

Petite enquête sur les polyèdres

Dominique Gaud, avec le concours de Jean Paul Guichard

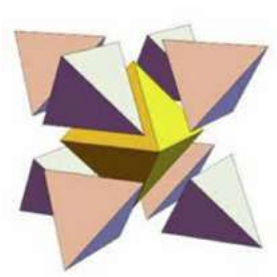
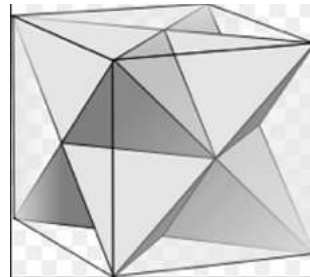
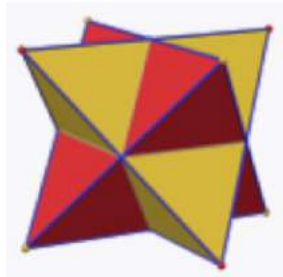
Épisode 2 : Procès en régularité d'un polyèdre

Le plaignant : La **stella octangula** constitué de tétraèdres, 2 grands qui s'intersectent, le jaune et le rouge, ou 8 petits montés sur un octaèdre, 4 jaunes et 4 rouges.

Mais qui est *la plaignante* ? C'est un solide parfait, équilibré, jouissant de belles symétries et dont les parents les plus proches sont le cube et l'octaèdre.

- Je peux être vue comme inscrit dans un cube : tétraèdres réguliers dont les arêtes sont les diagonales de ses faces et dont l'intersection est un octaèdre.

- Je suis aussi une stellation de l'octaèdre de même que le petit dodécaèdre étoilé et le grand dodécaèdre étoilé étaient des stellations respectives du dodécaèdre et de l'icosaèdre (voir épisode 1).



J'apparais dans de nombreux ouvrages décoratifs, preuve de mon importance, comme le montre l'étude faite par Henri Calhiol¹ d'où sont tirées les photos ci-contre.



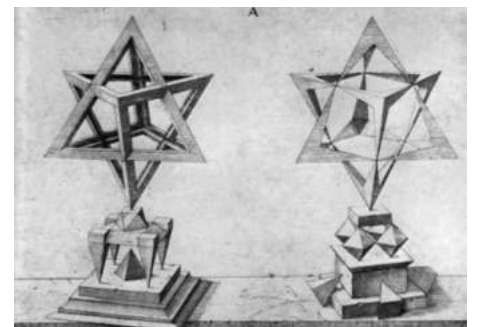
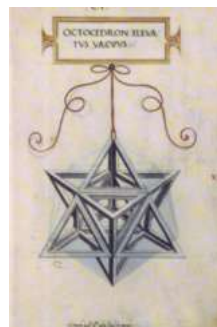
Dans les Pouilles, en Savoie et sur la tombe d'André Breton au cimetière des Batignolles. Et je peux me fractaliser (photo ci-contre).



Mais je suis aussi un symbole ésotérique : la merkaba *utile pour la méditation et le développement personnel et spirituel. Lumière corps et esprit.*

Bien sûr, je figure dans la littérature mathématique de la Renaissance où les polyèdres ont été une source d'inspiration pour les peintres et maquettistes férus de perspective.

Ainsi chez Luca Pacioli ou chez Jamnitzer, contemporain de Dürer, j'apparais alors au milieu des solides platoniciens mais aussi avec de nombreux solides étoilés.



Luca Pacioli, *De la proportion divine* (1498), et Jamnitzer, *Perspectiva Corporum Regularum* (1568)

¹ <http://www.compagnonnage.info/PDF/Henri-Calhiol-Octaedres-etoiles.pdf>

Alors pourquoi intenterais-je un procès en régularité aux mathématiciens ?

