Corol'aire

Octobre 2020 n°122

S'ouvrir davantage sur le primaire

Frédéric de Ligt

Peut-être avez-vous vu passer l'information parue dans le journal *Le Monde* du 01/10/20 :

« Selon cette enquête menée par la DEPP, l'agence des statistiques du ministère de l'éducation, 54,4 % des élèves (contre 42,4 % en 2014) ont des acquis « fragiles », voire insuffisants en mathématiques. »

L'enquête s'intéressait à l'évolution des acquis en mathématiques sur la période 2014-2019 des élèves de CM2. Cette étude nous apprend en particulier qu'en 2019, seul un élève sur 5 est capable de réinvestir les notions vues en cours dans des situations concrètes. Le groupe des élèves les plus en difficulté a grossi en 5 ans et obtient des résultats à la baisse alors que celui des élèves performants diminue en quantité mais a réussi à maintenir ses résultats.

Les inégalités sociales et les inégalités des scores recouvrent les mêmes groupes et les écarts se sont amplifiés sur la période. Si l'on ajoute à cela la fracture numérique qui a impacté plus durement les classes sociales défavorisées pendant la période de confinement, il y a tout lieu de penser qu'un chantier d'importance est à venir pour les professeurs des écoles.

Notre association ainsi que les IREM peuvent apporter leur soutien à cette entreprise essentielle pour l'avenir. Des groupes de travail axés sur le primaire existent déjà au sein de l'APMEP, comme le groupe « Jeux », ou dans les IREM, comme le groupe de Poitiers qui travaille depuis 10 ans à l'introduction des notions mathématiques par le biais des grandeurs. Ils sont tous productifs et prêts à partager leur expérience même s'ils sont peu nombreux et si l'accès aux PE n'est pas toujours facile.

Mais il y a aussi, pour tous les collègues concernés, des liaisons écoles-collège à inventer sur des bases de dialogue, de partenariat et d'entre-aide. Le cycle 3 qui devait être le ciment de cette liaison est souvent une coquille vide. Il faut que tous ces acteurs se parlent. Sinon le niveau général d'instruction risque de devenir rapidement inquiétant.

Sommaire

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

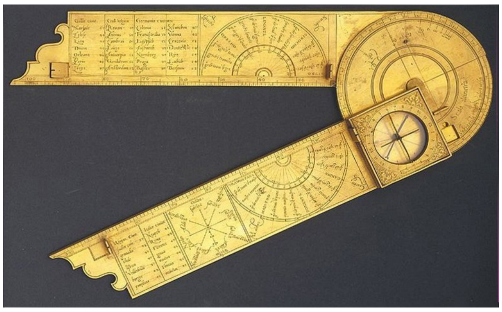
Groupe Rallye

Au revoir le Rallye 2020, bonjour le Rallye 2021…

…avec **Maths & mesure** comme thème et l’épreuve finale **le mardi 9 mars**

Nous nous souviendrons longtemps de ce Rallye 2020 que nous avons pu mener à son terme malgré l’adversité. La remise des prix nous a bien sûr manqué, équipe organisatrice, professeurs et élèves des classes lauréates.

Le thème



Comme nous l’avons annoncé dans le dernier Corol’aire, le thème de cette édition 2021 est « **Maths & mesure** ». Nous espérons pouvoir organiser la remise des prix à Poitiers pour que les classes lauréates puissent visiter l’exposition du même nom qui restera à l’Espace Mendès France de Poitiers jusqu’à la fin de cette année scolaire, conséquence de la situation sanitaire que l’on connaît.

L’épreuve

Comme l’année dernière, le dossier concernant le thème sera réalisé par les élèves avant l’épreuve finale. Celle-ci consistera donc en la seule résolution des problèmes et sera ramené à **45 minutes**. Avec ce format, il sera plus aisé de contenir la mise en route et la finalisation du dossier dans l'enveloppe de « l'heure de cours » dédiée au Rallye (qui mesure en réalité 55 minutes !)

Toutefois, l'épreuve n'étant pas un examen, la rapidité de résolution des problèmes constituera toujours une partie du challenge.

La date de l’épreuve

L’épreuve finale aura lieu le **mardi 9 mars**, la semaine précédant la Semaine Nationale des Mathématiques, ceci pour éviter une saturation des événements entre le 15 et le 19 mars.

Le calendrier

L’équipe organisatrice s’est déjà mise au travail avec une première réunion le mercredi 16 septembre dernier. Tous les établissements publics et privés du secondaire recevront le courrier d’inscription fin novembre, et les épreuves d’entraînement seront en ligne début décembre. Les **classes de CM** pourront passer l’épreuve comme l’an dernier, avec participation au palmarès, mais les informations passeront par le collège de leur secteur.

Les modalités

Le travail sur le « **Thème** » se déclinera du CM aux 2^{nde} sur des sujets différents mais avec un modèle de questionnement identique.

Comme l’an dernier, la partie « **Problèmes** » consistera en un seul document avec des problèmes communs à deux niveaux successifs.

Nous espérons que vous serez nombreux à nous accompagner dans cette aventure par la participation de votre établissement. C’est la meilleure façon de nous encourager !

Maths et Mesure : Allons au bois (2)

Jean-Paul Guichard

La fagoteuse et le millistère

Notre idée de faire des fagots n'est pas qu'une idée ancienne. Elle est en train de se développer grâce à la fabrication assez récente de fagoteuses, et du coup l'image des tas de bois dans la forêt est en train de changer comme le montre la photo : plus facile de compter les stères et de les transporter ! Le stère cubique prend la forme d'un cylindre. Quel diamètre doit-on alors donner à la fagoteuse ?

Si nous reprenons l'expérience du ministère, on peut envisager de fabriquer un ministère ayant la forme d'une boite cylindrique de 10 cm de haut. Un tuyau de carton de 10 cm suffirait. Et donc un rectangle de carton dont la longueur est à calculer, ou à mesurer avec une ficelle sur un fagot, ou directement à ajuster sur le fagot : réalisable en cycle 3, dès le CM si on mesure, ou en cycle 4 à partir de la 5^{e} si on calcule. C'est une bonne occasion pour travailler sur le patron du cylindre, dans une situation où on en a besoin.

Nous avons utilisé des élastiques pour faire nos fagots. Mais on pourrait envisager de faire directement des fagots d'un ministère en utilisant une corde de longueur ad hoc (avec un œillet et un crochet, ou un nœud coulant et une marque…). Trouver la longueur de la corde, par mesure ou par calcul, est un problème d'autant plus intéressant qu'il est utile. On mesure alors des volumes de bois en utilisant pour unité la corde qui est une longueur ! Et c'est ce qui se faisait autrefois : la corde était, dans de nombreux pays, une unité de mesure du bois de chauffage, dont le nom est encore utilisé de nos jours surtout en Amérique du Nord. Actuellement une corde dans les Ardennes vaut 2 stères, en Normandie, Bretagne, Anjou elle en vaut 3, et en Auvergne 4. Quelle serait, dans chaque cas la longueur de la corde ? Pourquoi ne pas programmer la longueur de la corde en fonction du volume en stères du fagot ? On peut lire, sur la toile, qu'autrefois la corde utilisée mesurait entre 6 m et 13,60 m en fonction des régions et des localités. A quels volumes de bois, en 1 m de long, cela correspondait-il ? Là aussi pourquoi ne pas programmer le volume en fonction de la longueur de la corde ? Ou même en fonction de la longueur de

Matériel : Jean-Paul Mercier, Celda, Compendium de l'école élémentaire la corde et de celle des rondins ? Un excellent travail de calcul algébrique et de programmation ! Il y a là du travail pour le cycle 4 et le lycée.

