

# Petite enquête sur les polyèdres

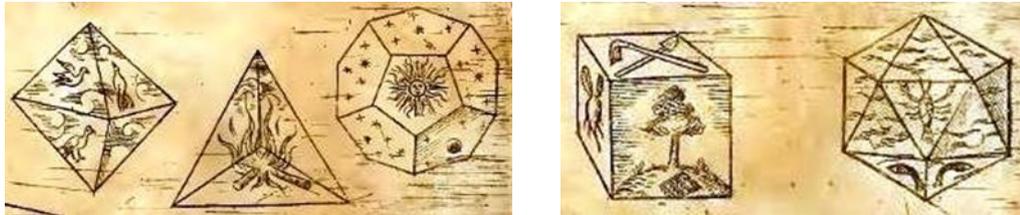
Dominique Gaud, avec l'aide précieuse de Jean-Paul Guichard

## Épisode 1 : Le petit dodécaèdre étoilé de San Marco

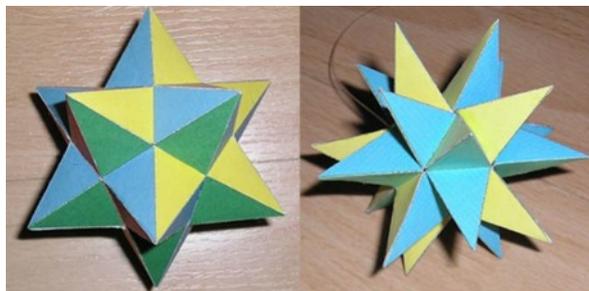
Les 5 polyèdres réguliers convexes sont connus depuis l'antiquité comme le résume [l'article de Wikipedia](#) :

*Il semble que Pythagore lui-même (vers 530 av. J.-C.) ou le pythagoricien Archytas de Tarente (vers 360 av. J.-C.), ait découvert les trois premiers des cinq : le tétraèdre (la pyramide), l'hexaèdre (le cube), le dodécaèdre. Ensuite, Théétète d'Athènes (mort en 395 ou en 369 av. J.-C.) découvrit les deux autres : l'octaèdre et l'icosaèdre. Platon les utilise profondément dans le Timée (55e-56c), qui date de 358 av. J.-C.. Euclide les étudie dans ses Éléments (vers 300 av. J.-C.).*

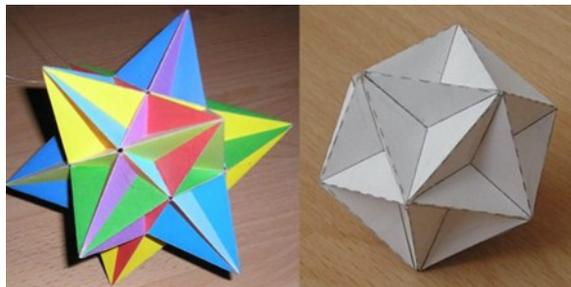
Voici les illustrations parus dans l'ouvrage de Kepler *Hamonices Mundi* (Les sciences de l'harmonie du Monde), Linz, 1619.



Sur la toile, on lit que Kepler y a adjoint en 1619 deux polyèdres réguliers étoilés : le petit dodécaèdre étoilé et le grand dodécaèdre étoilé dont les faces sont des pentagones étoilés.



En 1809 Poinsoot découvre deux autres solides dont les faces sont pour l'un des triangles équilatéraux et pour l'autre des pentagones.



On peut mieux les visualiser avec des animations :

<https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/GMUuwftg>

<https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/AdRE82ma>

<https://www.geogebra.org/m/m56QmF9C>

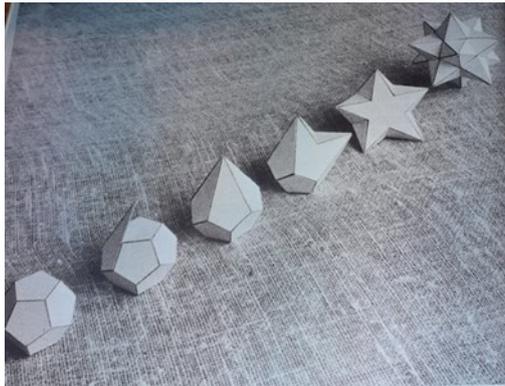
<https://www.geogebra.org/m/JFRca89j>

Pour les fabriquer par origami, consulter le site :