- 1- J'aimerais que l'on m'explique une fois pour toutes (explications valables aussi pour d'autres polyèdres étoilés), combien j'ai de faces, combien j'ai d'arêtes et combien j'ai de sommets. Une face est-ce un petit triangle, j'en aurais alors 24, ou bien s'agit-il des grands triangles équilatéraux des deux grands tétraèdres qui se coupent, et j'aurais alors 8 faces ?
- 2- On dit que Kepler a été le premier à m'appeler stella octangula : étoile ! Mais cela reste à voir. Il a bien appelé son petit dodécaèdre étoilé echinus, c'est-à-dire oursin ou hérisson (Kepler devait avoir la tête dans les étoiles). Et, dans son Harmonices Mundi, il l'a présenté comme une stellation du dodécaèdre. De fait, il a consacré un certain nombre de pages de cet ouvrage aux stellations planes, mais a-t-il vu que j'étais une stellation de l'octaèdre ?
- 3- Pourquoi la stellation de l'icosaèdre et du dodécaèdre sont-elles considérées comme des polyèdres réguliers et pas moi ?
- 4- Qui peut me donner la définition de *polyèdre régulier* ?

Nous allons examiner les demandes du requérant et pour cela convoquer des grands noms de l'histoire des mathématiques à la barre.

Les personnalités appelées à témoigner lors de ce procès :

Euclide (III^e siècle avant JC)
Luca Pacioli (1447-1517)
Johannes Kepler (1571-1630)
Adrien Marie Legendre (1752-1833)
Louis Poincaré (1777-1859)
Auguste Cauchy (1789-1857)
Joseph Bertrand (1822-1900)

À la barre Euclide

Je définis dans le onzième livre de ses *Éléments* les 5 solides platoniciens de la manière suivante² :

Un tétraèdre est une figure comprise sous 4 triangles égaux et équilatéraux,

Un cube est un solide construit sous 6 carrés égaux,

Un octaèdre est une figure solide comprise sous 8 triangles égaux et équilatéraux,

Un dodécaèdre est une figure solide comprise sous 12 pentagones égaux, équilatéraux et équiangles.

Un icosaèdre est une figure solide comprise sous 20 triangles égaux et équilatéraux.

Ensuite je construis ces 5 solides, ce qui justifie de fait leur existence.

Dans mon treizième livre, je dis aussi *qu'excepté les cinq figures dont nous venons de parler, on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles.*

Pour cela je procède de la manière suivante, en remarquant qu'il faut au moins 3 polygones réguliers pour avoir un sommet, pour les triangles équilatéraux il en faut 3, 4 ou 5 car à 6 on a un hexagone qui est plan ; pour 3 cela donne le tétraèdre etc. Avec les carrés : il ne peut pas y avoir plus de 3 carrés car 4 carrés en un sommet forment une figure plane. Et ainsi de suite.

Je ne définis pas la notion de polyèdre, ni a fortiori celle de polyèdre régulier.

Quel mathématicien a parlé en premier de *polyèdre ou solide régulier* ? Et dans quelles intentions ? À titre posthume, cela m'intéresse.

² Traduction Peyrard

À la barre Luca Pacioli

Dans mon traité *De la divine proportion*, j'explique, en quoi celle-ci intervient dans les solides platoniciens. Je parle des *corps réguliers*. Et parlant des 5 solides platoniciens, je dis en effet : *...traitant des 5 corps essentiels appelés aussi corps réguliers...*

[Entre nous : ce qui sous-entend que cette dénomination semble assez usitée].

Ma définition des solides réguliers : *toutes les bases soient égales entre elles, d'angles solides et plans égaux et semblablement de côtés égaux.*

[Entre nous : Ce qui est nouveau dans la définition, c'est la notion **d'angle solide** défini par Euclide qui dit³ *Un angle solide est l'inclinaison mutuelle de plus de deux lignes qui se rencontrent, et qui ne sont pas dans une même surface. Autrement : un angle solide est celui qui est compris par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans une même surface, et qui sont construits en un seul point.*

Voici la définition qu'en donnera, 2000 ans plus tard, Legendre (1752-1833) : *l'espace angulaire compris entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point.* (Éléments de géométrie 1794)].

La question de la régularité des solides étoilés m'est étrangère, même si dans mon ouvrage *Divine Proportion* figurent de nombreux polyèdres étoilés, mais il est légitime que notre plaignant se demande s'il répond à ma définition des solides réguliers. La réponse semble être oui.

Stella Octangula : Monsieur Pacioli a-t-il vérifié dans les travaux de Piero della Francesca⁴ ?

