Ru – Bri – COL↳AGE

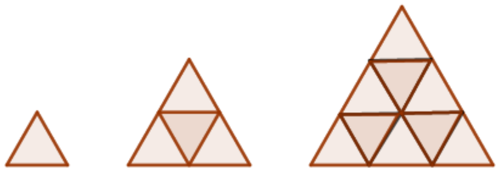
Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

121-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :
Combien de triangles ?



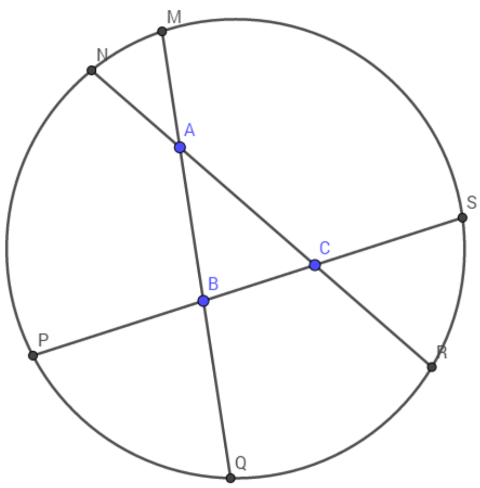
Au rang 1 : 1 triangle
Au rang 2 : 5 triangles (4 avec la pointe en haut et 1 avec la pointe en bas)
Au rang 3 : 13 triangles (10 avec la pointe en haut et 3 avec la pointe en bas)

Quelle est le nombre de triangles au rang n, avec n entier naturel non nul.

121-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Le grand mathématicien anglais J.H. Conway, récemment disparu, a produit d'innombrables contributions sur les sujets les plus divers, dont une très originale, à la géométrie élémentaire baptisée *Cercle de Conway*, qui fait l'objet du problème suivant :

Soit un triangle ABC, on note a = BC, b = AC, c = AB.
Sur les prolongements de [AB] et de [AC] du côté de A, on place respectivement les points M et N tels que
AM = AN = a.
De même sur les prolongements de [BC] et [BA] du côté de B, on place respectivement les points P et Q tels que
BP = BQ = b.
Enfin sur les prolongements de [CA] et [CB] du côté de C, on place respectivement les points R et S tels que
CR = CS = c.

Montrer que les points M, N, P, Q, R, S sont cocycliques.



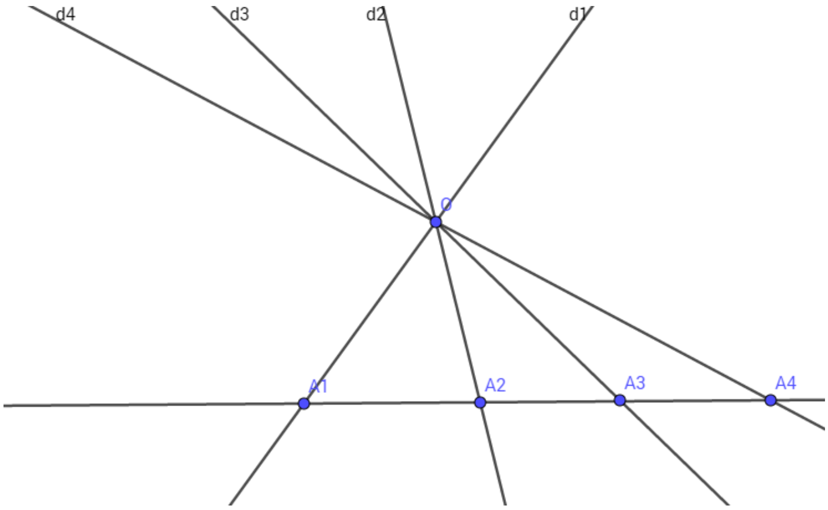
121-3 *proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre supérieur ou égal à 2 sur le corps des réels ou des nombres complexes, quelles sont les matrices M telles que pour toute matrice A on ait :

$$\det(A + M) = \det(A) + \det(M) \ ?$$

Des solutions

67-1 *proposé par Serge Parpay* :

Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont concourantes au point O. Construire une droite d qui coupe ces quatre droites respectivement en A_1, A_2, A_3 et A_4 de telle façon que $A_1A_2 = A_3A_4$.

