Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

122-1 *Proposé par Chika Ofili (Nigéria)* :

392 est divisible par 7 car 39 + 2 x 5 = 49 et 49 est divisible par 7.
1673 est divisible par 7 car 167 + 3 x 5 = 182 est divisible par 7 en effet 18 + 2 x 5 = 28 est divisible par 7.
Pourriez-vous justifier ce critère de divisibilité par 7 ?

122-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

En prolongement de l'énoncé 119-3, soit p un entier supérieur ou égal à 2 ; montrer que pour tout entier naturel non nul *n* on a :

$$\left\lfloor \sqrt[p]{n-1}+\sqrt[p]{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[p]{2^p n-1} \right\rfloor$$

122-3 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Il n'existe pas de couple (a ; b) de naturels vérifiant $a^2 = 2b^2$; on peut toutefois rechercher les couples vérifiant $a^2 = 2b^2 + 1$ ou $a^2 = 2b^2 - 1$
Aux U.S.A., quand le nombre d'états est passé de 49 à 50, il a fallu modifier la « bannière étoilée » en passant de 7 lignes de 7 étoiles à 5 lignes de 6 étoiles et 4 lignes de 5 étoiles.

Drapeau américain 1959

Drapeau américain 1960

On remarque que $7^2 + 1 = 2\times5^2$ ou encore que $7^2 = 2\times5^2 - 1$. Ainsi $7^2/5^2 = 2 - 1/5^2$ et $7/5$ apparaît comme une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Des solutions

118-1 *proposé par Jean Fromentin* :

Vous connaissez peut-être le jeu de stratégie « Quarto ». Voici brièvement rappelé ses règles. Sur un plateau carré 4x4, deux joueurs s'affrontent. Chaque pièce possède quatre caractéristiques, haute ou basse, rouge ou jaune, ronde ou carrée, creuse ou pleine. Ces pièces sont donc au nombre de $2^4 = 16$. Le but du jeu est d'être le premier à aligner sur une ligne, une colonne ou une des deux diagonales quatre pièces ayant une caractéristique commune. En manipulant les pièces du jeu on peut faire apparaître des agencements curieux. Ainsi, sur le cliché ci-contre, vous pouvez observer que les pièces ont été disposées de telle sorte que chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales laissent apparaître sur les quatre pièces les quatre caractéristiques, chacune présente deux fois. La question est maintenant la suivante : combien y a-t-il de telles configurations (aux rotations près du plateau) ?

Solution de Frédéric de Ligt

Les entiers de 0 à 15 peuvent s'écrire en numération binaire de 0000 à 1111. On va recenser le nombre de grilles 4x4 qui contiennent sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur les deux diagonales deux 0 et deux 1 pour chaque rang. Cela revient à chercher une certaine catégorie de carrés magiques d'ordre 4. On examinera ensuite la correspondance qui peut être établie entre cette écriture binaire et les pièces du jeu.

En premier lieu on va chercher parmi ces grilles 4x4 celles où 0000 est placé dans la case en haut à gauche

On va pour cela découper ce problème de dénombrement en 3 étapes.

<u>Première étape</u>

On cherche les grilles 4x4 ne contenant que des 0 et des 1, avec un 0 dans la case en haut à gauche, avec deux 0 et deux 1 sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur les deux diagonales.

Elles sont au nombre de huit.

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1

1

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

2

0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0

3

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

4

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

5

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

6

0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1

7

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

8

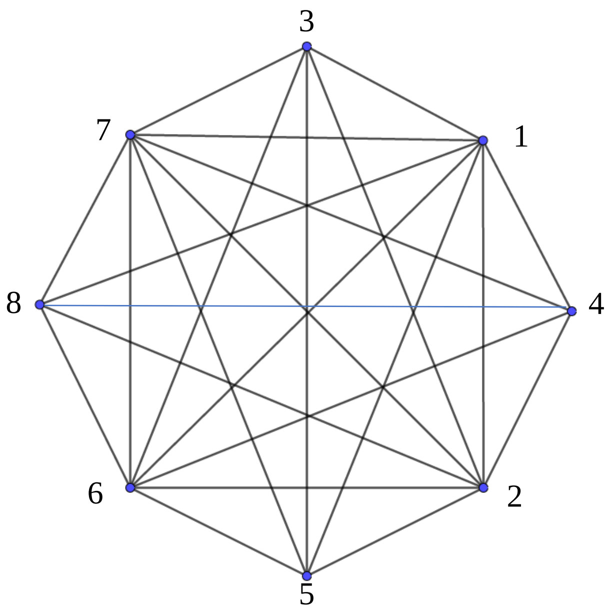
Seconde étape

On considère ensuite tous les couples de grilles et on effectue une concaténation ordonnée, case par case ; on retient les nouvelles grilles qui font apparaître quatre 00, quatre 01, quatre 10 et quatre
11.

