

Les gammes musicales

Nicolas Minet , IREM&S de Poitiers, professeur au Lycée du Bois d'Amour (Poitiers)

Épisode 4 : Mathématique et musique, des domaines multiformes

Nous achevons ici une présentation des notions musicales qui aident à problématiser le thème sur le son dispensé dans les cours d'Enseignement Scientifique de 1^{ère} générale.

Résumé des épisodes précédents :

- Éclairages sur la musique dans le programme d'enseignement scientifique (définition d'une gamme)
- 7 notes dans la gamme : toujours ? Pourquoi ? (La gamme de Pythagore et les intervalles justes)
- Les cases de la guitare (pour transposer, il faut une gamme également tempérée)

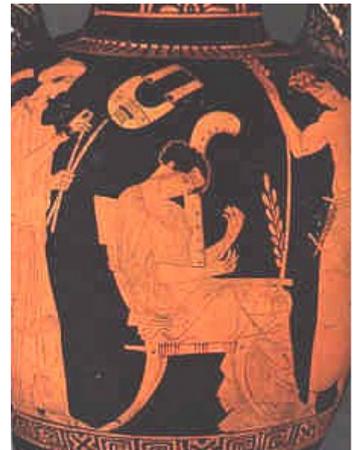
Terminons la saga en replaçant dans leur contexte historique quelques uns de ces éléments-clés.

Petit synopsis de cet épisode 4

Art majeur dans l'Antiquité grecque, la musique forme les esprits vertueux. Elle est un élément incontournable d'une quête de l'harmonie de l'univers.

Par ailleurs, son versant théorique se révèle dans *La Division du Canon* d'Euclide, lequel a suggéré, à l'instar d'autres ouvrages de la même époque, une *approche axiomatique de la musique*.

Pour ces deux raisons, science du nombre et philosophie, la musique a constitué un des piliers de *l'enseignement classique* du Moyen Âge. En effet, le nombre a été considéré comme voie d'accès à l'essence cachée des choses, la musique menant à la foi chrétienne.



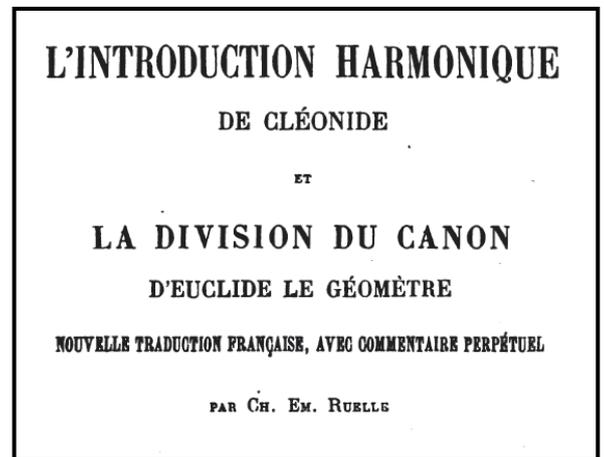
Vers le XV^e siècle, a émergé une insuffisance de la gamme de Pythagore : elle ne permet pas de transposer librement les mélodies. Un tel besoin artistique, parmi d'autres, a contribué à faire voler en éclat les *canons de la musique antique*, à l'instar des anciens modèles astronomiques qui ont connu aussi leurs révolutions. La famille Galilée fut un formidable moteur de cette double implosion.

Restent bien des rencontres majeures entre musique et sciences : la physique des facteurs d'orgues, la physiologie de l'oreille, l'informatique et la musique électronique... autant de sujets pour de futures chroniques !

Les intervalles musicaux étudiés par les Anciens

Moins célèbre que *Les Éléments* d'Euclide (autour de 300 av. J.-C.), la *Division du canon* est souvent attribuée au même auteur¹. Cet ouvrage de théorie musicale est représentatif de l'approche des Anciens de la théorie musicale, à l'exception notable des traités d'Aristoxène pour qui l'expérience sensible devait précéder les calculs déductifs.

Mais quel est ce canon, et que signifie sa division ? C'est le monocorde, instrument théorique tout simple constitué d'une corde vibrante, et qui sert de modèle (ou canon, donc) pour concevoir les intervalles musicaux. Ainsi, une longueur unité de corde (de lyre) étant fixée, toute fraction de cette unité donne une longueur utilisable dans une échelle de notes (= une gamme) dans laquelle on privilégiera certaines fractions. Et pour en choisir, la logique hypothético-déductive entre en scène.



Voyez déjà dans l'introduction² comment justifier l'intrusion des nombres dans la théorie musicale [2] :

Voici le raisonnement suivi par l'auteur : dans le repos et en l'absence de tout mouvement, il y a silence.

Pour qu'un son soit perçu par l'oreille il faut qu'il y ait percussion et mouvement.