<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~morales/polyedresregulier.htm>

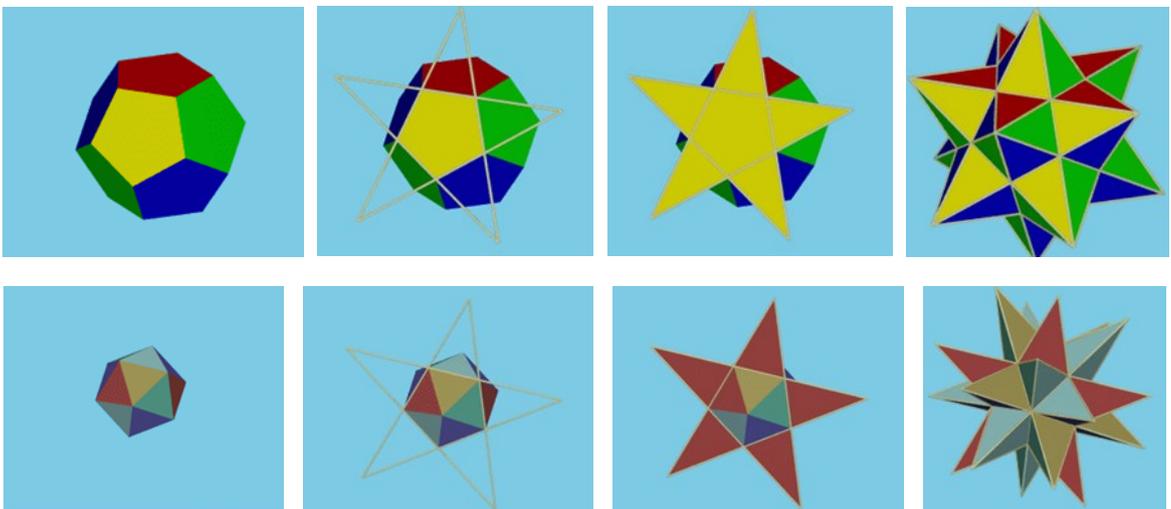
Les solides étoilés de Kepler sont obtenus par stellations.

*En géométrie, la **stellation** est un procédé de construction de nouveaux polygones (en dimension 2), de nouveaux polyèdres (en dimension 3), ou, en général, de nouveaux polytopes en dimension  $n$ , en étendant les arêtes ou faces planes, généralement de manière symétrique, jusqu'à ce que chacune d'entre elles se rejoignent de nouveau. La nouvelle figure, avec un aspect étoilé, est appelée une stellation de l'original.* (Source : [Wikipédia](#))



Images tirées de *Formes, espace et symétrie* de A. Holden, Cedic, 1977 : stellations du dodécaèdre, en prolongeant les faces, pour obtenir les deux solides étoilés de Kepler.

Mais on peut aussi les obtenir en prolongeant les arêtes du dodécaèdre pour le premier, et de l'isocaèdre pour le second.



Si on joint les sommets du petit dodécaèdre étoilé, on obtient un icosaèdre, alors qu'en joignant ceux du grand dodécaèdre étoilé, on obtient un dodécaèdre. Tout cela est dû au fait qu'icosaèdre et dodécaèdre sont duals l'un de l'autre.

Après ces petits rappels, venons-en au fait : il semble que la découverte du petit dodécaèdre étoilé soit bien antérieure à Kepler. Du moins c'est ce que l'on pourrait dire avec une lecture récurrente de l'histoire. C'est l'objet de cet article.

Dans la basilique San Marco de Venise, on trouve en effet cette mosaïque :



Elle est attribuée à Ucello (1397-1475) peintre florentin, grand spécialiste de la perspective, connu surtout pour son triptyque « la bataille de San Romano » (ci-dessous le volet qui est à la National Gallery de Londres) où on perçoit sa maîtrise de la perspective dans le mazzochio (coiffe florentine en forme de tore) du cavalier central.