On peut résumer le résultat de cette recherche par un graphe dont les sommets représentent ces huit grilles et où les arêtes ne sont pas orientées, ce qui signifie que le rang représenté par une grille peut être échangé avec celui de l'autre grille. Ainsi l'arête qui relie la grille 1 à la grille 2 signifie que les deux grilles ci-dessous sont à retenir. On obtient ainsi 48 grilles 4x4 dont les cases contiennent les nombres 00, 01, 10 et 11.

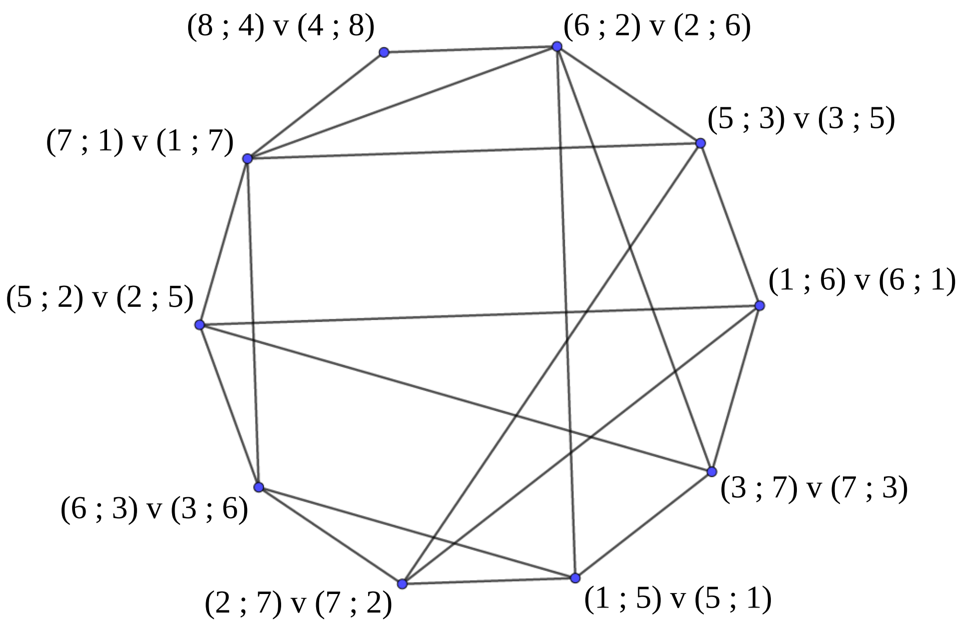
00	01	11	10
11	10	00	01
10	11	01	00
01	00	10	11

00	10	11	01
11	01	00	10
01	11	10	00
10	00	01	11



Troisième étape

On considère ensuite tous les couples de grilles et on effectue une concaténation ordonnée, case par case ; on retient les nouvelles grilles qui font apparaître tous les nombres de 0000 à 1111. (v signifie « ou »).



20 × 8 = 160 solutions

(2 ; 8) v (8 ; 2) (4 ; 6) v (6 ; 4) 8 solutions
(6 ; 8) v (8 ; 6) (4 ; 2) v (2 ; 4) 8 solutions
(1 ; 8) v (8 ; 1) (4 ; 7) v (7 ; 4) 8 solutions
(7 ; 8) v (8 ; 7) (4 ; 1) v (1 ; 4) 8 solutions

(1 ; 2) v (2 ; 1) v (1 ; 3) v (3 ; 1) v (2 ; 3) v (3 ; 2)

72 solutions

(5 ; 6) v (6 ; 5) v (5 ; 7) v (7 ; 5) v (6 ; 7) v (7 ; 6)

Au total on compte 4x8 + 72 + 160 = 264 solutions qui correspondent à des grilles possédant 0000 dans la case en haut à gauche.