À la barre Kepler

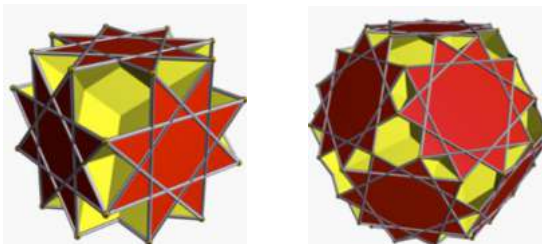
Stella je comprends votre demande, car il est vrai que j'ai ajouté aux 5 solides réguliers de Platon 2 magnifiques étoiles solides : *l'une a 12 angles formés de 5 lignes, et l'autre 20 angles formés de 3 lignes* (voyez l'épisode 1). *La première peut se tenir debout sur 3 de ses angles, et l'autre sur 5 en même temps.* Comment ai-je réussi ce tour de passe-passe ? Il m'a fallu repenser la définition du solide parfait pour qu'elle corresponde à l'idée que je me fais de l'Harmonie du Monde que je construis à partir des mathématiques. Pour moi, *un solide très parfait est un assemblage réalisé uniquement avec des figures identiques, ces figures étant régulières ou semi-régulières. Si la figure utilisée est régulière, je l'appelle un solide régulier, si elle est semi-régulière, je l'appelle semi-régulier.* Mais, me direz-vous, quelle est votre définition d'une figure régulière ? La voici, c'est tout simple : *est régulière une figure qui a tous ses côtés et tous ses angles égaux, les angles étant tournés vers l'extérieur, comme par exemple le carré.* Mais je distingue 2 types de figures régulières : *les figures de base, ou racines, et celles obtenues en prolongeant les côtés des figures de base, qui ne sont pas contigus, jusqu'à leur concours, et que j'appelle les étoiles, le noyau desquelles est une figure de base.*

Donc l'étoile à 5 angles, le pentagramme, fait partie des figures régulières et mes 2 étoiles solides réalisées chacune avec 12 pentagrammes sont donc des solides réguliers (et très parfaits). Et le tour est joué !

Qu'en dites-vous Stella ? Je ne me suis pas intéressé à votre cas, mais il me semble que vous pourriez briguer l'appellation de solide régulier à double titre : 24 faces régulières, ou 8 faces régulières qui s'intersectent comme dans mes 2 étoiles solides. Aux juges de décider !

Je vais vous faire une confidence Stella : à la suite de mes 2 étoiles solides, j'ai conçu un assemblage régulier très parfait avec 6 étoiles à 8 angles : des stellae octangulae ! Peut-être est-ce donc sur une méprise qu'on vous a donné le nom de Stella octangula. Mais cet assemblage, s'il est régulier et très parfait au sens de ma définition je ne l'appelle pas un solide, mais un semi-solide, car il a des trous !

Il est néanmoins réalisé avec 6 étoiles identiques collées par leurs côtés et enfermant un espace. Mais il n'a aucun piquant comme vous : on dirait un cube de Noël, donc rien à voir avec vous ! Et j'ai renouvelé ce tour de force avec 12 étoiles à 10 angles. Voyez le résultat.



³ Traduction Peyrard

⁴ Remarque ironique de notre plaignant vu les accusations de plagiat portés par les historiens à l'encontre de Luca Pacioli qui aurait largement emprunté aux œuvres mathématiques de Piero della Francesca

À la barre Legendre

Dans ma *Géométrie*, je définis les polyèdres comme étant *tout solide terminé par des plans ou des faces planes*. L'intersection commune de deux faces adjacentes d'un polyèdre s'appelle *côté ou arête du polyèdre*. Et les polyèdres réguliers comme des polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles solides sont égaux entre eux. Ces polyèdres sont au nombre de cinq.

Dans ma *Géométrie*, on ne trouve pas trace de polyèdres étoilés. Ce qui n'est pas surprenant car je ne parle pas non plus de polygones étoilés ni de polygones réguliers étoilés. Mais ma *Géométrie* est un manuel suivi par les professeurs pour la préparation aux écoles du gouvernement⁵.

On peut cependant remarquer qu'avec de telles définitions, il est difficile de définir ce qu'est un côté d'un polygone étoilé, ou une face ou une arête d'un polyèdre étoilé. Autrement dit, si mes définitions suffisent à mon propos, elles sont notoirement insuffisantes pour les polyèdres étoilés. Certes dans une de mes dernières éditions de la *Géométrie*, je donne une démonstration de la formule d'Euler mais je n'en parle que pour les polyèdres convexes⁶. Je crains de ne pas vous être d'un grand secours dans ce procès⁷.