Ucello :le panneau de la bataille de San Romano et la perspective d'un mazzochio (Louvre)

Construire une perspective du mazzochio était considéré comme le passage obligé pour être considéré comme un grand peintre à la Renaissance.

Il semble que la mosaïque de San Marco, attribuée à Ucello, soit la première représentation connue du petit dodécaèdre étoilé. Retrouve-t-on chez les autres peintres ou mathématiciens suivants ce petit dodécaèdre étoilé ?

**Piero della Francesca** (vers 1415-1492) qui est considéré comme un maître de la perspective de la Renaissance est aussi un mathématicien. S'il est connu par son *De prospectiva pingendi* pour sa théorisation de la perspective, il a aussi écrit un traité de l'abaque (*Trattato abaco*) et un traité sur les polyèdres (*Libellus de quinque corporibus regularibus*). Ces deux derniers écrits sont passés apparemment inaperçus pendant 3 siècles ([voir](#)).

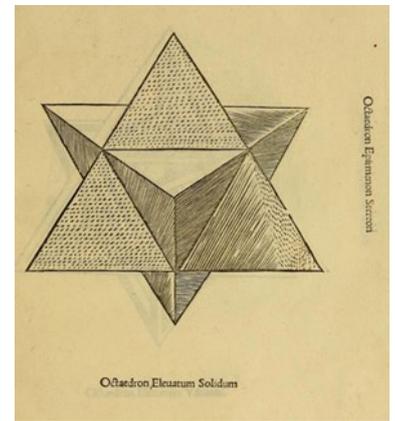
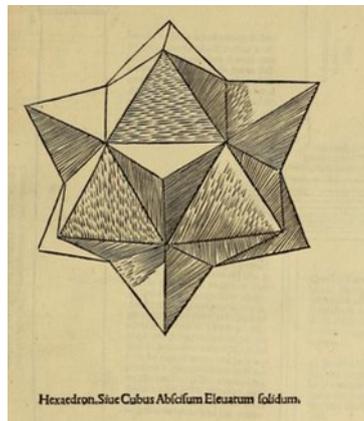
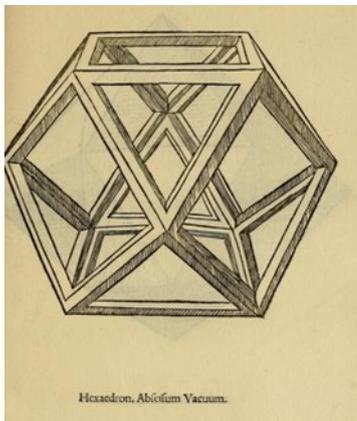
Dans son traité sur les polyèdres, il traite de polyèdres inscrits dans la sphère, de polyèdres inscrits dans d'autres polyèdres et de polyèdres semi réguliers. On ne semble pas retrouver le petit dodécaèdre étoilé dans ses écrits ([voir](#)).

**Luca Pacioli** (1445-1517) a fait une partie de ses études à Venise, a été élève d'Alberti, de Piero della Francesca, théoricien de la perspective, puis va enseigner les mathématiques dans de nombreuses villes du nord de l'Italie dont Milan où il se lie avec Léonard de Vinci qu'il initiera aux mathématiques, et à Venise où il enseignera les *Eléments* d'Euclide.

Ici peint par Barbari (attribué à), Luca Pacioli explique au duc de Montefeltro un passage des Eléments d'Euclide à savoir la construction du pentagone régulier, construction liée à la divine proportion nom à l'époque du nombre d'or.