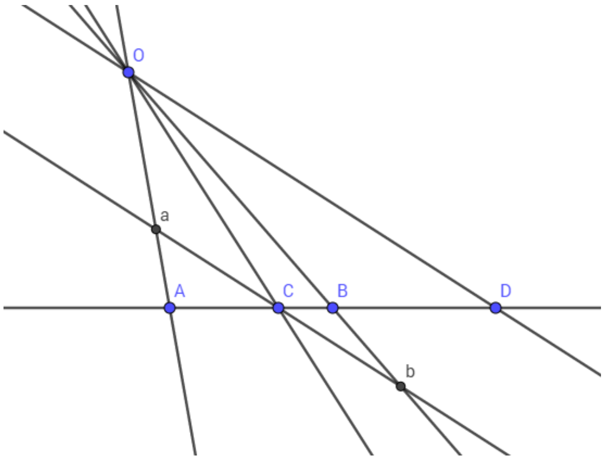


Solution de l'auteur

Préliminaires et rappels :

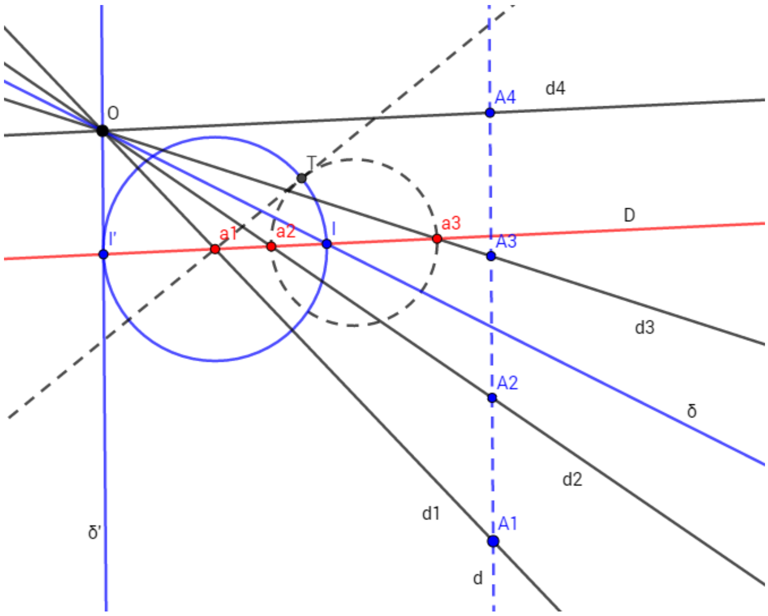
Quatre points A, B, C, D alignés forment une division harmonique si $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. *On écrit par convention (A, B, C, D) = -1. Trois des quatre points d'une division étant donnés, le quatrième est parfaitement déterminé.*
I étant le milieu du segment [AB], on a $IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ *(condition nécessaire et suffisante).*
J étant le milieu de [CD], on a $JC^2 = JD^2 = \overline{JA}.\overline{JB}$ *(idem).*
(A, B, C, D) étant une division harmonique et O étant un point extérieur à la droite qui supporte la division, les droites (OA), (OB), (OC), (OD) forment un faisceau harmonique. On écrit par convention (OA, OB, OC, OD) = -1.

Une parallèle à un des rayons du faisceau est divisé par les trois autres en deux segments égaux (condition nécessaire et suffisante) ; par exemple sur la figure ci-contre aC = Cb : pour le démontrer voir les triangles semblables Aca et ADO d'une part, BCb et BDO d'autre part et utiliser $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.



Un faisceau harmonique découpe sur toute droite non parallèle à un des rayons du faisceau une division harmonique (utiliser l'idée précédente).

