Corol'aire

Avril 2021 n° 123

Invitation au voyage

Frédéric de Ligt

Là, tout n'est qu'ordre et beauté,
Luxe, calme et volupté.
Baudelaire

En ces temps si mornes, je n'ai pas envie de rédiger un édito qui énumère la trop longue liste de ce qui ne va pas pour nos élèves, pour nos collègues ou avec l'Institution. C'est par trop déprimant. Je préfère évoquer ici la formidable ouverture sur un autre monde qui nous est offerte par les mathématiques. Mon message peut ressembler à une proposition d'évasion. C'en est une certainement, mais je la crois utile pour notre santé intérieure. Comme la poésie, à lire ou à écrire, les mathématiques, dans leur grande diversité, offre un champ immense d'exploration, riche d'étonnantes découvertes propres à susciter l'émerveillement et peut-être même l'envie de n'être pas seulement qu'un spectateur ébloui.
Quand le monde extérieur est une prison, les mathématiques libèrent. En tout cas c'est ma thérapie contre la tristesse, la peur, la colère ou la résignation.

Sommaire

Assemblée Générale de la Régionale

La Journée de la Régionale et donc l'Assemblée Générale de la Régionale n'ayant pu avoir lieu, les rapports moral et financier ont été présentés et soumis au vote des adhérents en distanciel pendant la semaine du 1 au 6 février. Ces rapports ont été adoptés à l'unanimité des participants. Ils font le bilan de l'année 2020 et s'arrêtent donc au 1 janvier 2021.

Rapport moral 2019 - 2020 Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Présenté par Frédéric de Ligt, président de la Régionale

Adhérents

La Régionale compte 115 adhérents à jour de leur cotisation.

Sources de financement

Les ressources de l'association proviennent de cinq directions. La partie des adhésions que nous reverse le National, la participation au Rallye, la location des expositions, la vente des brochures et les dons.

Expositions

La Régionale dispose de trois expositions itinérantes « Comment tu comptes ? », « Courbes » et « Maths et puzzles », réalisées en partenariat avec l'Espace Mendès France de Poitiers, l'IREM de Poitiers et pour la dernière avec l'AGEEM. Ces expositions sont disponibles à la location pour les établissements scolaires de l'académie pour un tarif de 90 € par semaine. Elles sont régulièrement empruntées. Une quatrième exposition, « Maths et mesure », toujours réalisée avec nos trois partenaires a été inaugurée le 20 janvier 2020 et est actuellement installée à l'Espace Mendès France de Poitiers mais n'a pas encore été dupliquée et ne peut donc pas encore circuler dans les établissements de l'académie.

Journée de la Régionale

La onzième Journée de la Régionale, inscrite au PAF, devait se dérouler le mercredi 18 novembre 2020 à l'Espace Mendès France de Poitiers autour de la nouvelle exposition « Maths et mesure », réalisée par notre association. Les professeurs des écoles de l'académie avaient la possibilité de participer à cette journée de formation. 37 stagiaires s'étaient inscrits. Les mesures sanitaires n'ont pas permis la tenue de cette journée qui en définitive a été annulée.

Rallye Mathématiques de Poitou-Charentes

5746 élèves de 224 classes appartenant à 8 lycées, 35 collèges et 6 écoles ont participé en 2020 au Rallye qui s'est déroulé le jeudi 12 mars 2020. Le thème choisi était celui de Léonard de Vinci. La participation est en baisse, ce qui s'explique sans doute par les nombreuses charges de travail qui se sont accumulées ces dernières années sur les épaules des collègues. La remise des prix n'a pas pu se dérouler en présence des élèves et les prix ont été acheminés dans les établissements des classes lauréates.

Corol'aire

Il a continué à paraître régulièrement à raison de quatre numéros par an. Il est envoyé en version électronique aux adhérents.

Site de la Régionale

Son responsable est Jacques Germain qui le tient régulièrement à jour. Toutes les actions de l'Association y sont présentées.

Lien avec le National

Frédéric de Ligt est représentant de la Régionale au Comité National de l'APMEP et Pierre-Jean Robin est aussi présent dans ce comité en tant que personnalité indépendante. Plusieurs autres membres du Comité de la Régionale travaillent aussi avec le National tels Nathalie Chevalarias ou Jean Fromentin.

Partenariats

Avec l'IREM de Poitiers la collaboration est étroite, puisque c'est cet institut qui héberge notre siège social. Avec les IPR les relations sont cordiales. Ainsi nos annonces sont diffusées sur le site académique et sur la liste de diffusion académique des enseignants de mathématiques. Le Rectorat nous aide dans la diffusion aux établissements des documents du Rallye et a participé aux frais de déplacements des membres organisateurs du Rallye en activité. La Journée de la Régionale, même si elle n'a pu avoir lieu, avait pu être inscrite au PAF.

Journées Nationales 2022

Pour cause de covid, les Journées Nationales de Bourges ont été reportées d'un an et par conséquent celles de Jonzac sont programmées pour octobre 2022. Bref la Régionale n'est pas à la traine sur ce dossier. Le lycée ainsi que le centre de congrès de Jonzac ont renouvelé leurs offres pour 2022. L'affiche et une vidéo de présentation sont en voie de finalisation.

Perspective 2021

Adhésions

Il faudrait faire remonter le nombre des adhérents. La perspective des Journées Nationales peut être un moteur. Nos différentes actions en faveur du primaire peuvent être un moyen de sensibiliser les PE à notre Association. Il faut aussi présenter l'APMEP aux stagiaires pour leur apprendre notre existence et leur faire découvrir nos actions.

Site de la Régionale

Il va falloir faire migrer le site sans rien perdre des informations contenues dans l'actuel.

Rallye Mathématique

La prochaine édition du Rallye se déroulera le mardi 9 mars 2021. Le thème choisi est celui associé à l'exposition « Maths & mesure ». En amont, il s'agira, entre autres, de collecter diverses informations de nature scientifique sur ce thème. Toutes les épreuves, du collège et du lycée, se dérouleront sur 1 h. L'allègement de la préparation pour la partie thème a reçu un accueil favorable auprès des collègues. Une remise des prix est toujours prévue si les conditions sanitaires le permettent.

Préparation des Journées Nationales à Jonzac

L'année qui arrive va se concentrer plus particulièrement sur la recherche de conférenciers, de subventions et la communication. Des commissions ayant chacune en charge un pôle particulier vont se monter et progressivement s'étoffer.