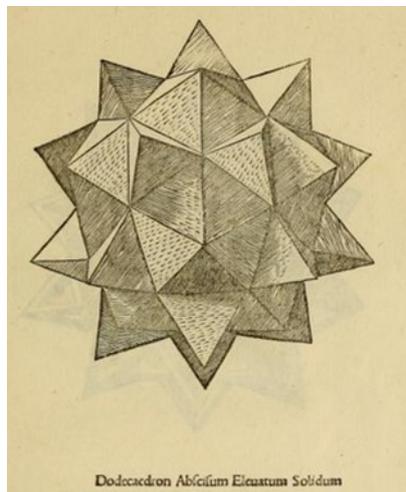


Dans son ouvrage *La Divine Proportion* (écrit entre 1496 et 1498), on retrouve de nombreuses perspectives de solides parmi lesquelles celles des polyèdres réguliers, semi réguliers et étoilés dont on pense qu'elles sont de la main de Léonard de Vinci.



Dans cet ouvrage figurent de nombreux solides étoilés dont certains obtenus par stellations comme le stella octangula (à droite ci-dessus, obtenu par stellation de l'octaèdre).

Sur le [site où est numérisé l'ouvrage](#), on pourra vérifier que petit dodécaèdre étoilé n'a pas été représenté car si certains le voient en ce dessin de Léonard de Vinci, j'ai personnellement des doutes, surtout quand on connaît les prouesses du dessinateur et l'on compare à la mosaïque attribuée à Ucello.

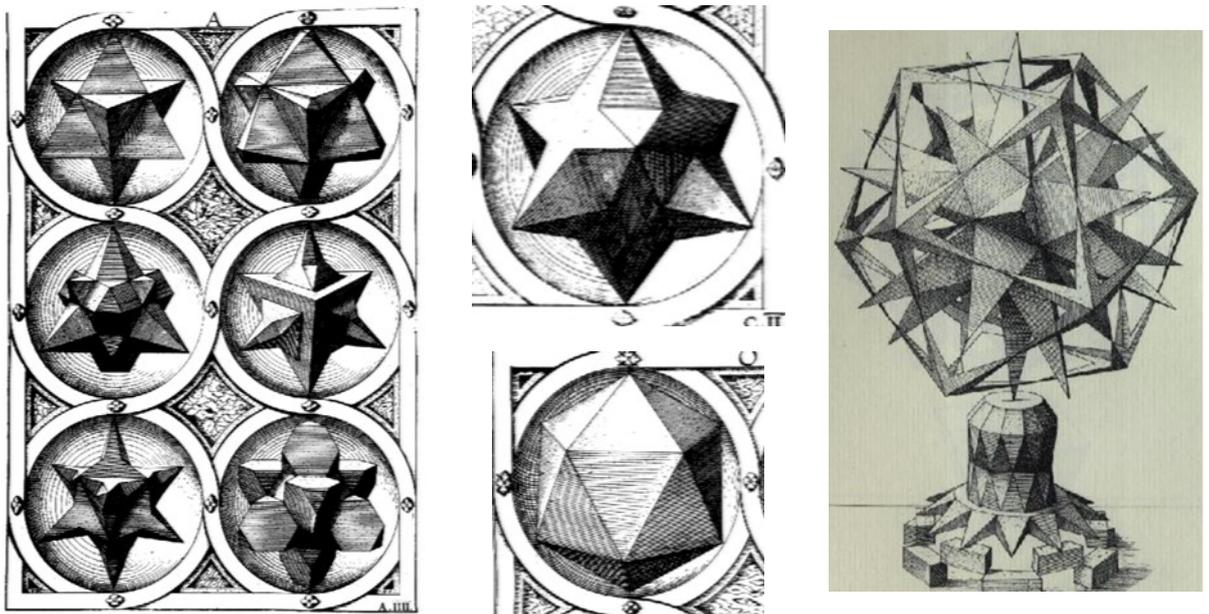


Cela peut paraître surprenant, car comment penser que le moine mathématicien Luca Pacioli n'ait pas assisté à un office à San Marco et n'ait pas regardé de près les mathéma-

tiques présentes dans le pavage de la basilique San Marco ? Ou s'il l'a vu, pourquoi n'a-t-il pas eu son attention attirée par cette figure ?