Les mouvements plus pressés, plus denses produisent des sons plus aigus. Les mouvements plus espacés, plus rares, produisent des sons plus graves.

Par suite, les sons trop aigus deviennent justes au moyen du relâchement ou de la diminution du mouvement et les sons trop graves, au moyen de la surtension ou de l'augmentation du mouvement.

C'est pourquoi les sons se composent de parties, puisque c'est par un effet d'augmentation ou de diminution (de mouvement) qu'ils deviennent justes. Or toutes choses qui se composent de parties sont susceptibles de rapports numériques (1).

Par conséquent les sons, nécessairement, seront susceptibles de rapports numériques.

Patrice BAILHACHE [3] , rappelle le parti pris qui s'ensuit : « *le postulat fondamental de la Division du canon est alors que "deux sons sont consonants lorsqu'ils correspondent à un intervalle multiple ou surparticulier". Ce postulat établit a priori, sans discussion possible, un rapport entre la qualité sensible de la consonance (le fait que les deux sons soient agréables) et une certaine situation arithmétique.* »

L'intervalle est **multiple** entre deux sons (ou deux segments correspondant à deux longueurs de corde) si le rapport des deux longueurs est un quotient d'entiers. Si de plus ce quotient se réduit à la forme $(n+1)/n$ alors il est dit **superparticulier**, tel l'intervalle de quinte $(3/2)$. La forme logique prévaut sur les sens au point que la consonance de l'intervalle **double** (ou intervalle d'octave) est le résultat d'une démonstration, alors que c'est sans doute le seul rapport commun à toutes les civilisations qui ont chanté ou créé des instruments...

Un dernier point important est la **division de l'intervalle double en deux intervalles égaux** à l'aide de points A, B, C et D tels que $AB = 1$, $AD = 2$ et $AD/AC = AC/AB$. Tout revient donc à trouver un point C tel que $2 = AC \times AC$. J'ai eu le plaisir de demander à Bernard Vitrac³ suite à sa conférence de clôture des JN de La Rochelle en 2008 si les quantités

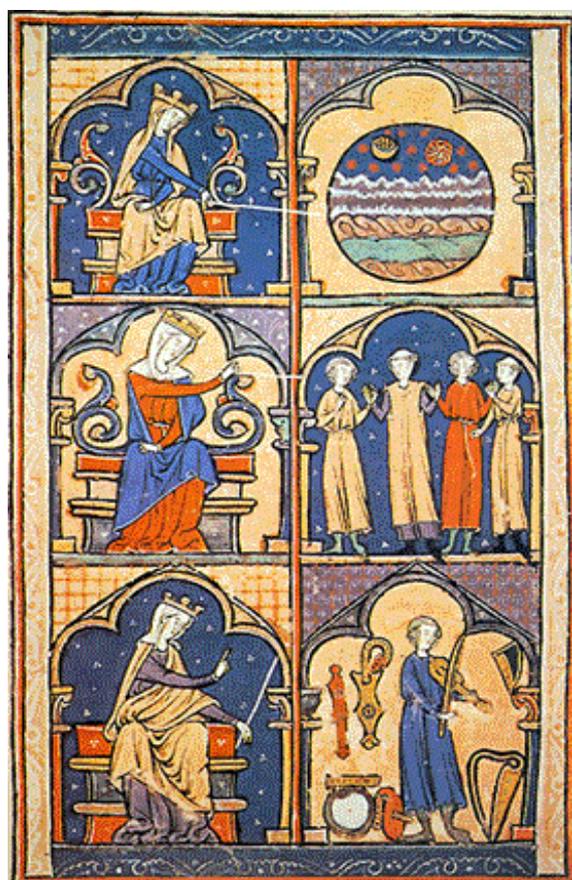
irrationnelles pouvaient trouver leur origine dans ce problème,... et la réponse fut positive : ceci est une hypothèse tout à fait plausible !

Mathématiques et musique dans un même programme au Moyen Âge ?

Dans "*Des arts et des sciences relevant des études libérales*" (vers 550), le questeur Cassiodore, initiateur de la tradition des moines copistes, définit la mathématique ou philosophie doctrinale comme "*la science qui considère la quantité abstraite*" et la divise en : Arithmétique, Musique, Géométrie, Astronomie⁴. Ainsi, la théorie du monocorde fait partie des connaissances transmises dans un enseignement classique supérieur qui se met en place, et qui perdurera jusqu'à la fin du Moyen Âge : les sept arts libéraux sont enseignés aux hommes libres avec un premier cycle d'études littéraires (trivium : grammaire, rhétorique et dialectique) puis un second cycle lié aux mathématiques et nommé quadrivium (décrit ci-dessus). Ceci accompli, la théologie devient accessible, en conformité avec l'expression extraite de la Bible "*Tu as disposé des choses selon poids, nombre et mesure*" (Sagesse, XI, 21) qui relie actes du Créateur et connaissances mathématiques.