Le millistère

En tant qu'objet, le ministère est la représentation à l'échelle 1/10 d'un stère, cube de 1 m de côté. Combien de ministères faut-il pour remplir le stère ? Pour répondre à cette question, l'expérimentation avec nos buchettes de 10 cm n'est certes pas appropriée. Mais on peut lui substituer ce défi qui est l'une des expériences du pôle 4 Volumes : Combien de décimètre cubes dans un mètre cube ? Et de centimètre cubes ? Ce problème de pavage-dénombrement, trivial pour nous professeurs de mathématiques, laisse souvent dans la perplexité le grand public, et donne lieu alors à des estimations que nous ne voudrions pas trouver chez nos élèves. C'est en effet ce que nous avons pu expérimenter au Souk de maths, lors des Journées Nationales de Toulouse de 2014, avec Jean-Paul Mercier en présence du matériel que Jean-Paul a présenté depuis dans toutes les Journées Nationales au stand de l'Atelier des grandeurs.

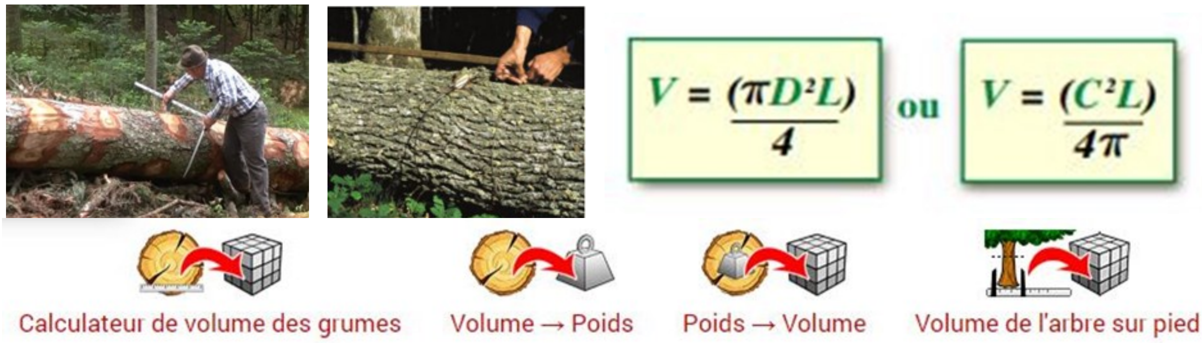
Difficile pareillement de croire que le cube de 10 cm de côté contient 1000 cubes de 1 cm de côté. Il faut donc faire expérimenter les élèves, pour voir et comprendre. Vous trouverez du matériel pour cela sur le pôle Volume de l'exposition. Je vous conseille aussi d'aller voir le compte rendu d'un travail en classe de 6^{e}, que vous trouverez, pages 34-35, de la brochure de l'IREM de Poitiers : *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les volumes*. On peut concevoir de faire fabriquer de 1 à 5 *ministères cubiques* en papier par élève pour démarrer la construction collective du mètre cube (il y a, sur la toile, une vidéo sur un tel travail de classe avec des cubes) ; avec une erreur de 1 mm on peut réaliser un *ministère* papier avec une feuille de 21 cm x 29,7 cm, les deux carrés restant par feuille pouvant être mis en commun pour réaliser l'aire de la base. Et du coup voir ou revoir ou comprendre le lien entre décimètre-carré et mètre-carré. Expérimenter en vraie grandeur permet en plus aux élèves d'avoir une idée de la grandeur d'un mètre-cube, d'un décimètre-cube.

Remplacer 10 cubes par une barre (un *decaministère*), et 10 barres par une plaque, comme on le voit sur les photos de matériel, permet de terminer le remplissage du cube mentalement et de trouver 1000. Le *ministère* est donc un *milli stère*. Et ainsi vont de 1000 en 1000 les unités de volume, quand on prend pour unités des cubes ayant les unités de longueur du système décimal pour longueur de leurs côtés. Et avec les 10 cubes formant une barre, combien peut-on faire de solides différents ? De nouveaux exemples de solides qui n'ont pas la même forme, mais qui ont le même volume. Là aussi vous trouverez un défi à expérimenter sur le lieu de l'exposition, facile à mettre en œuvre en classe dès la maternelle.

Seriez-vous prêts à faire relever par vos élèves un autre défi du pôle 4 : *Quelle est la longueur du côté d'un cube 10 fois plus petit qu'un décimètre cube ? Et 100 fois plus petit ? Et 1000 fois ? Quelles unités représentent ces trois cubes ?*

Il s'agit de comprendre pourquoi on a choisi une échelle de 1000 en 1000, alors que pour les contenances on a choisi une échelle de 10 en 10 ; et de voir que ces cubes, dont la longueur du côté n'est pas une fraction du décimètre, ont pour volume le dL et le cL. On peut prolonger sur l'irrationalité des racines cubiques pour justifier l'impossibilité du fractionnement du décimètre, et sur le célèbre problème de la duplication du cube.

La forêt est une vraie ressource non seulement pour le chauffage mais aussi pour faire des mathématiques. Un dernier exemple : depuis longtemps les hommes ont appris à évaluer un volume de bois sur pied ou abattu (bois d'œuvre) : c'est ce qu'on appelle le cubage. Ils ont élaboré des formules (thème du troisième panneau du pôle 4) que l'on peut faire mettre à l'épreuve par nos élèves. Ces formules sont actuellement disponibles sur la toile sous forme de calculateurs : une occasion de programmer. Et pour les données, on a besoin de mesures de longueurs, et d'instruments adaptés : retour au pôle 2 de l'exposition.



Cubage des bois : instrument et mesures, calculs (formules, calculateurs)

N'hésitons donc pas à aller aux bois ! Et à visiter l'exposition *Maths & mesures*, sous tous ses pôles.

Pour aller plus loin, des visites express de chaque pôle de l'exposition Maths & Mesure sont en ligne sur la chaîne Youtube de l'Espace Mendès France : https://urlz.fr/e4SQ

Journées Nationales : En attendant Bourges...

Jean Fromentin

26 septembre 2020 : une réunion de formation sur Spip a lieu au local parisien de l'APMEP pour étoffer la petite équipe qui a commencé à mettre sur pied le site des Journées Nationales.

18 octobre 2020 : le site est prêt ! Ouverture officielle de ces Journées Nationales digitales par le discours de Sébastien Planchenault, notre Président.

Conférences, ateliers, stands… tout est en ligne ; les conférenciers, animateurs, modérateurs… sont prêts à intervenir.
Quel défi relevé par notre association !

18, 19 et 20 octobre : l'énorme succès de ces Journées se manifeste de jour en jour par le nombre étonnant de connections que chaque participant peut constater en suivant tel atelier ou telle conférence.

Des retours éloquents : « J'ai fait le plein d'ateliers APMEP depuis 4 jours ! » ou « C'est génial ces Journées ; j'ai le cerveau en ébullition » et des avalanches de remerciements sur le compte Twitter de l'APMEP.

Le site reste bien sûr ouvert ; et même si les ateliers et conférences sont passés, des textes, des vidéos, des diaporamas peuvent toujours être visionnés. Les stands restent en ligne et le stand de l'APMEP propose des tarifs spéciaux Journées sur certaines brochures.

