée, il faut qu'elle broute ». Guillaume Bouchet

Une chèvre est attachée à un piquet planté le long du mur d'une bergerie dont la base est circulaire. Elle peut brouter autant d'herbe autour de la bergerie que sa longe le lui permet. Si le rayon de la bergerie est de R mètres et la longueur de sa longe de πR mètres, quelle est alors la superficie de terrain que cette brave chèvre peut brouter ?

Solutions

121-1 *proposé par Jacques Chayé*

Combien de triangles ?



Au rang 1 : 1 triangle
Au rang 2 : 5 triangles (4 avec la pointe en haut et 1 avec la pointe en bas)
Au rang 3 : 13 triangles (10 avec la pointe en haut et 3 avec la pointe en bas)

Quelle est le nombre de triangles au rang *n*, avec *n* entier naturel non nul.

Solution de l'auteur

Prenons pour unité de longueur la base du triangle du rang 1.
Nombre H de triangles 'pointe en haut', au rang n :

- de base 1 : 1 + 2 + ... + n = $\binom{n+1}{2}$

- de base 2 : 1 + 2 + ... + (n-1) = $\binom{n}{2}$

...

- de base n : 1 = $\binom{2}{2}$

Soit : H = $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{2}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$

Remarque : dans les formules précédentes, les différents pointillés sous-entendent que n est supérieur à 2 ou 3, mais les résultats restent valables pour n = 1 ou n = 2. Une écriture utilisant le signe ∑ serait plus correcte mais moins parlante.

Nombre B de triangles 'pointe en bas', au rang n : Il faut faire intervenir la parité de n.

Cas où n est pair (n = 2p)

- de base 1 : 1 + 2 + ... + (2p –1) = $\binom{2p}{2}$.

- de base 2 : 1 +2 + ... + (2p – 3) = $\binom{2p-2}{2}$

...

- de base p : 1 = $\binom{2}{2}$

Soit : B = $\binom{2p}{2} + \binom{2p-2}{2} + \ldots\ldots + \binom{2}{2} = \sum_1^p \binom{2k}{2}$

$$B = \sum_1^p (2k-1)k = \sum_1^p 2k^2 - \sum_1^p k = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3} - \frac{p(p+1)}{2} = \frac{4p^3+3p^2-p}{6}$$

ou, exprimé en fonction de n : B = $\frac{2n^3+3n^2-2n}{24}$

TABLEAU DES 20 PREMIÈRES VALEURS

n	H	B	H+B
1	1	0	1
2	4	1	5
3	10	3	13
4	20	7	27
5	35	13	48
6	56	22	78
7	84	34	118
8	120	50	170
9	165	70	235
10	220	95	315
11	286	125	411
12	364	161	525
13	455	203	658
14	560	252	812
15	680	308	988
16	816	372	1188
17	969	444	1413
18	1140	525	1665
19	1330	615	1945
20	1540	715	2255

Cas où n est impair (n = 2p – 1)

- de base 1 : 1 + 2 + ... + (2p –2) = $\binom{2p-1}{2}$
- de base 2 : 1 + 2 + ... + (2p – 4) = $\binom{2p-3}{2}$

...

- de base p – 1 : 3 = $\binom{3}{2}$

Soit : B = $\binom{2p-1}{2}+\binom{2p-3}{2}+\dots\dots+\binom{3}{2} = \sum_2^p \binom{2k-1}{2}$

B = $\sum_2^p (2k-1)(k-1) = \sum_2^p 2k^2 - 3\sum_2^p k + \sum_2^p 1 = 2\sum_1^p k^2 - 2 - \left(3\sum_1^p k - 3\right) + p - 1$

B = $\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{3} - 3\dfrac{p(p+1)}{2} + p = \dfrac{4p^3-3p^2-p}{6}$

ou, exprimé en fonction de n : B = $\dfrac{2n^3+3n^2-2n-3}{24}$

En résumé, le nombre total de triangles est donné par :

· cas où n est pair : H + B = $\dfrac{2n^3+5n^2+2n}{8}$

· cas où n est impair : H + B = $\dfrac{2n^3+5n^2+2n-1}{8}$

Solution de Louis Rivoallan

Comme le suggère à demi-mot l'énoncé, on va distinguer deux suites. n désignant le nombre de petits triangles sur la base, on a la suite u_n pour le nombre de triangles « vers le haut » et v_n le nombre de triangles « vers le bas et $t_n = u_n + v_n$ le nombre total de triangles.

a) **Détermination de u_n.**

$u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 10$.

$u_{n+1} = u_n + (n + 1) + n + \dots + 1 = u_n + (n + 1)(n + 2)/2$

ou encore $u_n - u_{n-1} = n^2/2 + n/2$.

On procède par sommation, et on obtient :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2} = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

b) **détermination de v_n.**

$v_0 = 0$; $v_1 = 0$; $v_2 = 1$; $v_3 = 3$

On va distinguer 2 cas, suivant que n est pair ou impair.

Cas où n pair

Alors on a la relation de récurrence : $v_{2p} = v_{2p-1} + 1 + 3 + \dots + 2p-1 = v_{2p-1} + p^2$.

Cas où n impair

Alors on a la relation de récurrence : $v_{2p+1} = v_{2p} + 2 + 4 + \dots + 2p = v_{2p} + p(p + 1)$

On a donc $v_{2p+1} = v_{2p-1} + p(p + 1) + p^2 = v_{2p-1} + 2p^2 + p$.

En utilisant le procédé classique de sommation :

$$v_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} 2k^2 + k = \frac{1}{3}p(p+1)(2p+1) + \frac{1}{2}p(p+1)$$

et donc $v_{2p} = v_{2p+1} - p(p + 1) = p(p + 1)(2p + 1)/3 - p(p + 1)/2 = p(p + 1)(4p - 1)/6$.

Pour obtenir le nombre total de triangles, on a :
$t_{2p} = u_{2p} + v_{2p} = 2p\ (2p + 1)(2p + 2)/6 + p\ (p + 1)(4p - 1)/6 = p\ (p + 1)(4p + 1)/2$

$t_{2p+1} = u_{2p+1} + v_{2p+1} = (p + 1)(4p^2 + 7p + 2)/2$

122-1 *Proposé par Chika Ofili (Nigéria)* :

392 est divisible par 7 car $39 + 2 \times 5 = 49$ et 49 est divisible par 7.
1673 est divisible par 7 car $167 + 3 \times 5 = 182$ est divisible par 7 en effet $18 + 2 \times 5 = 28$ est divisible par 7.
Pourriez-vous justifier ce critère de divisibilité par 7 ?

Solution de Frédéric de Ligt

Le prix TruLittleHero Awards qui récompense en Angleterre les réalisations ou découvertes de jeunes enfants de moins de 17 ans, a été décerné en 2019 au jeune Chika pour la « découverte » de ce critère de divisibilité par 7 (certains contestent la nouveauté du résultat, mais ce serait quand même une jolie et remarquable redécouverte pour un enfant de cet âge).

Soit N un entier, si a est son chiffre des unités en écriture décimale alors $N = 10k + a$.
Comme 10 et 7 sont premiers entre eux, on a la suite d'égalités modulo 7 :

$10k + a \equiv 10k + a + 49a \equiv 10k + 50a \equiv k + 5a \equiv 0\ [7]$.

On répète cet algorithme jusqu'à obtenir un multiple de 7 reconnaissable.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9 Site :

http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	F. de Ligt	*Éditeur*	APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction	F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon	*Siège social*	Voir adresse ci-dessus
Imprimerie	IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)	*Dépôt légal*	Avril 2021