Rapport financier 2019 - 2020 Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Présenté par Jean-Marie Parnaudeau, trésorier de la Régionale

Après la présentation détaillée des dépenses et des recettes dans les différentes rubriques, le bilan comptable s'avère positif de près de 140 €.

L'année 2020 a été particulière ; si la structure du budget est la même que les années précédentes, les sommes sont radicalement différentes. Juste un exemple, les déplacements pour le Rallye ont fortement diminué, par contre les frais de courrier/papeterie ont augmenté.

Le budget ne tient pas compte d'un élément fondamental pour la vie de la Régionale, à savoir l'implication de ses membres, en particulier ceux de l'équipe du Rallye qui ont fait preuve de beaucoup de capacités d'adaptation face à des situations pour le moins inédites. Habituellement cette implication est chiffrée à 15 000 euros.
Si le Rallye 2020 a été fortement modifié, il en est de même pour le Rallye 2021 (NDLR : voir l'article correspondant). C'est pourquoi nos partenaires habituels ne seront pas sollicités pour l'édition 2021.

Comité de la Régionale

Ce Comité s'est tenu en visio-réunion le 14 mars 2021.

Élection du bureau

Frédéric de Ligt à la présidence.
Corinne Parcelier et Philippe Rogeon aux postes de vice-président.es
Thierry Bacle au secrétariat, qui succède à Pierre-Jean Robin
Jean-Marie Parnaudeau au poste de trésorier
Jacques Germain reste trésorier adjoint

Rallye Mathématique 2021

Nous avons cette année 99 classes inscrites au Rallye soit environ 2600 élèves essentiellement de niveau collège (dont 1/3 en $6^{\text{ème}}$). C'est moitié moins que l'an passé qui était déjà une année creuse.

Nous avons souhaité maintenir une épreuve, malgré des conditions de travail difficiles, afin de maintenir le lien avec les collègues, en espérant des jours meilleurs.

Concernant l'attribution de lots, ceux-ci permettraient de valoriser l'investissement des élèves et des collègues. Cependant, avec la forme de notre épreuve finale, et le nombre de classes inscrites, nous n'établirons pas de palmarès. En effet, avec les modalités laissées à l'appréciation des collègues et la difficile mise en place de la passation, on ne peut pas mettre les classes en concurrence.

Le Comité décide d'offrir un lot à chaque élève. En lien avec la partie thème, nous pensons à un mètre ruban gradué en cm et en pouce avec le logo du Rallye (si possible en vert sur fond blanc).

La commande de cet objet en 2600 exemplaires reviendrait à 1600 € auquel il faudra ajouter 400 euros de frais d'envoi aux 20 établissements participants, soit un budget de 2000 euros maximum. Après l'avis de Jean Marie Parnaudeau, notre trésorier qui acte les économies réalisées sur les frais de déplacement, le Comité décide l'achat de ce lot à l'unanimité. Il souhaite ainsi valoriser les classes qui auront maintenu leur participation et espère conserver un vivier de participant-es.

Journée de la Régionale

La journée de la Régionale 2020 ayant été annulée, nous proposons de reprendre la même organisation que celle qui était prévue pour 2021.

Elle aura donc lieu à Poitiers ; cependant, il faut s'assurer que l'exposition « Maths & mesure » soit toujours visible à l'EMF. Dans le cas contraire, on pourrait utiliser la version itinérante pour laquelle Dominique Gaud, Jean Marie Parnaudeau et Jacques Germain ont quasiment terminé l'acquisition du matériel. En fonction de cette décision, elle se déroulerait soit sur le site de l'EMF, soit sur le site de l'université de Poitiers.

Pour le choix de la date, nous débattons de nouveau sur la venue des professeur-es des écoles. Si nous voulons réussir à accueillir des collègues du premier degré l'an prochain, il nous faut prendre contact avec les IEN du secteur et réussir à inscrire cette journée dans le cadre de la formation obligatoire des professeur-es des écoles.

On peut également faire appel aux Groupes d'Accompagnement pour les Mathématiques (GAM), à nos relations étroites avec l'AGEEM qui a participé à l'élaboration l'exposition « Maths & puzzle », solliciter nos contacts à l'INSPE même si la formation en master MEEF est très lourde et si la réforme de la formation des enseignants est pleine d'incertitude.

Finalement, nous plaçons la Journée de la Régionale le mercredi 17 novembre 2021. Il faudra réserver les locaux dès que nous saurons à quel endroit elle aura lieu dans Poitiers et faire inscrire la Journée au PAF pour le 1^{er} et le 2^{nd} degré.

Dominique Gaud a participé à la première réunion (virtuelle) de mise en place de la fête de la science 2021. Nous espérons que nous pourrons obtenir à nouveau une subvention.

Corol'aire

Avec les conditions difficiles liées à la pandémie, le numéro de décembre 2020 n'a pas pu paraître. Il sortira début avril. Avec ce décalage et pour en publier 4 dans l'année, nous décidons de rédiger un Corol'aire « Spécial Rallye 2021 ». Il pourra faire office de plaquette de présentation à diffuser largement pour essayer de redynamiser les inscriptions pour l'an prochain.

Expositions

Une seule location sur l'année écoulée. Il faudrait refaire de la publicité dans Corol'aire. On peut également passer un article dans « *Au Fil Des Maths* » mais la location au niveau national est beaucoup plus compliquée en raison des coûts du transport.
Il serait souhaitable de relancer les expositions en premier lieu dans l'académie. On peut notamment profiter de chaque journée de la Régionale pour proposer un atelier sur l'une d'entre elles.

Questions diverses

Le site du National est en rénovation. Frédéric de Ligt a reçu une demande concernant la présentation de notre Régionale. Jacques Germain s'en occupe. Notre site est toujours en attente de migration mais les contacts que nous avons eus pour la réaliser disparaissent les uns après les autres. Thierry Bacle propose qu'en attendant la migration définitive, nous utilisions le nouveau site et mettions un lien de redirection de l'ancien vers le nouveau. Cette proposition est adoptée.

La « ristourne » en argent et en brochures donnée par le National en fonction du nombre d'adhérent-es de notre Régionale est annoncée.

Le site des Journées Nationales à Bourges est actif pour les propositions d'ateliers.

De notre côté, le film de présentation à Bourges des Journées Nationales à Jonzac n'a pas pu être terminé par les étudiants qui en étaient chargés. Il doit être retouché et actualisé. Philippe Rogeon essaie de voir comment le finaliser.

Philippe Rogeon est invité à participer à une table ronde au lycée Aliénor d'Aquitaine sur les maths au lycée en lien avec le supérieur. Il nous tiendra au courant du contenu des échanges.