Profitez de ces vacances pour y déambuler ; des pages retiendront certainement votre attention.

https://jn2020.apmep.fr/

Petite enquête sur les polyèdres

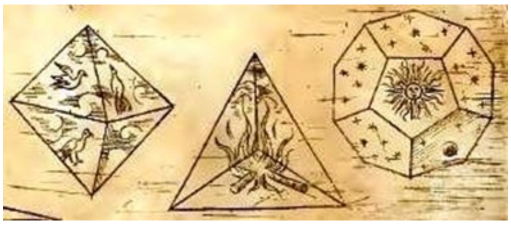
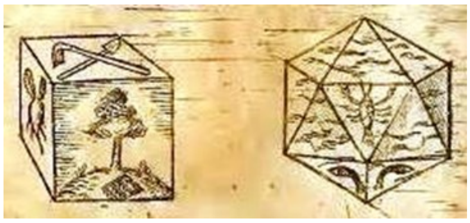
Dominique Gaud, avec l'aide précieuse de Jean-Paul Guichard

Épisode 1 : Le petit dodécaèdre étoilé de San Marco

Les 5 polyèdres réguliers convexes sont connus depuis l'antiquité comme le résume l'article de Wikipedia :

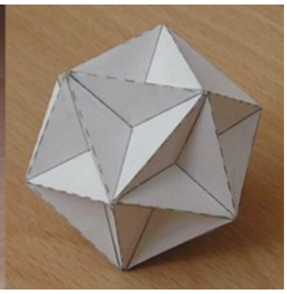
Il semble que Pythagore lui-même (vers 530 av. J.-C.) ou le pythagoricien Archytas de Tarente (vers 360 av. J.-C.), ait découvert les trois premiers des cinq : le tétraèdre (la pyramide), l'hexaèdre (le cube), le dodécaèdre. Ensuite, Théétète d'Athènes (mort en 395 ou en 369 av. J.-C.) découvrit les deux autres : l'octaèdre et l'icosaèdre. Platon les utilise profondément dans le Timée (55e-56c), qui date de 358 av. J.-C.. Euclide les étudie dans ses Éléments (vers 300 av. J.-C.).

Voici les illustrations parus dans l'ouvrage de Kepler *Hamonices Mundi* (Les sciences de l'harmonie du Monde), Linz, 1619.

Sur la toile, on lit que Kepler y a adjoint en 1619 deux polyèdres réguliers étoilés : le petit dodécaèdre étoilé et le grand dodécaèdre étoilé dont les faces sont des pentagones étoilés.


En 1809 Poinsot découvre deux autres solides dont les faces sont pour l'un des triangles équilatéraux et pour l'autre des pentagones.

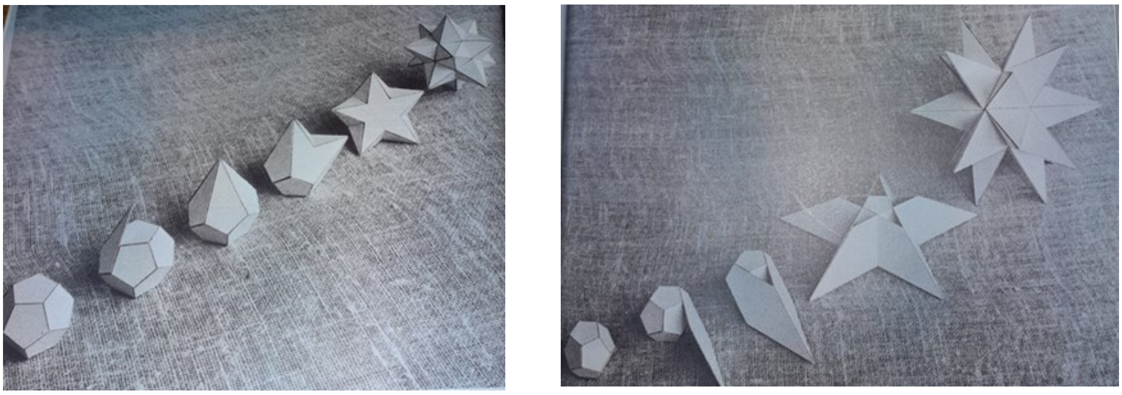
On peut mieux les visualiser avec des animations :
https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/GMUuwftg
https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/AdRE82ma
https://www.geogebra.org/m/m56QmF9C
https://www.geogebra.org/m/JFRca89j

Pour les fabriquer par origami, consulter le site :

https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~morales/polyedresregulier.htm

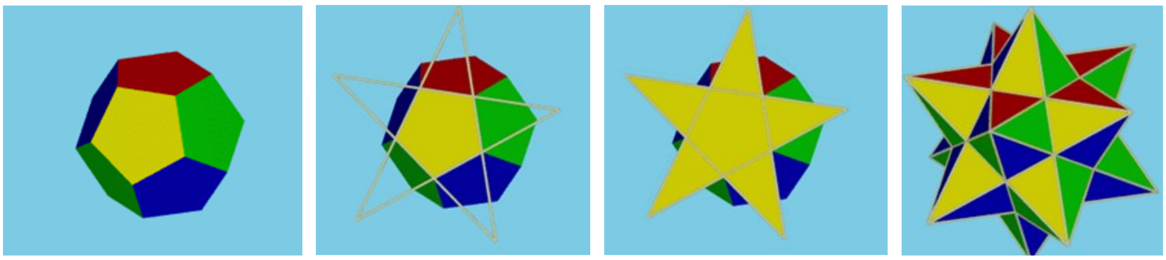
Les solides étoilés de Kepler sont obtenus par stellations.

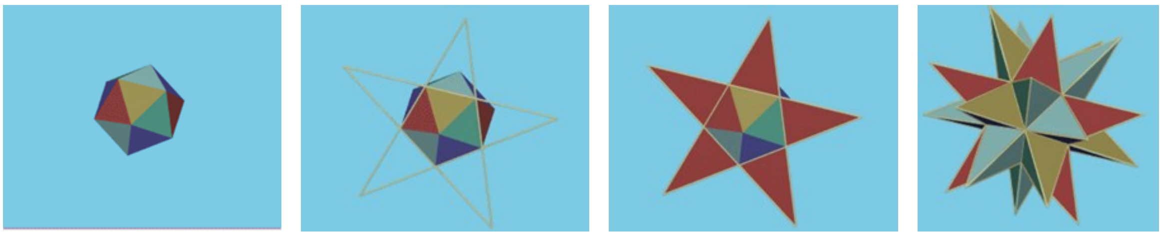
*En géométrie, la **stellation** est un procédé de construction de nouveaux polygones (en dimension 2), de nouveaux polyèdres (en dimension 3), ou, en général, de nouveaux polytopes en dimension n, en étendant les arêtes ou faces planes, généralement de manière symétrique, jusqu'à ce que chacune d'entre elles se rejoignent de nouveau. La nouvelle figure, avec un aspect étoilé, est appelée une stellation de l'original.* (Source : Wikipédia)



Images tirées de *Formes, espace et symétrie* de A. Holden, Cedic, 1977 : stellations du dodécaèdre, en prolongeant les faces, pour obtenir les deux solides étoilés de Kepler.

Mais on peut aussi les obtenir en prolongeant les arêtes du dodécaèdre pour le premier, et de l'isocaèdre pour le second.





Si on joint les sommets du petit dodécaèdre étoilé, on obtient un icosaèdre, alors qu'en joignant ceux du grand dodécaèdre étoilé, on obtient un dodécaèdre. Tout cela est dû au fait qu'icosaèdre et dodécaèdre sont duals l'un de l'autre.

Après ces petits rappels, venons-en au fait : il semble que la découverte du petit dodécaèdre étoilé soit bien antérieure à Kepler. Du moins c'est ce que l'on pourrait dire avec une lecture récurrente de l'histoire. C'est l'objet de cet article.

