

Les secrets de la table de Pythagore

Dominique Gaud

Je croyais connaître ma table de multiplication mais elle ne m'avait pas tout dit...

Durant la période de confinement, j'ai été amené à aider quelques élèves notamment sur la multiplication. J'ai ressorti de mes vieux cartons quelques subtilités données par cette table qui ont été pour la plupart décrites dans la brochure n°16 de l'APMEP [Elem-Math T2 : La multiplication des naturels à l'école élémentaire](#).

Il y a là matière à éveiller la curiosité à tous les niveaux. Ma curiosité a été quant à elle bien éveillée comme en témoigne la suite de cet article.

Il y a des remarques évidentes qui, si elles peuvent surprendre les plus jeunes, ne sont pas une surprise pour les plus âgés de nos élèves :

- La symétrie par rapport à la diagonale,
- La diagonale qui est formée des carrés des nombres
- Les sauts de n en n dans la table des multiples de n .
- Des nombres apparaissent plus que d'autres et ils sont disposés suivant une forme harmonieuse qui est l'hyperbole.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575
24	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625
26	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	567	594	621	648	675
28	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	588	616	644	672	700
29	29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725

- Certains nombres n'apparaissent que dans la première ligne ou première colonne.

Et puis il y a des propriétés qui surprennent à un premier abord et dont la justification demande que l'on fasse un bon usage du calcul littéral à la fois pour coder mais aussi pour calculer :

- Sur la diagonale la différence des carrés donne la suite des nombres impairs mais on peut aussi dire que la différence entre deux carrés de deux nombres consécutifs est la somme de ces deux nombres : $9^2 - 8^2 = 9 + 8$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

- Choisissons une case au hasard : la somme des nombres situés au-dessus et au-dessous est égale à la somme des nombres situés à sa gauche et à sa droite, ici $30 + 40 = 42 + 28$ et cette somme est le double du nombre central.

15	20	25	30	35
18	24	30	36	42
21	28	35	42	49
24	32	40	48	56
27	36	45	54	63

- Traçons un rectangle quelconque suivant les lignes de cette table.

32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
48	54	60	66	72	78	84	90	96	102
56	63	70	77	84	91	98	105	112	119
64	72	80	88	96	104	112	120	128	136
72	81	90	99	108	117	126	135	144	153
80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : $54 \times 144 = 81 \times 96$.

- Prenons une case et faisons la somme de celles qui l'entoure, on obtient 8 fois le contenu de la case choisie.

...	50	60	70	80
4	55	66	77	88
8	60	72	84	96
2	65	78	91	104
6	70	84	98	112

Mais il y a aussi plus sophistiqué dans cette table :

- Prenons un carré de côté n (ici $n = 7$)

Effectuons la somme des contenus de toutes les cases par lignes.

$$(1 + 2 + \dots + n) + 2 \times (1 + 2 + \dots + n) + \dots + n \times (1 + 2 + \dots + n) = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Or ce résultat rappelle la somme des n premiers cubes ! Mais où sont les cubes ? Dans le gnomon !

x	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

x	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

$$n + 2n + 3n + \dots + n(n-1) + n^2 + 2n + \dots + (n-1)n = 2n(1 + \dots + (n-1)) + n^2 = n^2(n-1) + n = n^3.$$

Ainsi on retrouve, à l'aide de table, que la somme des n premiers cubes est bien le carré de la somme des premiers entiers.

Si les nombres carrés s'alignent parfaitement sur la diagonale, qu'en est-il des nombres figurés plans ?

Nombres triangulaires

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91

Nombres hexagonaux

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120

Nombres pentagonaux

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391
24	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425
26	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459
28	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476
29	29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493
30	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510

La répartition est déjà plus complexe car elle a lieu sur deux droites.

Avez-vous déjà essayé la somme des contenus des diagonales ainsi ?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72

On obtient la suite de nombres :

1 ; 4 ; 10 ; 20 ; 35 etc. Cela ne vous rappelle rien ? Il s'agit des nombres tétraédriques.

Cette table n'a pas encore tout dit. Je vous invite à poursuivre son interrogatoire afin qu'elle fasse des aveux complets.

Balade sur la toile

Sébastien Dassule-Debertonne

Pendant le confinement, j'ai noté un certain nombre de sites intéressants. Je les partage avec vous.

Yvan Monka, créateur du site www.maths-et-tiques.fr (que beaucoup d'entre nous ont remercié pendant le confinement), a déjà adapté son site pour les terminales. Retrouvez ici ses vidéos pour les terminales générales (spécialité et options) : <https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminale> et là celles pour les terminales technologiques <https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminaleT>.

GeoGebra a ouvert une nouvelle fonctionnalité GeoGebra Classroom qui permet de suivre en direct le travail des élèves, d'attribuer du travail spécifique... bref tout ce qui aurait dû être prêt le 11 mars (Ah bon ! ça l'était ?). À découvrir : <https://www.geogebra.org/m/eqxtf55a>

Les démonstrations reviennent en force dans les programmes. Ces deux padlets recensent les obligatoires des programmes en seconde (<https://padlet.com/mathsguyon/5icf1txlu5g1>) et en spécialité de première (<https://padlet.com/mathsguyon/qcm9rly891x3>).

Retrouver un programme oblige à emprunter des méandres pas toujours faciles. Voici une appli pour retrouver d'un clic n'importe quel programme du secondaire : <https://mathsecondaire.glideapp.io/>

Vous en avez rêvé pendant le confinement et ça existe : un programme compatible avec toutes les distributions pour annoter des pdf. En plus c'est gratuit et intègre LaTeX. Les informations sur PDF4Teachers sont à consulter ici : <https://github.com/clementgre/PDF4Teachers/releases/tag/1.2.0>.

L'académie de Bordeaux propose une progression par thème pour l'option maths complémentaires. À étudier : <https://ent2dac-bordeaux.fr/disciplines/mathematiques/option-mathematiques-complementaires/>.

L'espace M@gistère proposait une formation au PNF à propos de l'enseignement scientifique en terminale. La formation est terminée mais les documents sont toujours accessibles à <https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=1980>.

Enfin la Banque Nationale de Sujets pour les E3C est publique. On peut consulter les sujets à l'adresse : <http://quandjepasselebac.education.fr/revisions-la-banque-nationale-de-sujets/>