Hommage

C'est avec une profonde tristesse que nous avons appris le décès, survenu le 22 décembre dernier, de notre collègue et amie **Maryse COMBRADE**.
Nombreux sont les professeurs de mathématiques qui ont eu l'occasion de la rencontrer.
Hormis quelques années passées dans la région Toulousaine, elle a fait toute sa carrière en Charente, au collège de Gond-Pontouvre d'abord, puis au LISA d'Angoulême après une année de transition au lycée Charles de Coulomb.

Particulièrement investie dans son métier, elle a très rapidement participé à la formation des professeurs de Mathématiques de l'académie, tant en formation initiale que continue. Après avoir rejoint le groupe de l'IREM de Poitiers au moment de la création de l'IUFM, elle a poursuivi ses activités de formation : formation continue toujours, ce qui l'a conduit à sillonner inlassablement l'académie de part en part, mais aussi formation à l'épreuve sur dossier des candidats au CAPES de Mathématiques et formation disciplinaire des professeurs stagiaires, formations dont elle assurait la responsabilité avec enthousiasme.
Son engagement était total et sa disponibilité sans limites. Elle donnait sans compter, nombreux sont ceux qui s'en souviennent.
Les animateurs de l'IREM de Poitiers, les membres du Comité de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes et tous les enseignants qui l'ont connue adressent leurs très sincères condoléances à sa famille.

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Groupe Rallye

Une édition bouleversée

Malgré le confinement, le Rallye 2021 a été lancé le 1er décembre dernier. L'équipe a en effet réussi à élaborer dans les temps l'épreuve d'entraînement et, en particulier, à proposer une partie thème riche autour de l'exposition « **Maths & mesure** » présentée à l'Espace Mendès France de Poitiers.

Les échanges se sont tenus à distance, nous obligeant à prendre en main des outils techniques et numériques nous privant malheureusement de la convivialité de nos réunions habituelles.
L'envoi des courriers s'est fait exclusivement par mail et l'épreuve d'entraînement a été publiée sur notre site comme nous le faisons depuis quelques années.

Nous avons ensuite travaillé durant le mois de décembre à la sélection des problèmes qui devaient figurer dans l'épreuve finale prévue initialement le 9 mars 2021.

Les premiers retours nous ont très vite inquiétés. Peu d'inscriptions début janvier et des messages de mise en pause pour cette édition face aux difficultés rencontrées. Certes, la situation sanitaire engendre des obstacles organisationnels (classes partagées ou en alternance, problèmes de distanciation...) mais c'est aussi beaucoup de lassitude qui est exprimée. L'engagement toujours plus important pour faire vivre les mathématiques est largement entamé par des conditions de travail toujours plus difficiles.

Nous nous sommes alors donnés jusqu'à la fin janvier pour nous prononcer, en fonction du nombre de classes inscrites et de l'évolution de la crise sanitaire, sur le maintien, le report ou l'annulation du Rallye Poitou-Charentes 2021.

Finalement, pour tenir compte du travail déjà réalisé sur le thème par les classes engagées, nous avons choisi de maintenir le Rallye mais en modifiant notre épreuve finale. Il s'agissait surtout de proposer une épreuve plus simple à organiser dans les établissements. Nous avons donc présenté une épreuve composée de quatre problèmes communs à tous les niveaux que chaque collègue pouvait organiser comme bon lui semblait. Une seule obligation, s'inscrire et renvoyer le dossier complet avant le 16 mars !

Nous nous sommes engagés à corriger et à distribuer nos habituels flocons mais nous n'établirons pas de palmarès. Nous avons dès lors rendu l'inscription gratuite.

Nous espérons que cette formule aura permis aux participants et participantes de prendre du plaisir à travailler sur le thème « **Maths & Mesure** » et que la partie problème aura activé le goût des mathématiques !

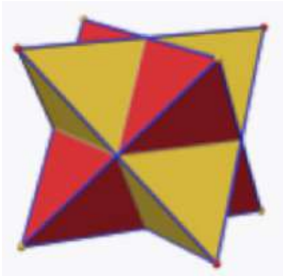
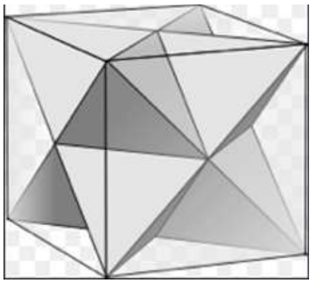
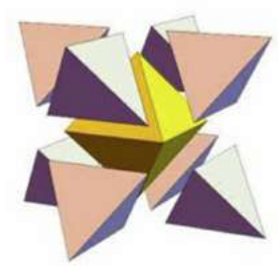
Petite enquête sur les polyèdres

Dominique Gaud, avec le concours de Jean Paul Guichard

Épisode 2 : Procès en régularité d'un polyèdre

Le plaignant : **La stella octangula** constitué de tétraèdres, 2 grands qui s'intersectent, le jaune et le rouge, ou 8 petits montés sur un octaèdre, 4 jaunes et 4 rouges.
Mais qui est *la plaignante* ? C'est un solide parfait, équilibré, jouissant de belles symétries et dont les parents les plus proches sont le cube et l'octaèdre.
- Je peux être vue comme inscrit dans un cube : tétraèdres réguliers dont les arêtes sont les diagonales de ses faces et dont l'intersection est un octaèdre.

- Je suis aussi une stellation de l'octaèdre de même que le petit dodécaèdre étoilé et le grand dodécaèdre étoilé étaient des stellations respectives du dodécaèdre et de l'icosaèdre (voir épisode 1).

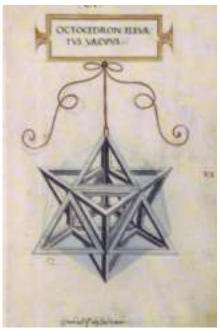
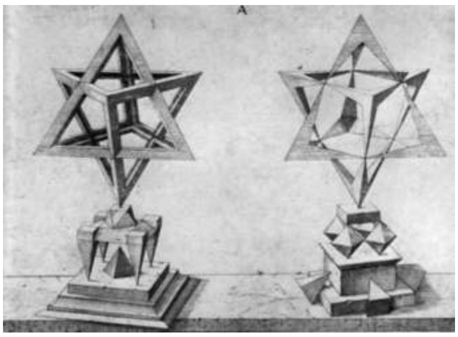
J'apparais dans de nombreux ouvrages décoratifs, preuve de mon importance, comme le montre l'étude faite par Henri Calhiol[1] d'où sont tirées les photos ci-contre.