Dans la basilique San Marco de Venise, on trouve en effet cette mosaïque :

Elle est attribuée à Ucello (1397-1475) peintre florentin, grand spécialiste de la perspective, connu surtout pour son triptyque « la bataille de San Romano » (ci-dessous le volet qui est à la National Gallery de Londres) où on perçoit sa maîtrise de la perspective dans le mazzochio (coiffe florentine en forme de tore) du cavalier central.

Ucello :le panneau de la bataille de San Romano et la perspective d'un mazzochio (Louvre)

Construire une perspective du mazzochio était considéré comme le passage obligé pour être considéré comme un grand peintre à la Renaissance.

Il semble que la mosaïque de San Marco, attribuée à Ucello, soit la première représentation connue du petit dodécaèdre étoilé. Retrouve-t-on chez les autres peintres ou mathématiciens suivants ce petit dodécaèdre étoilé ?

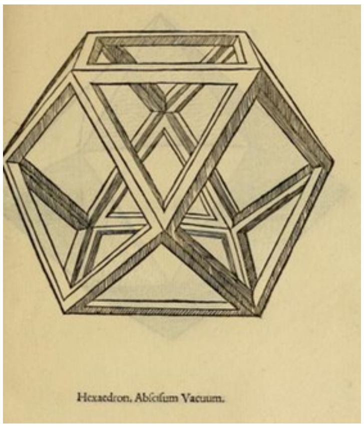
Piero della Franscesca (vers 1415-1492) qui est considéré comme un maître de la perspective de la Renaissance est aussi un mathématicien. S'il est connu par son *De prospectiva pingendi* pour sa théorisation de la perspective, il a aussi écrit un traité de l'abaque (*Trattato abaco*) et un traité sur les polyèdres (*Libellus de quinque corporibus regularibus*). Ces deux derniers écrits sont passés apparemment inaperçus pendant 3 siècles (voir).

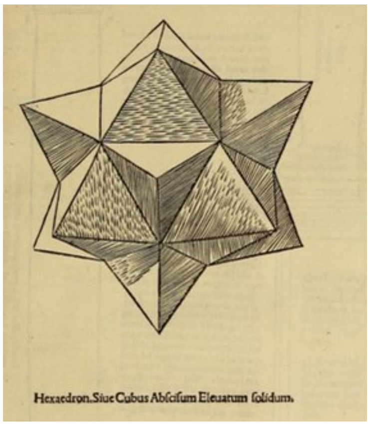
Dans son traité sur les polyèdres, il traite de polyèdres inscrits dans la sphère, de polyèdres inscrits dans d'autres polyèdres et de polyèdres semi réguliers. On ne semble pas retrouver le petit dodécaèdre étoilé dans ses écrits (voir).

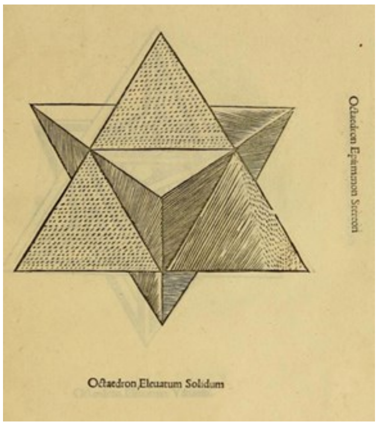
Luca Pacioli (1445-1517) a fait une partie de ses études à Venise, a été élève d'Alberti, de Piero della Francesca, théoricien de la perspective, puis va enseigner les mathématiques dans de nombreuses villes du nord de l'Italie dont Milan où il se lie avec Léonard de Vinci qu'il initiera aux mathématiques, et à Venise où il enseignera les Eléments d'Euclide.

Ici peint par Barbari (attribué à), Luca Pacioli explique au duc de Montefeltro un passage des Eléments d'Euclide à savoir la construction du pentagone régulier, construction liée à la divine proportion nom à l'époque du nombre d'or.

Dans son ouvrage *La Divine Proportion* (écrit entre 1496 et 1498), on retrouve de nombreuses perspectives de solides parmi lesquelles celles des polyèdres réguliers, semi réguliers et étoilés dont on pense qu'elles sont de la main de Léonard de Vinci.

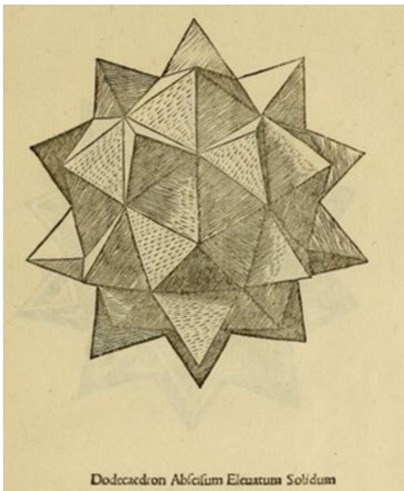






Dans cet ouvrage figurent de nombreux solides étoilés dont certains obtenus par stellations comme le stella octangula (à droite ci-dessus, obtenu par stellation de l'octaèdre).

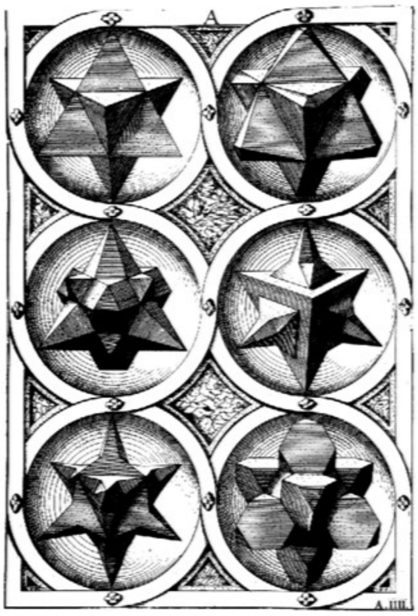
Sur le site où est numérisé l'ouvrage, on pourra vérifier que petit dodécaèdre étoilé n'a pas été représenté car si certains le voient en ce dessin de Léonard de Vinci, j'ai personnellement des doutes, surtout quand on connaît les prouesses du dessinateur et l'on compare à la mosaïque attribuée à Ucello.

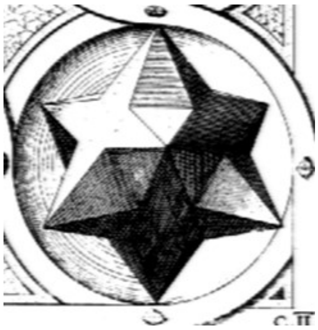


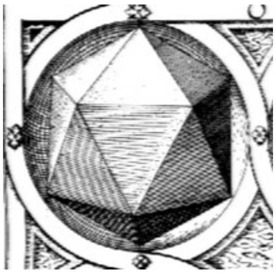
Cela peut paraître surprenant, car comment penser que le moine mathématicien Luca Pacioli n'ait pas assisté à un office à San Marco et n'ait pas regardé de près les mathématiques présentes dans le pavage de la basilique San Marco ? Ou s'il l'a vu, pourquoi n'a-t-il pas eu son attention attirée par cette figure ?