À la barre Poincot

Dans mon article, *Mémoires sur les polygones et les polyèdres*, qui date de 1809, je précise beaucoup les notions. Pour parler de polyèdres étoilés, je reviens sur certaines définitions en géométrie plane.

Polygone

Soient m points a, b, c, d, e etc. rangés comme on voudra dans un plan, j'appelle polygone la figure formée par la suite continue des m segments ab, bc , etc. qui joignent ces points deux à deux de manière à ce que la figure soit fermée.

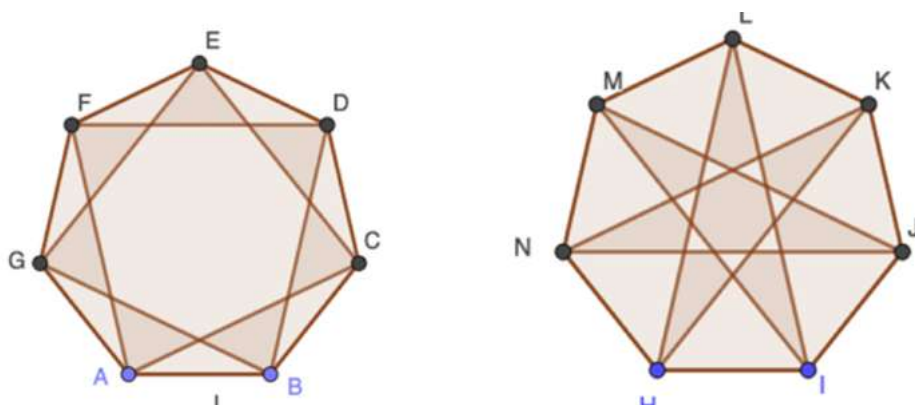
Par cette définition, est exclue l'étoile à 6 branches issue de l'hexagone régulier. On peut reformuler de la manière suivante : deux sommets doivent être reliés par une suite de côtés adjacents (connexité).

Puis je redéfinit la notion de polygone convexe :

Polygone convexe

On appelle ordinairement polygones convexes, les polygones dont le contour ne peut être traversé par une droite en plus de deux points. Mais nous définirons simplement un polygone convexe, celui qui n'a aucun angle rentrant⁸.

Je montre alors qu'étant donné un polygone régulier convexe (selon ma définition) à m sommets, si on joint les sommets de h en h ($h < m$), h étant premier avec m , alors la ligne se refermera et donc définira un nouveau polygone au sens de la définition que j'ai donnée.



À partir d'un polygone régulier convexe on peut construire de cette manière plusieurs polygones étoilés d'espèces différentes qui diffèrent par la valeur de leurs angles (cf. l'heptagone ci-dessus). On peut remarquer que les « noyaux » des polygones étoilés de différentes espèces sont le polygone régulier convexe dont ils sont issus (voir ci-dessus l'heptagone et les deux heptagones étoilés).

⁵ Avertissement de Blanchet dans l'édition de la quinzième édition.

⁶ Cité par Lebesgue : remarques. Sur les deux premières démonstrations de la formule d'Euler.
http://www.numdam.org/article/BSMF_1924__52__315_1.pdf

⁷ Nous reviendrons sur la démonstration de Legendre dans l'épisode 4.

⁸ Ainsi l'étoile à 5 branches est convexe.

Je note qu'il y a autant d'espèces différentes de polygones qu'il y a de nombres h premiers avec m ($h < m$).

Enfin je fais le lien avec les stellations : *on peut dire aussi que ces divers polygones dérivent du polygone dont aurait prolongé les côtés.*

Je passe alors aux polyèdres. Comme pour les polygones, je généralise la notion de *polyèdre convexe* en les définissant comme ayant des angles dièdres convexes c'est-à-dire saillants, puis je définis face et arête : *Je prendrai pour faces, les plans qui en plus petit nombre achèvent complètement ce polyèdre.*

Et je précise que tel polyèdre formé de 60 triangles (petit dodécaèdre étoilé) n'est en fait constitué que de 12 faces.

Les arêtes, ce sont les côtés même qui terminent les faces des solides et par lesquels les faces se terminent deux à deux. C'est à ces seules droites, que se trouvent les angles dièdres du solide, les autres angles que pourraient former les faces en se traversant n'en font pas partie, et de même c'est aux seuls points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les sommets et les angles solides du polyèdre.