Dans les Pouilles, en Savoie et sur la tombe d'André Breton au cimetière des Batignolles. Et je peux me fractaliser (photo ci-contre).

Mais je suis aussi un symbole ésotérique : la merkaba *utile pour la méditation et le développement personnel et spirituel. Lumière corps et esprit*.

Bien sûr, je figure dans la littérature mathématique de la Renaissance où les polyèdres ont été une source d'inspiration pour les peintres et maquettistes férus de perspective.
Ainsi chez Luca Pacioli ou chez Jamnitzer, contemporain de Dürer, j'apparais alors au milieu des solides platoniciens mais aussi avec de nombreux solides étoilés.

Luca Pacioli, *De la proportion divine* (1498), et Jamnitzer, *Perspectiva Corporum Regularum* (1568)

[1] http://www.compagnonnage.info/PDF/Henri-Calhiol-Octaedres-etoiles.pdf

Alors pourquoi intenterais-je un procès en régularité aux mathématiciens ?

1- J'aimerais que l'on m'explique une fois pour toutes (explications valables aussi pour d'autres polyèdres étoilés), combien j'ai de faces, combien j'ai d'arêtes et combien j'ai de sommets. Une face est-ce un petit triangle, j'en aurais alors 24, ou bien s'agit-il des grands triangles équilatéraux des deux grands tétraèdres qui se coupent, et j'aurais alors 8 faces ?

2- On dit que Kepler a été le premier à m'appeler stella octangula : étoile ! Mais cela reste à voir. Il a bien appelé son petit dodécaèdre étoilé echinus, c'est-à-dire oursin ou hérisson (Kepler devait avoir la tête dans les étoiles). Et, dans son Harmonices Mundi, il l'a présenté comme une stellation du dodécaèdre. De fait, il a consacré un certain nombre de pages de cet ouvrage aux stellations planes, mais a-t-il vu que j'étais une stellation de l'octaèdre ?

3- Pourquoi la stellation de l'icosaèdre et du dodécaèdre sont-elles considérées comme des polyèdres réguliers et pas moi ?

4- Qui peut me donner la définition de *polyèdre régulier* ?

Nous allons examiner les demandes du requérant et pour cela convoquer des grands noms de l'histoire des mathématiques à la barre.
Les personnalités appelées à témoigner lors de ce procès :

Euclide (III^{e} siècle avant JC)
Luca Pacioli (1447-1517)
Johannes Kepler (1571-1630)
Adrien Marie Legendre (1752-1833)
Louis Poinsot (1777-1859)
Auguste Cauchy (1789-1857)
Joseph Bertrand (1822-1900)

À la barre Euclide

Je définis dans le onzième livre de ses *Éléments* les 5 solides platoniciens de la manière suivante[2] :
Un tétraèdre est une figure comprise sous 4 triangles égaux et équilatéraux,
Un cube est un solide construit sous 6 carrés égaux,
Un octaèdre est une figure solide comprise sous 8 triangles égaux et équilatéraux,
Un dodécaèdre est une figure solide comprise sous 12 pentagones égaux, équilatéraux et équiangles.
Un icosaèdre est une figure solide comprise sous 20 triangles égaux et équilatéraux.

Ensuite je construis ces 5 solides, ce qui justifie de fait leur existence.
Dans mon treizième livre, je dis aussi *qu'excepté les cinq figures dont nous venons de parler, on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles.*
Pour cela je procède de la manière suivante, en remarquant qu'il faut au moins 3 polygones réguliers pour avoir un sommet, pour les triangles équilatéraux il en faut 3, 4 ou 5 car à 6 on a un hexagone qui est plan ; pour 3 cela donne le tétraèdre etc. Avec les carrés : il ne peut pas y avoir plus de 3 carrés car 4 carrés en un sommet forment une figure plane. Et ainsi de suite.
Je ne définis pas la notion de polyèdre, ni a fortiori celle de polyèdre régulier.
Quel mathématicien a parlé en premier de *polyèdre ou solide régulier* ? Et dans quelles intentions ? À titre posthume, cela m'intéresse.

[2] Traduction Peyrard

À la barre Luca Pacioli

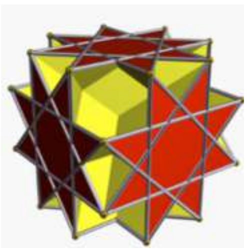
Dans mon traité *De la divine proportion*, j'explique, en quoi celle-ci intervient dans les solides platoniciens. Je parle des *corps réguliers*. Et parlant des 5 solides platoniciens, je dis en effet : *...traitant des 5 corps essentiels appelés aussi corps réguliers...*
[*Entre nous* : ce qui sous-entend que cette dénomination semble assez usitée].
Ma définition des solides réguliers : *toutes les bases soient égales entre elles, d'angles solides et plans égaux et semblablement de côtés égaux*.
[*Entre nous* : Ce qui est nouveau dans la définition, c'est la notion **d'angle solide** défini par Euclide qui dit[3] *Un angle solide est l'inclinaison mutuelle de plus de deux lignes qui se rencontrent, et qui ne sont pas dans une même surface. Autrement : un angle solide est celui qui est compris par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans une même surface, et qui sont construits en un seul point.*
Voici la définition qu'en donnera, 2000 ans plus tard, Legendre (1752-1833) : *l'espace angulaire compris entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point*. (*Eléments de géométrie* 1794)].
La question de la régularité des solides étoilés m'est étrangère, même si dans mon ouvrage *Divine Proportion* figurent de nombreux polyèdres étoilés, mais il est légitime que notre plaignant se demande s'il répond à ma définition des solides réguliers. La réponse semble être oui.

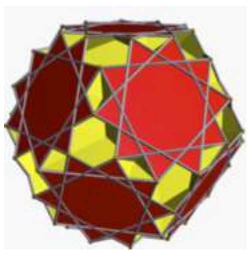
Stella Octangula : Monsieur Pacioli a-t-il vérifié dans les travaux de Pierro della Franscesca[4] ?