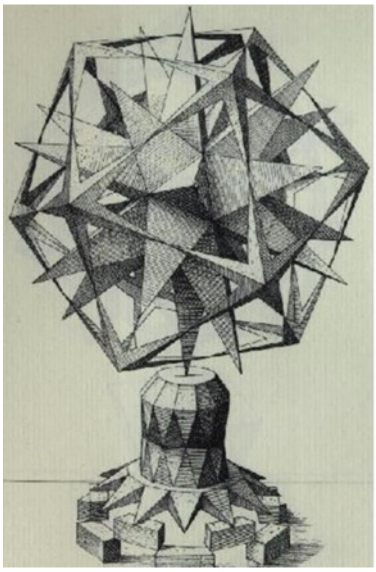
Pour en revenir à l'œuvre de Pacioli, il faut mentionner que selon Vasari (1511-1574), premier auteur d'histoire de l'art, Luca Pacioli aurait tout simplement pillé ou du moins plagié l'œuvre mathématique (très importante) de Piero della Franscesca, ce qui lui a permis de passer à la postérité. Les historiens semblent pencher actuellement pour cette hypothèse…

On retrouve des perspectives de polyèdres chez **Wentzel Jamnitzer** (1507-1585) qui est un orfèvre et graveur allemand ayant surtout œuvré à Nuremberg. Il semble avoir été en contact avec Dürer. Il est célèbre pour avoir publié *Perspectiva Corporum Regularium* (*Perspective des solides réguliers*) en 1568, dont sont tirées les illustrations suivantes.



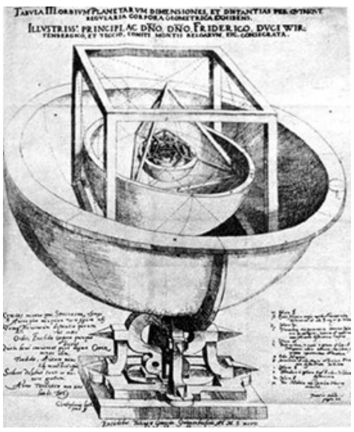






Sur ce site, on trouvera de nombreuses perspectives de polyèdres dues à cet artiste. Il semble que le petit dodécaèdre apparaît, ainsi qu'un solide pouvant ressembler à grand dodécaèdre étoilé.

Mais dessins et gravures ne sont pas les seules représentations dans lesquelles on trouve des polyèdres de toute sorte. On en voit de nombreux dans les marqueteries. L'exemple le plus frappant est celui du studiolo d'Urbino. Mais on en trouve dans toute l'Italie du Nord. En voici deux exemples : Damiano da Bergamo, Musée San Dominico de Bologne, et Fra Giovanni, abbaye de Monte Oliveto (voir).



Que **Kepler** (1571-1630) se soit intéressé aux solides réguliers est évident compte tenu de sa première cosmologie : il y a 6 planètes car il y a 5 solides parfaits écrit-il en 1595 (voir). Et ces solides peuvent s'emboiter comme on le voit sur la gravure ci-dessus. Il a donc fallu attendre Kepler pour voir réapparaître les deux dodécaèdres étoilés et qu'un statut leur soit donné.

Mais alors pourquoi Kepler leur a-t-il accordé un statut spécial, en les associant aux 5 solides de Platon ? Seul moyen de le savoir (et encore !) : se plonger dans les écrits de ce dernier (dont il existe une traduction française discutable). L'enquête continue…

Pourquoi a-t-il fallu autant de siècles pour trouver des solides réguliers autres que les solides platoniciens ? Mais qu'est-ce qu'un polyèdre régulier ? Comment définir la face d'un polyèdre ? Comment définir le sommet ou une arête de polyèdre ? Questions banales en apparence mais pourtant pas simples et sans ces définitions, comment donner sens à la formule d'Euler-Descartes $s + f = a + 2$ (où s est le nombre de sommets, f le nombre de faces, a le nombre d'arêtes) ? Peut-être y reviendrons-nous dans un prochain article.

Le solide d'Ucello a donc été vu comme une stellation parmi d'autres et complètement ignorée durant deux siècles. Cette hypothèse semble corroborée par Jean-Jacques Dupas qui dans son blog affirme :

C'est Siegmund Günther qui dans un ouvrage de 1876 remarqua le premier cette instance du petit dodécaèdre étoilé à Saint-Marc de Venise, cette référence est donnée dans "Imagine Math 3: Between Culture and Mathematics, Michele Emmer, Springer"

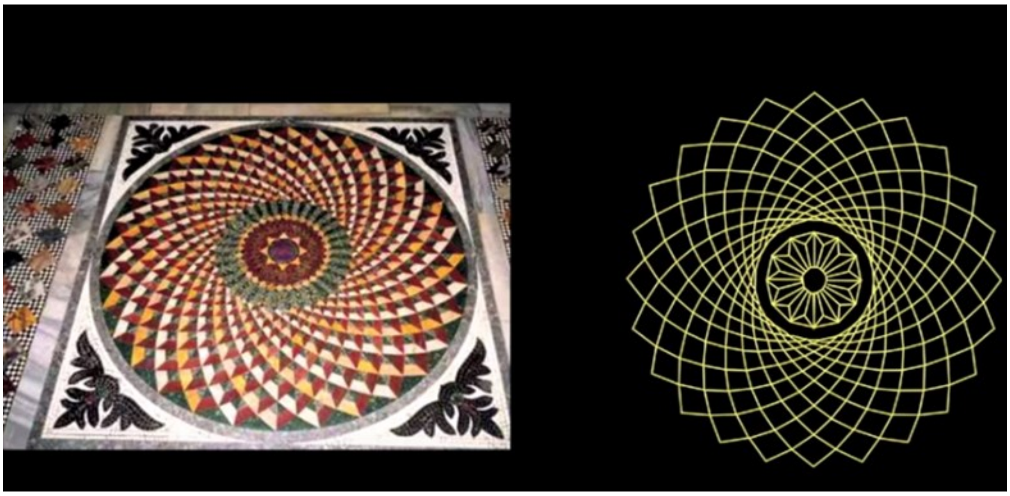
Malheureusement je n'ai pas trouvé trace de cette affirmation dans "Geschichte der Mathematischen Wissnschaften" de Siegmund Günther paru en 1876.

Lucio Saffaro, aurait découvert dans la chapelle San Pantalon, de l'église San Pantalon à Venise deux autres pavages représentant la deuxième étoile de Kepler, ces pavages auraient soufferts de la réfection de l'église depuis, mais auraient pu être l'œuvre d'Ucello.

Alors, de là à conclure que les mathématiciens de passage à Venise ne regardaient que vers le ciel, il y a un pas que je ne franchis pas. En revanche, il apparaît que sauter le pas des polygones non convexes pour concevoir des polyèdres réguliers a été un obstacle difficile à passer…

Cet article montre plusieurs choses :

- L'interpénétration très importante entre mathématiques et arts à la Renaissance.
- La difficulté à définir les éléments d'un polyèdre.
- Qu'il n'y a pas que les gondoles à voir à Venise : regardez où vous mettez les pieds à San Marco, admirez les mathématiques présentes dans les pavages du sol (voir) et fuyez les hordes de touristes en visitant l'église San Pantalon de Venise à la recherche des polyèdres étoilés.



Une belle construction mathématique au sol de San Marco

Sitographie

Ucello : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paolo_Uccello

Piero della Franscesca : https://fr.wikipedia.org/wiki/Piero_della_Francesca#Les_%C5%93uvres_math%C3%A9matiques

Libellus de quinque corporibus regulaibus : https://commons.wikimedia.org/wiki/Libellus_De_Quinque_Corporibus_Regularibus_de_Piero_della_Francesca#/media/File:Piero_della_Francesca_-_Libellus_de_quinque_corporibus_regularibus_-_p7a.jpg

Luca Pacioli, La divine proportion : https://archive.org/details/divinaproportion00paci/page/n191/mode/2up

Wentzel Jamnitzer : http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/jamnitzer/galerie7d.html

Les mathématiques du sol de San Marco : https://www.youtube.com/watch?v=9opp2kJLaA4

Beauté des polyèdres étoilés : http://compagnonnage.info/blog/blogs/blog1.php

Animations polyèdres

Dodécaèdre : https://www.geogebra.org/m/RvWmhZ5s

Petit dodécaèdre étoilé animé : https://www.geogebra.org/m/p5gPPkpG#material/AdRE82ma

Grand dodécaèdre de Poinsot : https://www.geogebra.org/m/JFRca89j

Bibliographie

Formes, espace et symétrie, A Holden, Cedic, 1977.