Soit d une droite répondant à la question (remarquons que toute parallèle à d, par exemple d', conviendrait également).
$A_1A_2 = A_3A_4$. Les segments $[A_1A_4]$ et $[A_2A_3]$ ont même milieu M. Soit δ la droite passant par les points O et M et soit δ' la parallèle à d passant par O.
M étant le milieu de $[A_2A_3]$, $(d_2, d_3, \delta, \delta') = -1$. M étant le milieu de $[A_1A_4]$, $(d_1, d_4, \delta, \delta') = -1$.
Soit alors une droite D parallèle à d_4 coupant δ en I, δ' en I', d_1 en a_1, d_2 en a_2, d_3 en a_3.
$(d_1, d_4, \delta, \delta') = -1$ et D parallèle à d_4 : donc a_1 milieu de [II'].
$(d_2, d_3, \delta, \delta') = -1$ et a_1 milieu de [II'] : donc $a_1I^2 = a_1I'^2 = = \overline{a_1a_2}.\overline{a_1a_3}$.
Cette relation permet la construction de I et de I', et par suite des droites □ et □'.
<u>Construction</u> : une droite D parallèle à d_4 donne les points a_1, a_2 et a_3 ; on trace un cercle passant par a_2 et a_3, une tangente (a_1T) à ce cercle (on a alors $a_1I^2 = a_1I'^2 = a_1a_2.a_1a_3$) ; le cercle de centre a_1 et de rayon a_1T coupe la droite D aux points I et I'. On construit les droites (OI) i.e. δ et (OI') i.e. δ'. Une droite d parallèle à δ' répondra à la question.



Les deux droites jouent un rôle équivalent dans les faisceaux de droites : de même que toute droite d parallèle à δ', toute droite d' parallèle à δ répond à la question.
Reste à vérifier que cette construction donne bien une solution au problème. Ce qui est immédiat en reprenant les caractéristiques de la figure construite.

118-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier :*

Soit N un entier naturel non nul. Quel est le nombre de solutions de l'équation : $\frac{1}{N}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (a et b entiers naturels non nuls) ?

Solution de Frédéric de Ligt

Tout d'abord on règle le cas N = 1 qui s'écrit de façon unique sous la forme $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

On suppose désormais que N est un entier supérieur ou égal à 2. On doit avoir a > N. On peut donc écrire a sous la forme a = N + k avec k entier naturel non nul.

En conséquence $\frac{1}{b}=\frac{k}{N(N+k)}$ ou encore $k(b - N) = N^2$.

Pour vérifier cette équation d'inconnues k et b il faut et il suffit que k divise N^2 ; or tout entier naturel N supérieur ou égal à 2 peut se factoriser d'une façon unique sous la forme $N=\prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$ où les P_i sont des nombres premiers distincts et les exposants α_i sont des entiers naturels non nuls.

On sait qu'alors le nombre de diviseurs de $N^2=\prod_{i=1}^{n} P_i^{2\alpha_i}$ est $\prod_{i=1}^{n}(2\alpha_i+1)$ qui est donc le nombre de solutions cherchées.

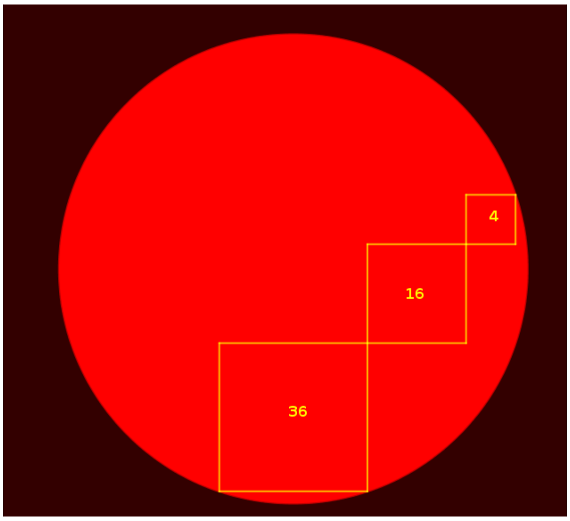
Remarques :

- Les solutions sont alors de la forme : (a ; b) = (N + diviseur de N^2 ; N + N^2/diviseur de N^2)
- Le nombre de solutions trouvé inclus le cas N = 1 en prenant les α_i nuls.