À la barre Kepler

Stella je comprends votre demande, car il est vrai que j'ai ajouté aux 5 solides réguliers de Platon 2 magnifiques étoiles solides : *l'une a 12 angles formés de 5 lignes, et l'autre 20 angles formés de 3 lignes* (voyez l'épisode 1). *La première peut se tenir debout sur 3 de ses angles, et l'autre sur 5 en même temps*. Comment ai-je réussi ce tour de passe-passe ? Il m'a fallu repenser la définition du solide parfait pour qu'elle corresponde à l'idée que je me fais de l'Harmonie du Monde que je construis à partir des mathématiques. Pour moi, *un solide très parfait est un assemblage réalisé uniquement avec des figures identiques, ces figures étant régulières ou semi-régulières. Si la figure utilisée est régulière, je l'appelle un solide régulier, si elle est semi-régulière, je l'appelle semi-régulier.* Mais, me direz-vous, quelle est votre définition d'une figure régulière ? La voici, c'est tout simple : *est régulière une figure qui a tous ses côtés et tous ses angles égaux, les angles étant tournés vers l'extérieur, comme par exemple le carré.* Mais je distingue 2 types de figures régulières : *les figures de base, ou racines, et celles obtenues en prolongeant les côtés des figures de base, qui ne sont pas contigus, jusqu'à leur concours, et que j'appelle les étoiles, le noyau desquelles est une figure de base.*
Donc l'étoile à 5 angles, le pentagramme, fait partie des figures régulières et mes 2 étoiles solides réalisées chacune avec 12 pentagrammes sont donc des solides réguliers (et très parfaits). Et le tour est joué !
Qu'en dites-vous Stella ? Je ne me suis pas intéressé à votre cas, mais il me semble que vous pourriez briguer l'appellation de solide régulier à double titre : 24 faces régulières, ou 8 faces régulières qui s'intersectent comme dans mes 2 étoiles solides. Aux juges de décider !
Je vais vous faire une confidence Stella : à la suite de mes 2 étoiles solides, j'ai conçu un assemblage régulier très parfait avec 6 étoiles à 8 angles : des stellae octangulae ! Peut-être est-ce donc sur une méprise qu'on vous a donné le nom de Stella octangula. Mais cet assemblage, s'il est régulier et très parfait au sens de ma définition je ne l'appelle pas un solide, mais un semi-solide, car il a des trous !

Il est néanmoins réalisé avec 6 étoiles identiques collées par leurs côtés et enfermant un espace. Mais il n'a aucun piquant comme vous : on dirait un cube de Noël, donc rien à voir avec vous ! Et j'ai renouvelé ce tour de force avec 12 étoiles à 10 angles. Voyez le résultat.





[3] Traduction Peyrard
[4] Remarque ironique de notre plaignant vu les accusations de plagiat portés par les historiens à l'encontre de Luca Pacioli qui aurait largement emprunté aux œuvres mathématiques de Piero della Franscesca

À la barre Legendre

Dans ma *Géométrie*, je définis les polyèdres comme étant *tout solide terminé par des plans ou des faces planes. L'intersection commune de deux faces adjacentes d'un polyèdre s'appelle côté ou arête du polyèdre. Et l*es polyèdres réguliers *comme des polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles solides sont égaux entre eux. Ces polyèdres sont au nombre de cinq.*

Dans ma *Géométrie*, on ne trouve pas trace de polyèdres étoilés. Ce qui n'est pas surprenant car je ne parle pas non plus de polygones étoilés ni de polygones réguliers étoilés. Mais ma *Géométrie* est un manuel *suivi par les professeurs pour la préparation aux écoles du gouvernement*[5].

On peut cependant remarquer qu'avec de telles définitions, il est difficile de définir ce qu'est un côté d'un polygone étoilé, ou une face ou une arête d'un polyèdre étoilé. Autrement dit, si mes définitions suffisent à mon propos, elles sont notoirement insuffisantes pour les polyèdres étoilés. Certes dans une de mes dernières éditions de la *Géométrie*, je donne une démonstration de la formule d'Euler mais je n'en parle que pour les polyèdres convexes[6]. Je crains de ne pas vous être d'un grand secours dans ce procès[7].

À la barre Poinsot

Dans mon article, *Mémoires sur les polygones et les polyèdres*, qui date de 1809, je précise beaucoup les notions. Pour parler de polyèdres étoilés, je reviens sur certaines définitions en géométrie plane.

Polygone

Soient m points a, b, c, d, e etc. rangés comme on voudra dans un plan, j'appelle polygone la figure formée par la suite continue des m segments ab, bc, etc. qui joignent ces points deux à deux de manière à ce que la figure soit fermée.

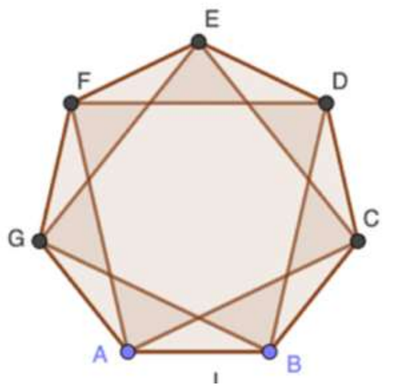
Par cette définition, est exclue l'étoile à 6 branches issue de l'hexagone régulier. On peut reformuler de la manière suivante : deux sommets doivent être reliés par une suite de côtés adjacents (connexité).

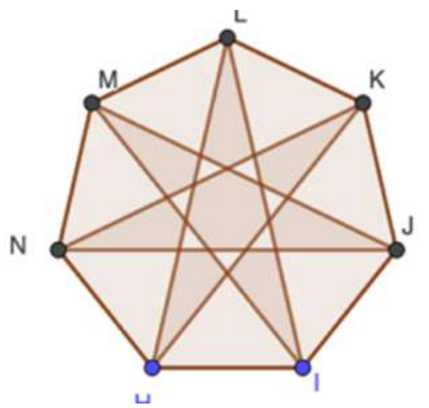
Puis je redéfinis la notion de polygone convexe :

Polygone convexe

On appelle ordinairement polygones convexes, les polygones dont le contour ne peut être traversé par une droite en plus de deux points. Mais nous définirons simplement un polygone convexe, celui qui n'a aucun angle rentrant[8].

Je montre alors qu'étant donné un polygone régulier convexe (selon ma définition) à m sommets, si on joint les sommets de h en h ($h < m$), h étant premier avec m, alors la ligne se refermera et donc définira un nouveau polygone au sens de la définition que j'ai donnée.





À partir d'un polygone régulier convexe on peut construire de cette manière plusieurs polygones étoilés d'espèces différentes qui diffèrent par la valeur de leurs angles (cf. l'heptagone ci-dessus). On peut remarquer que les « noyaux » des polygones étoilés de différentes espèces sont le polygone régulier convexe dont ils sont issus (voir ci-dessus l'heptagone et les deux heptagones étoilés).