De la même manière qu'il y a des polygones de plusieurs espèces, il y a donc des polyèdres de plusieurs espèces.

Stella octangula

Les considérations de Monsieur Poinot sur les polygones montrent que :

- J'ai 8 faces,
- Je ne peux pas être considérée comme un unique polyèdre car deux faces distinctes ne peuvent être jointes par une succession de faces adjacentes. Je suis formée de deux polyèdres.
- Monsieur Poinot, par sa définition des polyèdres, règle mon problème de la régularité : moi, Stella octangula, je ne suis pas un solide régulier. Mais la définition de Poinot (qui n'est pourtant pas un imbécile ! puisqu'il est point sot) est-elle légitime ? Cela mérite d'y revenir dans un prochain épisode.

Poinot

Je dis que l'on peut construire de nouveaux solides parfaitement réguliers, dont plusieurs existent réellement, comme on pourra le voir, ils ont tous leurs faces égales et régulières, également inclinées deux à deux, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet.../... Ils sont convexes suivant cette définition générale, et tous leurs angles dièdres sont au-dessous de deux droits.

Ma démonstration est un peu longue. Messieurs Cauchy et Bertrand en donneront une plus simple ultérieurement.

À la barre Cauchy

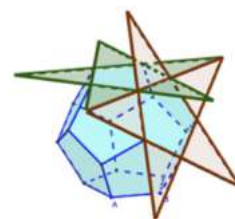
Pour moi, un *polyèdre régulier d'une espèce quelconque* est celui qui est formé par des polygones égaux et réguliers, également inclinés l'un sur l'autre, assemblés en même nombre autour de chaque sommet.

Je reprends l'idée de Monsieur Poinot citée ci-dessus à propos des polygones.

Ainsi il est prouvé que dans un ordre quelconque on ne peut construire de polyèdres réguliers d'espèces supérieures qu'autant qu'ils résultent du prolongement des arêtes ou des faces des polygones réguliers de première espèce qui leur servent de noyaux ; et que dans chaque ordre, les faces des polyèdres d'espèce supérieure doivent avoir le même nombre de côtés que celle des polyèdres de première espèce.

Puis j'examine cas par cas :

- pour le tétraèdre et le cube il n'existe que des polyèdres de première espèce.
- pour l'octaèdre, en prolongeant les faces, on obtient un solide double formé de deux tétraèdres *de la même façon que l'hexagone donne un triangle double.*
- pour le dodécaèdre :
 - o En prolongeant les côtés des douze pentagones, on obtient un dodécaèdre de seconde espèce (le petit dodécaèdre étoilé)



- Chaque face rencontre les 5 plans qui avoisinent la face parallèle opposée, les deux intersections forment des pentagones de première et deuxième espèce et on obtient un dodécaèdre de troisième et quatrième espèce ;



- Procédant de même pour l'icosaèdre, j'obtiens un icosaèdre de sixième espèce

Stella octangula

Si j'en crois Ory Terquem⁹, il est étonnant :

- que Monsieur Poincaré ne fasse aucune allusion à Kepler, si ce n'est par une citation qui semble être reprise d'un autre auteur et non de Kepler lui-même,
- que Kepler ne mentionne pas les autres solides étoilés et j'émet l'hypothèse que Kepler n'en n'avait pas besoin pour sa première cosmologie : *il lui fallait un certain nombre de corps réguliers pas davantage*¹⁰.

Quoi qu'il en soit, si tous les mathématiciens emboîtent les théories de Poincaré, ma requête va être vaine !

À la barre Joseph Bertrand

Je ne mets pas en cause les avancées de Monsieur Poincaré et vais donner une démonstration [1858] plus simple que celle de Poincaré sur l'existence des 9 polyèdres réguliers

En voici les étapes :

- il existe 5 solides réguliers convexes connus depuis l'antiquité.
- un polyèdre régulier, de quelque espèce qu'il soit, a nécessairement les sommets d'un polygone régulier convexe.
- il n'existe que 4 polyèdres d'espèce supérieure : *choisir un sommet sur l'un des polyèdres et chercher s'il existe d'autres sommets qui, réunis à celui-là, puissent former un polygone régulier ; ce polygone est la seule face possible du polyèdre régulier ; ce polygone est la seule face possible du polyèdre d'espèce supérieure ayant les mêmes sommets que le proposé. Le nombre de polygones égaux auxquels peut appartenir un même sommet sera le nombre de faces qui composent un angle solide du nouveau polyèdre*¹¹.
- je passe ensuite en revue les 5 polyèdres de Platon pour dénombrer les polyèdres d'espèce supérieure.