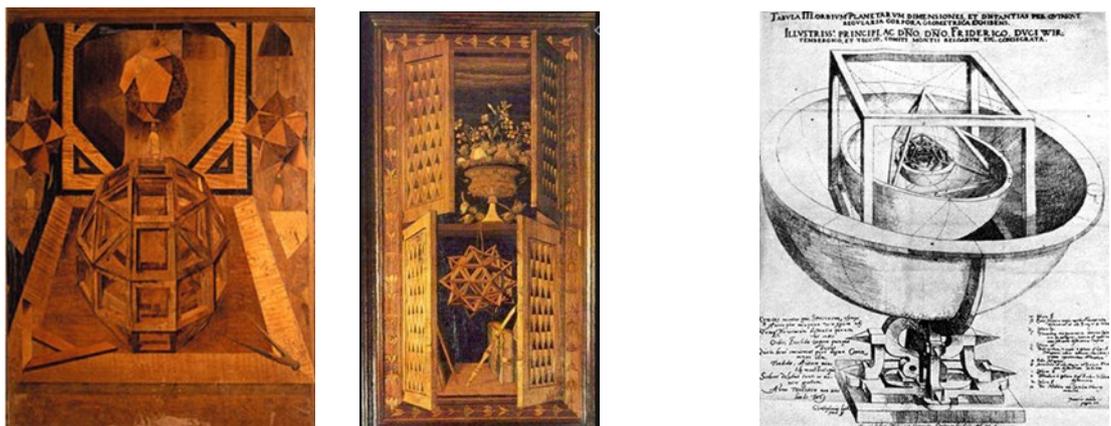
Pour en revenir à l'œuvre de Pacioli, il faut mentionner que selon Vasari (1511-1574), premier auteur d'histoire de l'art, Luca Pacioli aurait tout simplement pillé ou du moins plagié l'œuvre mathématique (très importante) de Piero della Francesca, ce qui lui a permis de passer à la postérité. Les historiens semblent pencher actuellement pour cette hypothèse...

On retrouve des perspectives de polyèdres chez **Wentzel Jamnitzer** (1507-1585) qui est un orfèvre et graveur allemand ayant surtout œuvré à Nuremberg. Il semble avoir été en contact avec Dürer. Il est célèbre pour avoir publié *Perspectiva Corporum Regularium* (*Perspective des solides réguliers*) en 1568, dont sont tirées les illustrations suivantes.



Sur [ce site](#), on trouvera de nombreuses perspectives de polyèdres dues à cet artiste. Il semble que le petit dodécaèdre apparaît, ainsi qu'un solide pouvant ressembler à grand dodécaèdre étoilé.

Mais dessins et gravures ne sont pas les seules représentations dans lesquelles on trouve des polyèdres de toute sorte. On en voit de nombreux dans les marqueteries. L'exemple le plus frappant est celui du studiolo d'Urbino. Mais on en trouve dans toute l'Italie du Nord. En voici deux exemples : Damiano da Bergamo, Musée San Dominico de Bologne, et Fra Giovanni, abbaye de Monte Oliveto ([voir](#)).



Que **Kepler** (1571-1630) se soit intéressé aux solides réguliers est évident compte tenu de sa première cosmologie : il y a 6 planètes car il y a 5 solides parfaits écrit-il en 1595 ([voir](#)). Et ces solides peuvent s'emboîter comme on le voit sur la gravure ci-dessus. Il a donc fallu attendre Kepler pour voir réapparaître les deux dodécaèdres étoilés et qu'un statut leur soit donné.

Mais alors pourquoi Kepler leur a-t-il accordé un statut spécial, en les associant aux 5 solides de Platon ? Seul moyen de le savoir (et encore !) : se plonger dans les écrits de ce dernier (dont il existe une traduction française discutable). L'enquête continue...

Pourquoi a-t-il fallu autant de siècles pour trouver des solides réguliers autres que les solides platoniciens ? Mais qu'est-ce qu'un polyèdre régulier ? Comment définir la face d'un polyèdre ? Comment définir le sommet ou une arête de polyèdre ? Questions banales en apparence mais pourtant pas simples et sans ces définitions, comment donner sens à la formule d'Euler-Descartes  $s + f = a + 2$  (où  $s$  est le nombre de sommets,  $f$  le nombre de faces,  $a$  le nombre d'arêtes) ? Peut-être y reviendrons-nous dans un prochain article.