[5] Avertissement de Blanchet dans l'édition de la quinzième édition.
[6] Cité par Lebesgue : remarques. Sur les deux premières démonstratiions de la formule d'Euleer. http://www.numdam.org/article/BSMF_1924__52__315_1.pdf

[7] Nous reviendrons sur la démonstation de Legendre dans l'épisode 4.
[8] Ainsi l'étoile à 5 branches est convexe.

Je note qu'il y a autant d'espèces différentes de polygones qu'il y a de nombres h premiers avec m ($h < m$).
Enfin je fais le lien avec les stellations : *on peut dire aussi que ces divers polygones dérivent du polygone dont aurait prolongé les côtés.*
Je passe alors aux polyèdres. Comme pour les polygones, je généralise la notion de *polyèdre convexe* en les définissant comme ayant des angles dièdres convexes c'est-à-dire saillants, puis je définis face et arête : *Je prendrai pour faces, les plans qui en plus petit nombre achèvent complètement ce polyèdre.*
Et je précise que tel polyèdre formé de 60 triangles (petit dodécaèdre étoilé) n'est en fait constitué que de 12 faces.
Les arêtes, ce sont les côtés même qui terminent les faces des solides et par lesquels les faces se terminent deux à deux. C'est à ces seules droites, que se trouvent les angles dièdres du solide, les autres angles que pourraient former les faces en se traversant n'en font pas partie, et de même c'est aux seuls points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les sommets et les angles solides du polyèdre.
De la même manière qu'il y a des polygones de plusieurs espèces, il y a donc des polyèdres de plusieurs espèces.

Stella octangula

Les considérations de Monsieur Poinsot sur les polygones montrent que :

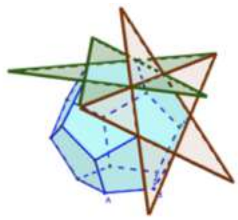
- J'ai 8 faces,
- Je ne peux pas être considérée comme un unique polyèdre car deux faces distinctes ne peuvent être jointes par une succession de faces adjacentes. Je suis formée de deux polyèdres.
- Monsieur Poinsot, par sa définition des polyèdres, règle mon problème de la régularité : moi, Stella octangula, je ne suis pas un solide régulier. Mais la définition de Poinsot (qui n'est pourtant pas un imbécile ! puisqu'il est point sot) est-elle légitime ? Cela mérite d'y revenir dans un prochain épisode.

Poinsot

Je dis que l'on peut construire de nouveaux solides parfaitement réguliers, dont plusieurs existent réellement, comme on pourra le voir, ils ont tous leurs faces égales et régulières, également inclinées deux à deux, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet…/… Ils sont convexes suivant cette définition générale, et tous leurs angles dièdres sont au-dessous de deux droits.
Ma démonstration est un peu longue. Messieurs Cauchy et Bertrand en donneront une plus simple ultérieurement.

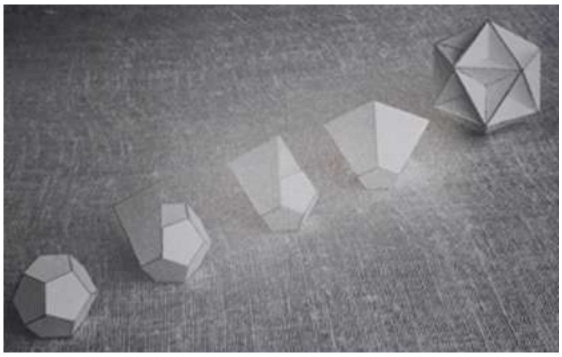
À la barre Cauchy

Pour moi, *un polyèdre régulier d'une espèce quelconque est celui qui est formé par des polygones égaux et réguliers, également inclinés l'un sur l'autre, assemblés en même nombre autour de chaque sommet.*
Je reprends l'idée de Monsieur Poinsot citée ci-dessus à propos des polygones.
Ainsi il est prouvé que dans un ordre quelconque on ne peut construire de polyèdres réguliers d'espèces supérieures qu'autant qu'ils résultent du prolongement des arêtes ou des faces des polygones réguliers de première espèce qui leur servent de noyaux ; et que dans chaque ordre, les faces des polyèdres d'espèce supérieure doivent avoir le même nombre de côtés que celle des polyèdres de première espèce.
Puis j'examine cas par cas :
- pour le tétraèdre et le cube il n'existe que des polyèdres de première espèce.
- pour l'octaèdre, en prolongeant les faces, on obtient un solide double formé de deux tétraèdres *de la même façon que l'hexagone donne un triangle double.*
- pour le dodécaèdre :



  - En prolongeant les côtés des douze pentagones, on obtient un dodécaèdre de seconde espèce (le petit dodécaèdre étoilé)

- Chaque face rencontre les 5 plans qui avoisinent la face parallèle opposée, les deux intersections forment des pentagones de première et deuxième espèce et on obtient un dodécaèdre de troisième et quatrième espèce ;

- Procédant de même pour l'icosaèdre, j'obtiens un icosaèdre de sixième espèce

Stella octangula

Si j'en crois Ory Terquem[9], il est étonnant :
- que Monsieur Poinsot ne fasse aucune allusion à Kepler, si ce n'est par une citation qui semble être reprise d'un autre auteur et non de Kepler lui-même,
- que Kepler ne mentionne pas les autres solides étoilés et j'émets l'hypothèse que Kepler n'en n'avait pas besoin pour sa première cosmologie : *il lui fallait un certain nombre de corps réguliers pas davantage*[10].

Quoi qu'il en soit, si tous les mathématiciens emboitent les théories de Poinsot, ma requête va être vaine !

À la barre Joseph Bertrand

Je ne remets pas en cause les avancées de Monsieur Poinsot et vais donner une démonstration [1858] plus simple que celle de Poinsot sur l'existence des 9 polyèdres réguliers
En voici les étapes :
- il existe 5 solides réguliers convexes connus depuis l'antiquité.
- un polyèdre régulier, de quelque espèce qu'il soit, a nécessairement les sommets d'un polygone régulier convexe.
- il n'existe que 4 polyèdres d'espèce supérieure : *choisir un sommet sur l'un des polyèdres et chercher s'il existe d'autres sommets qui, réunis à celui-là, puissent former un polygone régulier ; ce polygone est la seule face possible du polyèdre régulier ; ce polygone est la seule face possible du polyèdre d'espèce supérieure ayant les mêmes sommets que le proposé. Le nombre de polygones égaux auxquels peut appartenir un même sommet sera le nombre de faces qui composent un angle solide du nouveau polyèdre*[11].
- je passe ensuite en revue les 5 polyèdres de Platon pour dénombrer les polyèdres d'espèce supérieure.