En second lieu, pour chaque solution et pour chaque rang on peut changer à loisir tous les 0 en 1 et tous les 1 en 0. Il y a 16 possibilités qui décrivent dans la case en haut à gauche tous les nombres binaires de 0000 à 1111. Une pièce du jeu arbitrairement choisie peut être associée au nombre 0000, on peut décider par exemple que la pièce en haut à gauche du plateau de jeu, présenté dans le cliché de l'énoncé, qui est **dans cet ordre** haute, rouge, ronde et pleine soit associée au nombre 0000.
Ainsi la pièce haute, jaune, carrée et pleine sera associée au nombre 0110, ou bien encore la pièce petite, jaune, ronde et creuse sera associée au nombre 1101. Cela permet d'obtenir les 16 x 264 plateaux de jeu différents qui respectent la contrainte imposée. Si on considère qu'une rotation du plateau ou que son image dans un miroir fournit la même solution, il faut alors diviser par huit ce produit et l'on obtient finalement 2 x 264 = **528 plateaux de jeux** tels que chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales laissent apparaître sur les quatre pièces les quatre caractéristiques, chacune présente deux fois.
On a ainsi mis en évidence une classe de 528 carrés magiques d'ordre 4 parmi les 880 qu'il est possible d'obtenir. Après une brève recherche sur la question je n'ai pas retrouvé ce procédé de construction dans la littérature, mais elle est tellement abondante sur la question que je ne me risquerais pas à prétendre à l'originalité.

119-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que pour tout entier naturel *n* non nul on a $\left\lfloor \sqrt{n\text{-}1}+\sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n-1} \right\rfloor$ où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière du nombre.

Solution de Jean-Christophe Laugier

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \frac{1}{4}$, et $k \in \mathbb{R}$, alors $\lfloor \sqrt{4x-1} \rfloor = k$ ssi $k^2 \leq 4x - 1 < (k+1)^2$.
C'est-à-dire $\frac{k^2+1}{4} \leq x < \frac{(k+1)^2}{4}$. Posons $I_k = \left[\frac{k^2+1}{4} ; \frac{(k+1)^2+1}{4} \right[$; les I_k pour $k \geq 2$, constituent une partition de $\left[\frac{5}{4} ; +\infty \right[$.

On suppose désormais $k \geq 2$. Posons $u(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$. $u(\frac{k^2+1}{4}) = \sqrt{\frac{k^2+1}{4} - 1} + \sqrt{\frac{k^2+1}{4} + 1}$

et compte tenu de l'inégalité $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \sqrt{\frac{a+b}{2}}$ vérifiée pour tous les réels $a,b \geq 0$ distincts, il vient $u(\frac{k^2+1}{4}) < 2\sqrt{\frac{k^2+1}{4}} < k+1$. On peut écrire d'autre part $u(\frac{k^2+1}{4}) = \frac{k}{2}\left[\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}}\right]$ et l'on a $\left[\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}}\right]^2 = 2+\frac{2}{k^2}+2\sqrt{1+\frac{2}{k^2}(1-\frac{7,5}{k^2})}$. Par suite $\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}} > 2$ pour tout $k \geq 3$ et pour $k=2$, $\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}} = 2$. Donc $k \leq u(\frac{k^2+1}{4}) < k+1$ et $k+1 < u(\frac{(k+1)^2+1}{4}) < k+2$ pour $k \geq 2$.

La fonction u est continue et strictement croissante sur chaque I_k. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur $k+1$ est atteinte par u en un point x_0 unique de I_k. La résolution de l'équation $u(x) = k+1$ fournit $x_0 = \frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2}$.

Par conséquent si $x \in \left[\frac{k^2+1}{4};\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2}\right[$ alors $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor = k$.

Si $x \in \left[\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2};\frac{(k+1)^2+1}{4}\right[$ alors $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor+1 = k+1$.

Remarquons que $\left[\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2};\frac{(k+1)^2+1}{4}\right[$ ne contient aucun nombre entier.

Soit à présent $x \in \left[1;\frac{5}{4}\right[\subset I_1$ alors $\sqrt{2} \leq u(x) < 2$ donc $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor = 1$.

<u>Conclusion</u>

L'ensemble des réels $x \geq 1$ tels que $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor$ est égal à :

$$\left[1;\frac{5}{4}\right[\cup \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty}\left[\frac{k^2+1}{4};\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2}\right[\right).$$

Cet ensemble contient tous les entiers naturels non nuls. Sur l'ensemble complémentaire égal à $\bigcup_{k=2}^{+\infty}\left[\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2};\frac{(k+1)^2+1}{4}\right[$ on a l'égalité $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor+1$.

121-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :

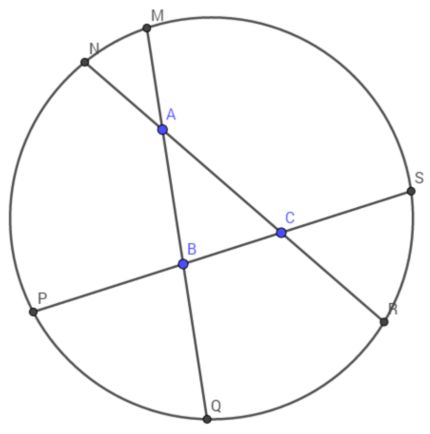
Le grand mathématicien anglais J.H. Conway, récemment disparu, a produit d'innombrables contributions sur les sujets les plus divers, dont une très originale, à la géométrie élémentaire baptisée *Cercle de Conway*, qui fait l'objet du problème suivant :

Soit un triangle ABC, on note a = BC, b = AC, c = AB.
Sur les prolongements de [AB] et de [AC] du côté de A, on place respectivement les points M et N tels que AM = AN = a.