Traité de géométrie, Rouche Camberousse, Gauthier-Villars, 1922.

La vie des artistes, G. Vasari, Citadelles & Mazenot, 2010.

Divine Proportion, Luca Pacioli, Librairie du compagnonnage, 1980.

Ru – Bri – COL↳AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

122-1 *Proposé par Chika Ofili (Nigéria)* :

392 est divisible par 7 car 39 + 2 x 5 = 49 et 49 est divisible par 7.
1673 est divisible par 7 car 167 + 3 x 5 = 182 est divisible par 7 en effet 18 + 2 x 5 = 28 est divisible par 7.
Pourriez-vous justifier ce critère de divisibilité par 7 ?

122-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

En prolongement de l'énoncé 119-3, soit p un entier supérieur ou égal à 2 ; montrer que pour tout entier naturel non nul *n* on a :

$$\left\lfloor \sqrt[p]{n-1}+\sqrt[p]{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[p]{2^p n-1} \right\rfloor$$

122-3 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Il n'existe pas de couple (a ; b) de naturels vérifiant $a^2 = 2b^2$; on peut toutefois rechercher les couples vérifiant $a^2 = 2b^2 + 1$ ou $a^2 = 2b^2 - 1$
Aux U.S.A., quand le nombre d'états est passé de 49 à 50, il a fallu modifier la « bannière étoilée » en passant de 7 lignes de 7 étoiles à 5 lignes de 6 étoiles et 4 lignes de 5 étoiles.

Drapeau américain 1959

Drapeau américain 1960

On remarque que $7^2 + 1 = 2\text{x}5^2$ ou encore que $7^2 = 2\text{x}5^2 - 1$. Ainsi $7^2/5^2 = 2 - 1/5^2$ et 7/5 apparaît comme une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Des solutions

118-1 *proposé par Jean Fromentin* :

Vous connaissez peut-être le jeu de stratégie « Quarto ». Voici brièvement rappelé ses règles. Sur un plateau carré 4x4, deux joueurs s'affrontent. Chaque pièce possède quatre caractéristiques, haute ou basse, rouge ou jaune, ronde ou carrée, creuse ou pleine. Ces pièces sont donc au nombre de $2^4 = 16$. Le but du jeu est d'être le premier à aligner sur une ligne, une colonne ou une des deux diagonales quatre pièces ayant une caractéristique commune. En manipulant les pièces du jeu on peut faire apparaître des agencements curieux. Ainsi, sur le cliché ci-contre, vous pouvez observer que les pièces ont été disposées de telle sorte que chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales laissent apparaître sur les quatre pièces les quatre caractéristiques, chacune présente deux fois. La question est maintenant la suivante : combien y a-t-il de telles configurations (aux rotations près du plateau) ?

Solution de Frédéric de Ligt

Les entiers de 0 à 15 peuvent s'écrire en numération binaire de 0000 à 1111. On va recenser le nombre de grilles 4x4 qui contiennent sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur les deux diagonales deux 0 et deux 1 pour chaque rang. Cela revient à chercher une certaine catégorie de carrés magiques d'ordre 4. On examinera ensuite la correspondance qui peut être établie entre cette écriture binaire et les pièces du jeu.

En premier lieu on va chercher parmi ces grilles 4x4 celles où 0000 est placé dans la case en haut à gauche

On va pour cela découper ce problème de dénombrement en 3 étapes.

<u>Première étape</u>

On cherche les grilles 4x4 ne contenant que des 0 et des 1, avec un 0 dans la case en haut à gauche, avec deux 0 et deux 1 sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur les deux diagonales.

Elles sont au nombre de huit.

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1

1

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

2

0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0

3

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

4

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

5

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

6

0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1

7

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

8

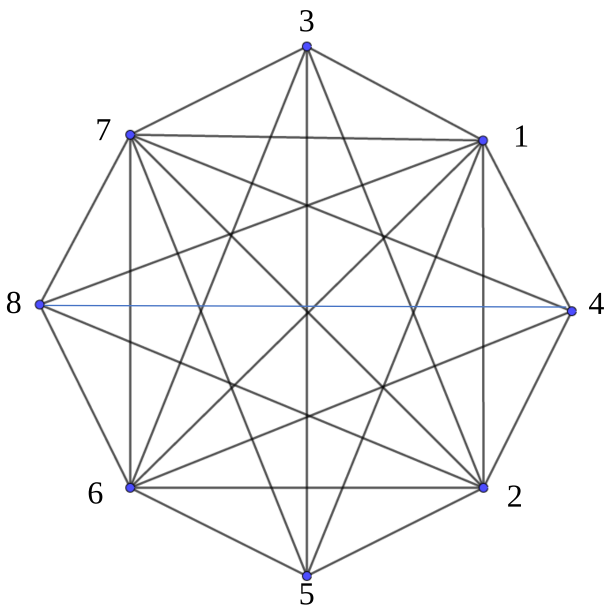
Seconde étape

On considère ensuite tous les couples de grilles et on effectue une concaténation ordonnée, case par case ; on retient les nouvelles grilles qui font apparaître quatre 00, quatre 01, quatre 10 et quatre
11.

On peut résumer le résultat de cette recherche par un graphe dont les sommets représentent ces huit grilles et où les arêtes ne sont pas orientées, ce qui signifie que le rang représenté par une grille peut être échangé avec celui de l'autre grille. Ainsi l'arête qui relie la grille 1 à la grille 2 signifie que les deux grilles ci-dessous sont à retenir. On obtient ainsi 48 grilles 4x4 dont les cases contiennent les nombres 00, 01, 10 et 11.

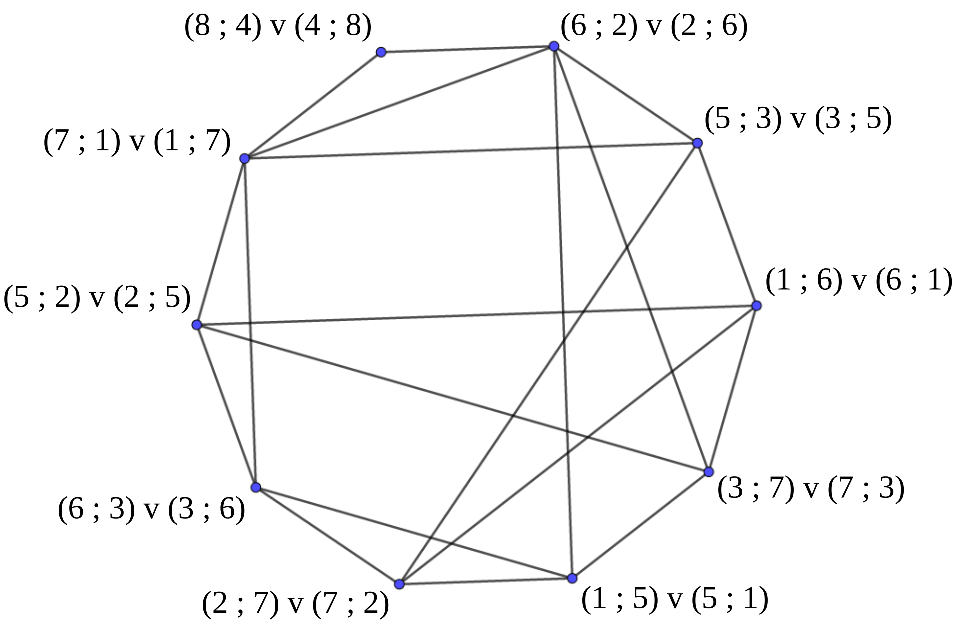
00	01	11	10
11	10	00	01
10	11	01	00
01	00	10	11

00	10	11	01
11	01	00	10
01	11	10	00
10	00	01	11



Troisième étape

On considère ensuite tous les couples de grilles et on effectue une concaténation ordonnée, case par case ; on retient les nouvelles grilles qui font apparaître tous les nombres de 0000 à 1111. (v signifie « ou »).