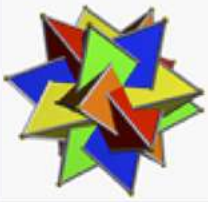
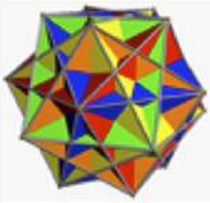
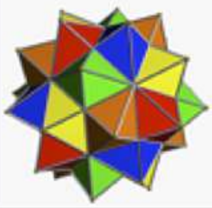
Stella octangula

Après ces témoignages, force est de constater que moi, Stella octangula, est exclue des polyèdres réguliers et même des polyèdres suite aux définitions de Monsieur Poinsot. Cela me désole, mais je me console car je suis en bonne compagnie. Il paraît même que je suis un composé polyédrique régulier[12] (donc je suis un peu régulier !) dont voici quelques-uns de mes camarades.

---

[9] Ory Terquem (1782-1862) mathématicien français.
[10] Cité par Terquem http://www.numdam.org/article/NAM_1849_1_8__304_1.pdf

[11] http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-3003&M=pagination
Page 79
[12] https://fr.wikipedia.org/wiki/Compos%C3%A9_poly%C3%A9drique

Composants	Image	Enveloppe convexe	Noyau	Symétrie	Dual
Composé de deux tétraèdres, ou octangle étoilé		Cube	Octaèdre	O_h	Autodual
Composé de cinq tétraèdres (en)		Dodécaèdre	Icosaèdre	I	Jumeau chiral (jumeaux énantiomorphes)
Composé de dix tétraèdres (en)		Dodécaèdre	Icosaèdre	I_h	Autodual
Composé de cinq cubes (en)		Dodécaèdre	Triacontaèdre rhombique	I_h	Composé de cinq octaèdres
Composé de cinq octaèdres (en)		Icosidodécaèdre	Icosaèdre	I_h	Composé de cinq cubes

Mais j'ai toujours des doutes : la définition de *polyèdre* de Monsieur Poinsot est-elle la seule légitime ? Vais-je faire appel ?

Suite au prochain épisode.

Sitographie

Beauté des polyèdres étoilés
http://www.compagnonnage.info/PDF/Henri-Calhiol-Octaedres-etoiles.pdf

Articles historiques consultés

Joseph Bertrand

Notes sur la théorie des polyèdres voir page 79 dans le compte rendu de l'académie des sciences.
http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-3003&M=pagination

Auguste Cauchy

Premier mémoire sur les polyèdres
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f13
Second mémoire sur les polyèdres
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f32

Adrien Legendre
Traité de géométrie
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k202689z/f414.item.r=polygonr%20r%C3%A9gulier
https://archive.org/details/lmentsdegomtrie10legegoog/page/n326/mode/2up (page 370)

Louis Poinsot
Mémoire sur les polygones et les polyèdres
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433667x/f18.image.r=journal%20de%20l'%C3%A9cole%20polytechnique

Turquem
http://www.numdam.org/article/NAM_1849_1_8__304_1.pdf

Sur la visualisation des polyèdres

Octangle étoilé
https://fr.wikipedia.org/wiki/Octangle_%C3%A9toil%C3%A9

Petit dodécaèdre étoiléDodécaedre animé
https://www.geogebra.org/m/RvWmhZ5s

Grand dodécaèdre étoilé animé
https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/AdRE82ma

Grand dodécaèdre
https://www.geogebra.org/m/JFRca89j

Bibliographie :

Formes, espace et symétrie, A Holden, Cedic, 1977
Les œuvres d'Euclide, traduction Peyrard, Blanchard, 1993
Traité de géométrie, Rouche et Camberousse, Gauthiers-Villars, 1922
Preuves et réfutations, I. Lakatos, Hermann, 1984
Divine proportion, Luca Pacioli, Librairie du compagnonnage, 1980

Ru – Bri – COL AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

123-1 *proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Dans une publicité télévisée on voit Henri Leconte déclarer :
« Pendant vingt ans j'ai été en situation d'obésité. En six mois j'ai perdu 15 kg et j'ai retrouvé un IMC normal. »
(https://www.youtube.com/watch?v=mTGeBVvTNUc)

Sur Wikipédia on apprend que Henri Leconte mesure 1,85 m.
La publicité est-elle mensongère ?

123-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Soit (u_n) une suite d'entiers strictement croissante d'entiers naturels. On suppose qu'il existe des réels a et b, $1 \leq a < 2$, $b > 0$ tels que $u_n \leq an + b$ pour tout n.
Montrer que pour tout entier $k > 0$, il existe des entiers i et j tels que $a_i = a_j + k$.

123-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Le Cube Twist d'Eitan.
Peut-être connaissez-vous cet avatar du célèbre Rubik's Cube hongrois où la face supérieure est twistée d'un quart de tour. La boîte d'emballage est cubique.
Quel est le pourcentage de volume occupé par ce cube twisté quand il est dans son emballage ?

123-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

« Où la chèvre est attachée, il faut qu'elle broute ». Guillaume Bouchet

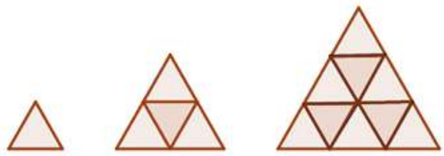
Une chèvre est attachée à un piquet planté le long du mur d'une bergerie dont la base est circulaire. Elle peut brouter autant d'herbe autour de la bergerie que sa longe le lui permet. Si le rayon de la bergerie est de R mètres et la longueur de sa longe de πR mètres, quelle est alors la superficie de terrain que cette brave chèvre peut brouter ?

Solutions

121-1 *proposé par Jacques Chayé*

Combien de triangles ?

Au rang 1 : 1 triangle
Au rang 2 : 5 triangles (4 avec la pointe en haut et 1 avec la pointe en bas)
Au rang 3 : 13 triangles (10 avec la pointe en haut et 3 avec la pointe en bas)



Quelle est le nombre de triangles au rang *n*, avec *n* entier naturel non nul.

Solution de l'auteur

Prenons pour unité de longueur la base du triangle du rang 1.
Nombre H de triangles 'pointe en haut', au rang n :

- de base 1 : 1 + 2 + ... + n = $\binom{n+1}{2}$

- de base 2 : 1 + 2 + ... + (n-1) = $\binom{n}{2}$

...