Le solide d'Ucello a donc été vu comme une stellation parmi d'autres et complètement ignorée durant deux siècles. Cette hypothèse semble corroborée par Jean-Jacques Dupas qui dans [son blog](#) affirme :

*C'est Siegmund Günther qui dans un ouvrage de 1876 remarqua le premier cette instance du petit dodécaèdre étoilé à Saint-Marc de Venise, cette référence est donnée dans "Imagine Math 3: Between Culture and Mathematics, Michele Emmer, Springer"*

*Malheureusement je n'ai pas trouvé trace de cette affirmation dans "Geschichte der Mathematischen Wissenschaften" de Siegmund Günther paru en 1876.*

*Lucio Saffaro, aurait découvert dans la chapelle San Pantalon, de l'église San Pantalon à Venise deux autres pavages représentant la deuxième étoile de Kepler, ces pavages auraient soufferts de la réfection de l'église depuis, mais auraient pu être l'œuvre d'Ucello.*

Alors, de là à conclure que les mathématiciens de passage à Venise ne regardaient que vers le ciel, il y a un pas que je ne franchis pas. En revanche, il apparaît que sauter le pas des polygones non convexes pour concevoir des polyèdres réguliers a été un obstacle difficile à passer...

Cet article montre plusieurs choses :

- L'interpénétration très importante entre mathématiques et arts à la Renaissance.
- La difficulté à définir les éléments d'un polyèdre.
- Qu'il n'y a pas que les gondoles à voir à Venise : regardez où vous mettez les pieds à San Marco, admirez les mathématiques présentes dans les pavages du sol ([voir](#)) et fuyez les hordes de touristes en visitant l'église San Pantalon de Venise à la recherche des polyèdres étoilés.



Une belle construction mathématique au sol de San Marco

### Sitographie

Ucello : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Paolo\\_Uccello](https://fr.wikipedia.org/wiki/Paolo_Uccello)

Piero della Francesca : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Piero\\_della\\_Francesca#Les\\_%C5%93uvres\\_math%C3%A9matiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Piero_della_Francesca#Les_%C5%93uvres_math%C3%A9matiques)

Libellus de quinque corporibus regularibus : [https://commons.wikimedia.org/wiki/Libellus\\_De\\_Quinque\\_Corporibus-Regularibus\\_de\\_Piero\\_della\\_Francesca#/media/File:Piero\\_della\\_Francesca\\_-\\_Libellus\\_de\\_quinque\\_corporibus\\_regularibus\\_-\\_p7a.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/Libellus_De_Quinque_Corporibus-Regularibus_de_Piero_della_Francesca#/media/File:Piero_della_Francesca_-_Libellus_de_quinque_corporibus_regularibus_-_p7a.jpg)

Luca Pacioli, La divine proportion : <https://archive.org/details/divinaproportion00paci/page/n191/mode/2up>

Wentzel Jamnitzer : <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/jamnitzer/galerie7d.html>

Les mathématiques du sol de San Marco : <https://www.youtube.com/watch?v=9opp2kJLaA4>

Beauté des polyèdres étoilés : <http://compagnonnage.info/blog/blogs/blog1.php>

### Animations polyèdres

Dodécaèdre : <https://www.geogebra.org/m/RvWmhZ5s>

Petit dodécaèdre étoilé animé : <https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/AdRE82ma>

Grand dodécaèdre de Poincaré : <https://www.geogebra.org/m/JFRca89j>

### Bibliographie

*Formes, espace et symétrie*, A Holden, Cedic, 1977.

*Traité de géométrie*, Rouché Camberousse, Gauthier-Villars, 1922.

*La vie des artistes*, G. Vasari, Citadelles & Mazenot, 2010.

*Divine Proportion*, Luca Pacioli, Librairie du compagnonnage, 1980.