20 × 8 = 160 solutions

(2 ; 8) v (8 ; 2) $\longleftrightarrow$ (4 ; 6) v (6 ; 4)   8 solutions
(6 ; 8) v (8 ; 6) $\longleftrightarrow$ (4 ; 2) v (2 ; 4)   8 solutions
(1 ; 8) v (8 ; 1) $\longleftrightarrow$ (4 ; 7) v (7 ; 4)   8 solutions
(7 ; 8) v (8 ; 7) $\longleftrightarrow$ (4 ; 1) v (1 ; 4)   8 solutions

(1 ; 2) v (2 ; 1) v (1 ; 3) v (3 ; 1) v (2 ; 3) v (3 ; 2)

72 solutions

(5 ; 6) v (6 ; 5) v (5 ; 7) v (7 ; 5) v (6 ; 7) v (7 ; 6)

Au total on compte 4x8 + 72 + 160 = 264 solutions qui correspondent à des grilles possédant 0000 dans la case en haut à gauche.

En second lieu, pour chaque solution et pour chaque rang on peut changer à loisir tous les 0 en 1 et tous les 1 en 0. Il y a 16 possibilités qui décrivent dans la case en haut à gauche tous les nombres binaires de 0000 à 1111. Une pièce du jeu arbitrairement choisie peut être associée au nombre 0000, on peut décider par exemple que la pièce en haut à gauche du plateau de jeu, présenté dans le cliché de l'énoncé, qui est **dans cet ordre** haute, rouge, ronde et pleine soit associée au nombre 0000.
Ainsi la pièce haute, jaune, carrée et pleine sera associée au nombre 0110, ou bien encore la pièce petite, jaune, ronde et creuse sera associée au nombre 1101. Cela permet d'obtenir les 16 × 264 plateaux de jeu différents qui respectent la contrainte imposée. Si on considère qu'une rotation du plateau ou que son image dans un miroir fournit la même solution, il faut alors diviser par huit ce produit et l'on obtient finalement 2 × 264 = **528 plateaux de jeux** tels que chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales laissent apparaître sur les quatre pièces les quatre caractéristiques, chacune présente deux fois.
On a ainsi mis en évidence une classe de 528 carrés magiques d'ordre 4 parmi les 880 qu'il est possible d'obtenir. Après une brève recherche sur la question je n'ai pas retrouvé ce procédé de construction dans la littérature, mais elle est tellement abondante sur la question que je ne me risquerais pas à prétendre à l'originalité.

119-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $\left\lfloor \sqrt{n\text{-}1}+\sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n-1} \right\rfloor$ où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière du nombre.

Solution de Jean-Christophe Laugier

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \frac{1}{4}$, et $k \in \mathbb{R}$, alors $\lfloor \sqrt{4x-1} \rfloor = k$ ssi $k^2 \leq 4x - 1 < (k+1)^2$.
C'est-à-dire $\dfrac{k^2+1}{4} \leq x < \dfrac{(k+1)^2}{4}$. Posons $I_k = \left[\dfrac{k^2+1}{4} ; \dfrac{(k+1)^2+1}{4} \right[$; les I_k pour $k \geq 2$, constituent une partition de $\left[\dfrac{5}{4} ; +\infty \right[$.
On suppose désormais $k \geq 2$. Posons $u(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$. $u(\dfrac{k^2+1}{4}) = \sqrt{\dfrac{k^2+1}{4} - 1} + \sqrt{\dfrac{k^2+1}{4} + 1}$

et compte tenu de l'inégalité $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}<\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ vérifiée pour tous les réels $a,b\geq 0$ distincts, il vient $u(\frac{k^2+1}{4})<2\sqrt{\frac{k^2+1}{4}}<k+1$. On peut écrire d'autre part $u(\frac{k^2+1}{4})=\frac{k}{2}\left[\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}}\right]$ et l'on a $\left[\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}}\right]^2=2+\frac{2}{k^2}+2\sqrt{1+\frac{2}{k^2}(1-\frac{7,5}{k^2})}$. Par suite $\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}}>2$ pour tout $k\geq 3$ et pour $k=2$, $\sqrt{1-\frac{3}{k^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{k^2}}=2$. Donc $k\leq u(\frac{k^2+1}{4})<k+1$ et $k+1<u(\frac{(k+1)^2+1}{4})<k+2$ pour $k\geq 2$.

La fonction u est continue et strictement croissante sur chaque I_k. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur $k+1$ est atteinte par u en un point x_0 unique de I_k. La résolution de l'équation $u(x)=k+1$ fournit $x_0=\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2}$.

Par conséquent si $x\in\left[\frac{k^2+1}{4};\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2}\right[$ alors $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor=k$.

Si $x\in\left[\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2};\frac{(k+1)^2+1}{4}\right[$ alors $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor+1=k+1$.

Remarquons que $\left[\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2};\frac{(k+1)^2+1}{4}\right[$ ne contient aucun nombre entier.

Soit à présent $x\in\left[1;\frac{5}{4}\right[\subset I_1$ alors $\sqrt{2}\leq u(x)<2$ donc $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor=1$.

<u>Conclusion</u>

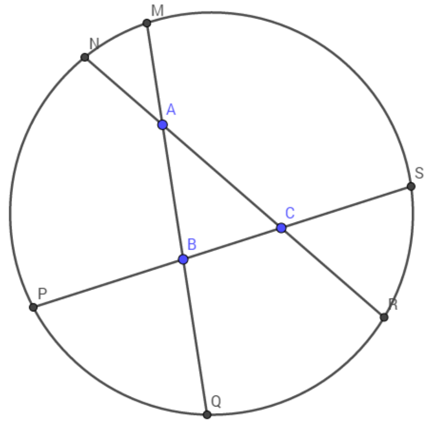
L'ensemble des réels $x\geq 1$ tels que $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor$ est égal à :

$$\left[1;\frac{5}{4}\right[\cup\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty}\left[\frac{k^2+1}{4};\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2}\right[\right).$$

Cet ensemble contient tous les entiers naturels non nuls. Sur l'ensemble complémentaire égal à $\bigcup_{k=2}^{+\infty}\left[\frac{(k+1)^2}{4}+\frac{1}{(k+1)^2};\frac{(k+1)^2+1}{4}\right[$ on a l'égalité $\left\lfloor\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{4x-1}\right\rfloor+1$.

121-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :

Le grand mathématicien anglais J.H. Conway, récemment disparu, a produit d'innombrables contributions sur les sujets les plus divers, dont une très originale, à la géométrie élémentaire baptisée *Cercle de Conway*, qui fait l'objet du problème suivant :



Soit un triangle ABC, on note a = BC, b = AC, c = AB.
Sur les prolongements de [AB] et de [AC] du côté de A, on place respectivement les points M et N tels que AM = AN = a.