120-2 *proposé par Sébastien Dassule-Debertonne* :

Sans grande difficulté mais joli

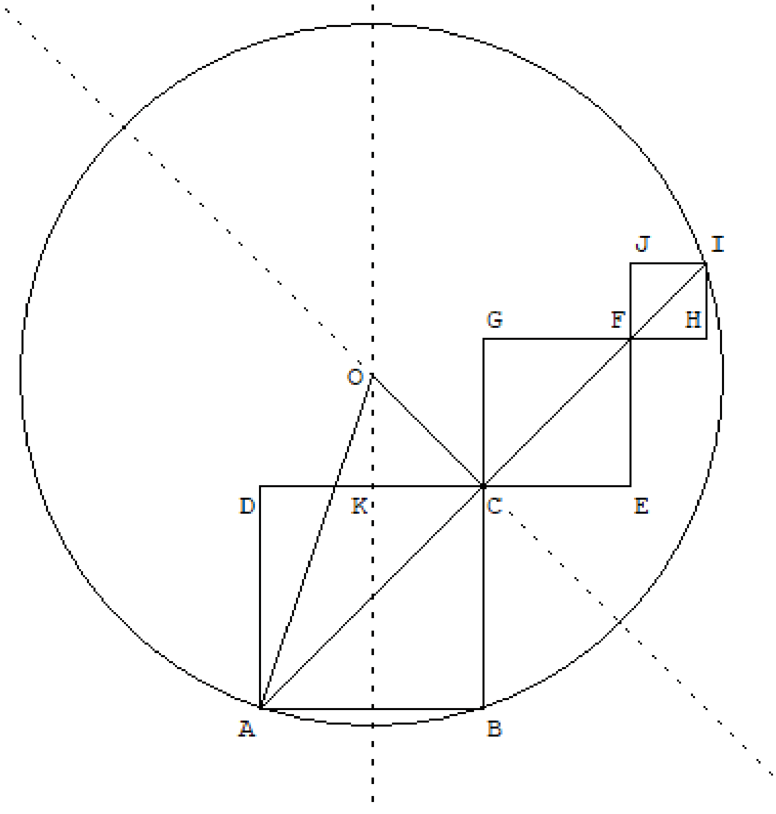
Aire du disque ?



Solution de Jacques Chayé

Les diagonales [AC], [CF] et [FI] sont alignées et AC = $6\sqrt{2}$, CI* = $4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$.
Par conséquent, le point C est le milieu de [AI].

Soit O l'intersection des médiatrices des cordes [AB] et [AI].
Ce point O est le centre du cercle dont on cherche l'aire.
Le triangle ACO est rectangle en C.
D'autre part, soit K le milieu de [CD], on a : $\widehat{ACK}=\frac{\pi}{4}\text{rad}$ donc, $\widehat{KCO}=\frac{\pi}{4}\text{rad}$.
Le triangle rectangle KCO est donc isocèle et OC = $\frac{AC}{2}=3\sqrt{2}$.
Finalement :
$OA^2 = AC^2 + OC^2 = 72 + 18 = 90$.
Le rayon du cercle est donc égal à $\sqrt{90}$ et son aire est égale à 90π.



120-4 *proposé par Jacques Chayé* :

À travers les âges

Quand Bertrand aura l'âge qu'a maintenant son père, sa sœur sera deux fois plus âgée qu'elle ne l'est actuellement et l'âge de son père sera alors le double de celui qu'aura Bertrand lorsque sa sœur aura l'âge actuel de son père.
La somme des trois âges fait un siècle.

Quel est l'âge de chaque personnage ?

Solution de Louis Rivoallan

Soit x, y et z les âges respectifs de Bertrand, de son père et de sa sœur.

	Bertrand	Son père	Sa soeur
Aujourd'hui	x	y	z
Quand Bertrand aura l'âge de son père	$x + (y - x) = y$	$y + (y - x) = 2y - x$	$z + (y - x) = -x + y + z$
Quand sa sœur aura l'âge du père	$x + (y - z) = x + y - z$	$y + (y - z) = 2y - z$	$z + (y - z) = y$

Il n'y a plus qu'à traduire les phrases en équations :
« Sa sœur sera deux fois plus âgée qu'elle ne l'est actuellement » :

$$-x + y + z = 2z, \text{ soit } x - y + z = 0 \;;$$

« L'âge du père sera alors le double de celui qu'aura Bertrand quand sa sœur aura l'âge du père » :

$$2y - x = 2(x + y - z), \text{ soit } 3x - 2z = 0 \;;$$

« La somme des trois âges fait un siècle » :

$$x + y + z = 100.$$

D'où le système :

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$ La solution est $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (20\ ;\ 50\ ;\ 30)$

Bertrand a 20 ans, son père 50 ans et sa sœur 30 ans.