Stella octangula

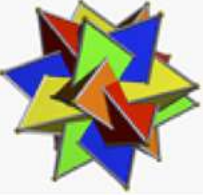
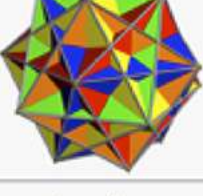
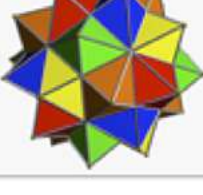
Après ces témoignages, force est de constater que moi, Stella octangula, est exclue des polyèdres réguliers et même des polyèdres suite aux définitions de Monsieur Poincaré. Cela me désole, mais je me console car je suis en bonne compagnie. Il paraît même que je suis un composé polyédrique régulier¹² (donc je suis un peu régulier !) dont voici quelques-uns de mes camarades.

⁹ Ory Terquem (1782-1862) mathématicien français.

¹⁰ Cité par Terquem http://www.numdam.org/article/NAM_1849_1_8_304_1.pdf

¹¹ <http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-3003&M=pagination>

¹² https://fr.wikipedia.org/wiki/Compos%C3%A9_poly%C3%A9drique

Composants	Image	Enveloppe convexe	Noyau	Symétrie	Dual
Composé de deux tétraèdres, ou octaèdre étoilé		Cube	Octaèdre	O_h	Autodual
Composé de cinq tétraèdres (en)		Dodécaèdre	Icosaèdre	I	Jumeau chiral (jumeaux énantiomorphes)
Composé de dix tétraèdres (en)		Dodécaèdre	Icosaèdre	I_h	Autodual
Composé de cinq cubes (en)		Dodécaèdre	Triacontaèdre rhombique	I_h	Composé de cinq octaèdres
Composé de cinq octaèdres (en)		Icosidodécaèdre	Icosaèdre	I_h	Composé de cinq cubes

Mais j'ai toujours des doutes : la définition de *polyèdre* de Monsieur Poincaré est-elle la seule légitime ? Vais-je faire appel ?

Suite au prochain épisode.

Sitographie

Beauté des polyèdres étoilés

<http://www.compagnonnage.info/PDF/Henri-Calhiol-Octaedres-etoiles.pdf>

Articles historiques consultés

Joseph Bertrand

Notes sur la théorie des polyèdres voir page 79 dans le compte rendu de l'académie des sciences.

<http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-3003&M=pagination>

Auguste Cauchy

Premier mémoire sur les polyèdres

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f13>

Second mémoire sur les polyèdres

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f32>

Adrien Legendre

Traité de géométrie

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k202689z/f414.item.r=polygonr%20r%C3%A9gulier>
<https://archive.org/details/lmentsdegomtrie10legegoog/page/n326/mode/2up> (page 370)

Louis Poinot

Mémoire sur les polygones et les polyèdres

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433667x/f18.image.r=journal%20de%20l'%C3%A9cole%20polytechnique>

Turquem

http://www.numdam.org/article/NAM_1849_1_8_304_1.pdf

Sur la visualisation des polyèdres

Octangle étoilé

https://fr.wikipedia.org/wiki/Octangle_%C3%A9toil%C3%A9

Petit dodécaèdre étoiléDodécaedre animé

<https://www.geogebra.org/m/RvWmhZ5s>

Grand dodécaèdre étoilé animé

<https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/AdRE82ma>

Grand dodécaèdre

<https://www.geogebra.org/m/JFRca89j>

Bibliographie :

Formes, espace et symétrie, A Holden, Cedic, 1977

Les œuvres d'Euclide, traduction Peyrard, Blanchard, 1993

Traité de géométrie, Rouche et Camberousse, Gauthiers-Villars, 1922

Preuves et réfutations, I. Lakatos, Hermann, 1984

Divine proportion, Luca Pacioli, Librairie du compagnonnage, 1980