De même sur les prolongements de [BC] et [BA] du côté de B, on place respectivement les points P et Q tels que BP = BQ = b.

Enfin sur les prolongements de [CA] et [CB] du côté de C, on place respectivement les points R et S tels que CR = CS = c.

Montrer que les points M, N, P, Q, R, S sont cocycliques.

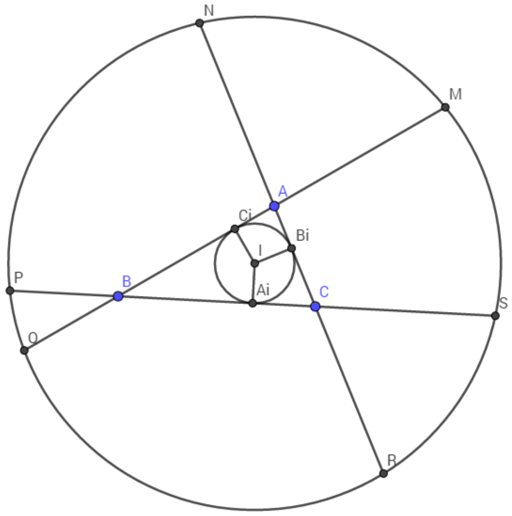


Solution de Louis Rivoallan

Soit un triangle ABC. On note a, b, c les distances respectives BC, CA, AB et p le demi-périmètre. Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures, autrement dit le centre du cercle inscrit de ABC noté $\mathcal{C}$. On note respectivement A_i, B_i, C_i les points de contact du cercle et des cotés [BC], [CA] et [AB]. Si on note r le rayon du cercle, on a donc $r = IA_i = IB_i = IC_i$.

On note $x = BC_i = BA_i$; $y = CA_i = CB_i$ et $z = AC_i = AB_i$.

On a donc $2x + 2y + 2z = 2p$ donc $x + y + z = p$; puisque $a = x + y$; $b = y + z$ et $c = x + z$ on en déduit que $z = p - a$; $x = p - b$ et $y = p - c$.



On construit alors les points M, N, S, R, P, Q.

Par construction AN = a, donc :

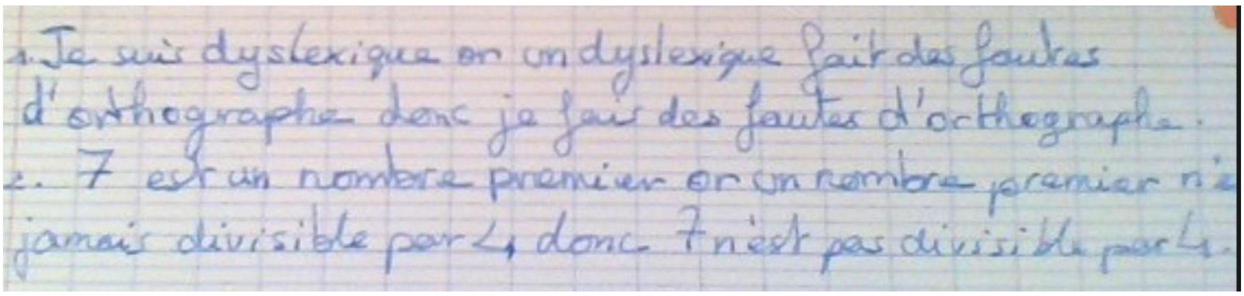
$NB_i = a + z = a + p - a = p$.

De même B_iR, A_iS, A_iP, C_iQ, $C_iM = p$.

Les 6 triangles rectangles IB_iN, IB_iR, IC_iM, IC_iQ, IA_iP, IA_iS ont pour côtés de l'angle droit des segments de longueurs r et p, dont les hypoténuses sont égales à $\sqrt{r^2 + p^2}$. Par suite les six points M, N, S, R, Q, P sont sur un même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{r^2 + p^2}$.

Dyslexique mais pas dyslogique

Trouvé dans une copie d'élève :



1. Je suis dyslexique or un dyslexique fait des fautes d'orthographe donc je fais des fautes d'orthographe.
2. 7 est un nombre premier or un nombre premier n'e jamais divisible par 4, donc 7 n'est pas divisible par 4.