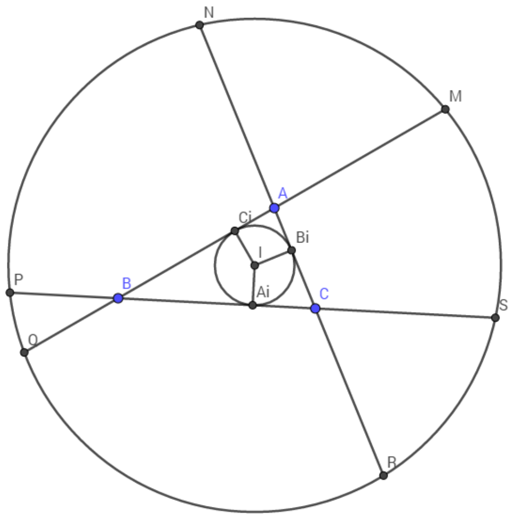
De même sur les prolongements de [BC] et [BA] du côté de B, on place respectivement les points P et Q tels que BP = BQ = b.

Enfin sur les prolongements de [CA] et [CB] du côté de C, on place respectivement les points R et S tels que CR = CS = c.

Montrer que les points M, N, P, Q, R, S sont cocycliques.

Solution de Louis Rivoallan

Soit un triangle ABC. On note a, b, c les distances respectives BC, CA, AB et p le demi-périmètre. Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures, autrement dit le centre du cercle inscrit de ABC noté $\mathcal{C}$. On note respectivement A_i, B_i, C_i les points de contact du cercle et des cotés [BC], [CA] et [AB]. Si on note r le rayon du cercle, on a donc $r = IA_i = IB_i = IC_i$.



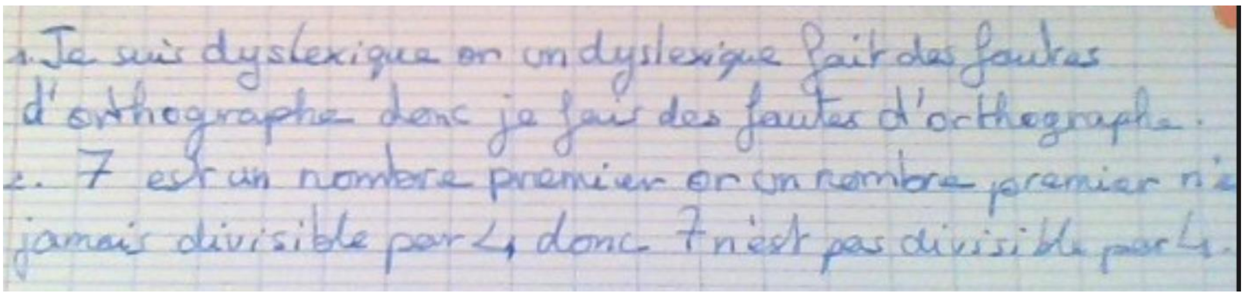
On note $x = BC_i = BA_i$; $y = CA_i = CB_i$ et $z = AC_i = AB_i$.
On a donc $2x + 2y + 2z = 2p$ donc $x + y + z = p$; puisque $a = x + y$; $b = y + z$ et $c = x + z$ on en déduit que $z = p - a$; $x = p - b$ et $y = p - c$.

On construit alors les points M, N, S, R, P, Q.
Par construction AN = a, donc :
$NB_i = a + z = a + p - a = p$.
De même B_iR, A_iS, A_iP, C_iQ, $C_iM = p$.

Les 6 triangles rectangles IB_iN, IB_iR, IC_iM, IC_iQ, IA_iP, IA_iS ont pour côtés de l'angle droit des segments de longueurs r et p, dont les hypoténuses sont égales à $\sqrt{r^2 + p^2}$. Par suite les six points M, N, S, R, Q, P sont sur un même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{r^2 + p^2}$.

Dyslexique mais pas dyslogique

Trouvé dans une copie d'élève :



1. Je suis dyslexique or un dyslexique fait des fautes d'orthographe donc je fais des fautes d'orthographe.
2. 7 est un nombre premier or un nombre premier n'e[st] jamais divisible par 4, donc 7 n'est pas divisible par 4.

Connaissez-vous les jeux construits par EFCE ?

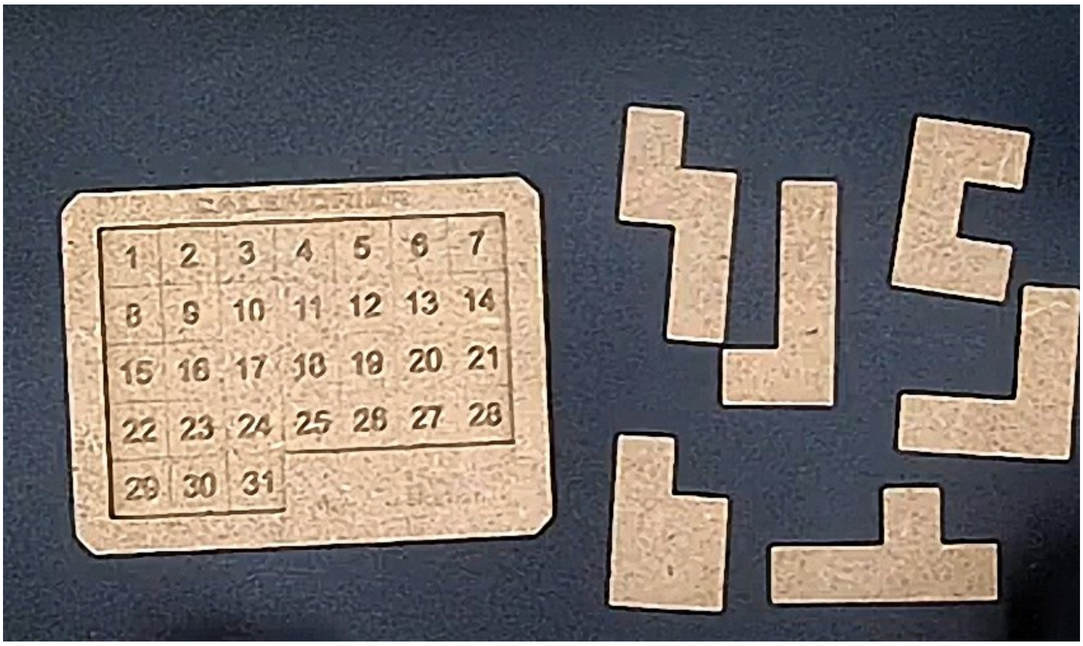
Dominique Gaud

Ce sont des jeux de logiques, des casse-tête, des puzzles qui illustrent parfois des résultats mathématiques. Ils sont conçus et réalisé par François Célerier dans son atelier grâce à une machine laser qui découpe et qui grave.

François Célerier, professeur de mathématiques à la retraite, est auto-entrepreneur et diffuse ses créations. Notre Régionale utilise régulièrement ses compétences pour la réalisation de matériel notamment pour les expositions.

Je vous conseille d'aller faire une visite sur son site https://www.jeux-efce.com/ où vous trouverez l'ensemble de son catalogue.

Il m'a transmis sa dernière réalisation : un calendrier ! Et oui avec 5 pentaminos, vous pouvez obtenir tous les jours de la semaine ! 31 puzzles !



Mais vous pouvez aussi le contacter pour des produits à construire sur mesure :

celerierfr@orange.fr

Hommage

La Régionale de Poitou-Charentes, endolorie par l'attentat qui a coûté la vie à notre collègue, Samuel Paty, présente toutes ses condoléances à sa famille et rend hommage à cet enseignant, exécuté pour avoir exercé son métier.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication F. de Ligt
Comité de rédaction F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne, J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.
Imprimerie IREM de Poitiers. Adresse ci-dessus.
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège Social Voir adresse ci-dessus
Dépôt légal Octobre 2020