- de base n : 1 = $\binom{2}{2}$

Soit : H = $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + ... + \binom{2}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$

Remarque : dans les formules précédentes, les différents pointillés sous-entendent que n est supérieur à 2 ou 3, mais les résultats restent valables pour n = 1 ou n = 2. Une écriture utilisant le signe ∑ serait plus correcte mais moins parlante.

Nombre B de triangles 'pointe en bas', au rang n : Il faut faire intervenir la parité de n.

Cas où n est pair (n = 2p)

- de base 1 : 1 + 2 + ... + (2p –1) = $\binom{2p}{2}$.

- de base 2 : 1 +2 + ... + (2p – 3) = $\binom{2p-2}{2}$

...

- de base p : 1 = $\binom{2}{2}$

Soit : B = $\binom{2p}{2} + \binom{2p-2}{2} + ... + \binom{2}{2} = \sum_{1}^{p} \binom{2k}{2}$

$$B = \sum_{1}^{p}(2k-1)k = \sum_{1}^{p} 2k^2 - \sum_{1}^{p} k = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3} - \frac{p(p+1)}{2} = \frac{4p^3+3p^2-p}{6}$$

ou, exprimé en fonction de n : B = $\frac{2n^3+3n^2-2n}{24}$

TABLEAU DES 20 PREMIÈRES VALEURS			
n	H	B	H+B
1	1	0	1
2	4	1	5
3	10	3	13
4	20	7	27
5	35	13	48
6	56	22	78
7	84	34	118
8	120	50	170
9	165	70	235
10	220	95	315
11	286	125	411
12	364	161	525
13	455	203	658
14	560	252	812
15	680	308	988
16	816	372	1188
17	969	444	1413
18	1140	525	1665
19	1330	615	1945
20	1540	715	2255

Cas où n est impair (n = 2p – 1)

- de base 1 : 1 + 2 + ... + (2p –2) = $\binom{2p-1}{2}$
- de base 2 : 1 + 2 + ... + (2p – 4) = $\binom{2p-3}{2}$

...

- de base p – 1 : 3 = $\binom{3}{2}$

Soit : B = $\binom{2p-1}{2}+\binom{2p-3}{2}+\ldots\ldots+\binom{3}{2} = \sum_{2}^{p}\binom{2k-1}{2}$

B = $\sum_{2}^{p}(2k-1)(k-1) = \sum_{2}^{p}2k^2 - 3\sum_{2}^{p}k + \sum_{2}^{p}1 = 2\sum_{1}^{p}k^2 - 2 - \left(3\sum_{1}^{p}k - 3\right) + p - 1$

B = $\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{3} - 3\dfrac{p(p+1)}{2} + p = \dfrac{4p^3 - 3p^2 - p}{6}$

ou, exprimé en fonction de n : B = $\dfrac{2n^3 + 3n^2 - 2n - 3}{24}$

En résumé, le nombre total de triangles est donné par :

· cas où n est pair : H + B = $\dfrac{2n^3 + 5n^2 + 2n}{8}$

· cas où n est impair : H + B = $\dfrac{2n^3 + 5n^2 + 2n - 1}{8}$

Solution de Louis Rivoallan

Comme le suggère à demi-mot l'énoncé, on va distinguer deux suites. n désignant le nombre de petits triangles sur la base, on a la suite u_n pour le nombre de triangles « vers le haut » et v_n le nombre de triangles « vers le bas et $t_n = u_n + v_n$ le nombre total de triangles.

a) **Détermination de u_n.**

$u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 10$.

$u_{n+1} = u_n + (n + 1) + n + \ldots + 1 = u_n + (n + 1)(n + 2)/2$

ou encore $u_n - u_{n-1} = n^2/2 + n/2$.

On procède par sommation, et on obtient :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2} = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

b) **détermination de v_n.**

$v_0 = 0$; $v_1 = 0$; $v_2 = 1$; $v_3 = 3$

On va distinguer 2 cas, suivant que n est pair ou impair.

Cas où n pair

Alors on a la relation de récurrence : $v_{2p} = v_{2p-1} + 1 + 3 + \ldots + 2p-1 = v_{2p-1} + p^2$.

Cas où n impair

Alors on a la relation de récurrence : $v_{2p+1} = v_{2p} + 2 + 4 + \ldots + 2p = v_{2p} + p\,(p + 1)$

On a donc $v_{2p+1} = v_{2p-1} + p\,(p + 1) + p^2 = v_{2p-1} + 2p^2 + p$.

En utilisant le procédé classique de sommation :

$$v_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p}2k^2 + k = \frac{1}{3}p(p+1)(2p+1) + \frac{1}{2}p(p+1)$$

et donc $v_{2p} = v_{2p+1} - p\,(p + 1) = p\,(p + 1)(2p + 1)/3 - p\,(p + 1)/2 = p\,(p + 1)(4p - 1)/6$.

Pour obtenir le nombre total de triangles, on a :
$t_{2p} = u_{2p} + v_{2p} = 2p\ (2p + 1)(2p + 2)/6 + p\ (p + 1)(4p - 1)/6 = p\ (p + 1)(4p + 1)/2$

$t_{2p+1} = u_{2p+1} + v_{2p+1} = (p + 1)(4p^2 + 7p + 2)/2$

122-1 *Proposé par Chika Ofili (Nigéria)* :

392 est divisible par 7 car 39 + 2 × 5 = 49 et 49 est divisible par 7.
1673 est divisible par 7 car 167 + 3 × 5 = 182 est divisible par 7 en effet 18 + 2 × 5 = 28 est divisible par 7.
Pourriez-vous justifier ce critère de divisibilité par 7 ?

Solution de Frédéric de Ligt

Le prix TruLittleHero Awards qui récompense en Angleterre les réalisations ou découvertes de jeunes enfants de moins de 17 ans, a été décerné en 2019 au jeune Chika pour la « découverte » de ce critère de divisibilité par 7 (certains contestent la nouveauté du résultat, mais ce serait quand même une jolie et remarquable redécouverte pour un enfant de cet âge).

Soit N un entier, si a est son chiffre des unités en écriture décimale alors N $= 10k + a$.
Comme 10 et 7 sont premiers entre eux, on a la suite d'égalités modulo 7 :

$10k + a \equiv 10k + a + 49a \equiv 10k + 50a \equiv k + 5a \equiv 0\ [7]$.

On répète cet algorithme jusqu'à obtenir un multiple de 7 reconnaissable.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9 Site :

http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	F. de Ligt	*Éditeur*	APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction	F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon	*Siège social*	Voir adresse ci-dessus
Imprimerie	IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)	*Dépôt légal*	Avril 2021