On trouve une hiérarchie comparable pour la musique : "*la musica instrumentalis* chantée ou jouée sur un instrument prolonge la nature par l'art ; elle fortifie l'âme des hommes ou *musica humana* ; enfin, la *musica mundana* ou Harmonie des Sphères est une métaphore de la volonté divine qui régit l'Univers" [4]. On comprend que les mathématiques, via la musique et l'astronomie, ont conservé une place centrale dans l'enseignement sous la domination chrétienne !



Quand les arts bousculent l'harmonie divine

La hiérarchie de l'Église Chrétienne réagit à partir du XII^e siècle devant les évolutions de la musique.

En effet, la bonne compréhension des textes liturgiques est perturbée lorsque la scansion des chants religieux est guidée par un rythme, une métrique, et non par le sens du texte lui-même, tourné vers la foi.

Je vous laisse visionner [5] et lire ce savoureux extrait du Concile de Vienne (1311-1312) :

"*Un grave tourment nous bouleverse, à savoir que par suite de la négligence de certains recteurs qui, tant que l'espoir d'une impunité l'a autorisé, ont accoutumé leurs ouailles à*

propager nombre d'infections (...) La plupart des ministres des églises (...) se laissent entraîner à différents forfaits, ce qui dérange bien souvent l'office ecclésiastique en offensant la majesté divine, et en scandalisant l'assistance."

La base des connaissances classiques va finir par se fissurer dans deux domaines, musique et astronomie, qui structuraient l'enseignement du quadrivium : d'une part, les modèles astronomiques vacillent, car les épicycles de Ptolémée ne résisteront pas aux progrès des mesures, observations et pensées des Tycho Brahé, Kepler et autres Copernic. D'autre part, les innovations musicales telles celles impulsées par les fondateurs de l'*Ars Nova* au XIV^e siècle vont se libérer du rôle théologique assigné à la musique. Pour leur rôle dans ce double choc, une famille remarquable mérite un paragraphe pour elle toute seule.

Galilée père et fils bousculent les repères

Sans revenir sur les apports scientifiques du savant italien Galileo Galilei, on se bornera à rappeler que son observation des satellites de Jupiter met fin à la théorie selon laquelle le géocentrisme est universel. **Et d'un.**

Moins connu, mais plus intéressant musicalement parlant, son père Vincenzo Galilei (1520-1591) est l'un des plus éminents compositeurs de l'école musicale florentine. Il va suggérer deux ruptures fondamentales avec l'héritage des Anciens : démentir la légende des proportions des marteaux de Pythagore par une méthode (quasi) expérimentale, et proposer un découpage géométrique de l'octave, autrement dit : tenter de créer la gamme également tempérée. Détaillons un peu [7] :



"Vincenzo n'est pas seulement un théoricien, il est également musicien. Lorsqu'il accorde son luth, il sent, physiquement, la tension exercée sur la corde. Il n'est pas étonnant qu'il ait cherché à vérifier la fable du forgeron, ce qu'aucun savant n'avait pensé à faire auparavant. Il suspend des poids aux cordes à l'extrémité d'un luth, là où elles sont fixées sur les chevilles qui permettent l'accord. Et il constate que pour produire l'octave, il faut non pas doubler le poids, mais le quadrupler. De même, pour produire la quinte (rapport de longueurs de cordes de 2/3), il faut multiplier le poids par 9/4, ce qui exprime bien le carré de l'inverse du rapport de longueur de corde. Et Vincenzo Galilei de commenter ainsi son expérience : Il existe peu de choses qui ne peuvent être pesées, comptées ou mesurées."

Galileo Galilei était à bonne école pour observer le monde, chercher à le quantifier et à le mesurer... Son père a porté un coup décisif aux théories des gammes a priori et, désormais, on déterminera les degrés (ou notes) d'une gamme en tenant compte de l'expérience sensible.

Mais Galilei père fut également élève du maître de la chapelle Saint-Marc à Venise, Gioseffo Zarlino, qui a donné son nom à une gamme basée sur un découpage arithmétique du monocorde en 2, 3, 4, 5... parties égales, ce qui produit des sons qu'on appellerait aujourd'hui *les partiels* de la corde. Si Vincenze Galilei a contesté ce découpage de l'octave, c'est parce que la gamme de son maître, basée sur des fractions, interdit toute transposition car les intervalles entre deux notes sont inégaux. Or le luthiste a pour ambition de déterminer une méthode permettant de résoudre ce problème sur son instrument. Exit la recherche d'harmonie issue de la tradition antique, place à la théorie qui sert un problème pratique. **Et de deux.**

Les nombres constructibles

La fameuse racine douzième de deux est la solution au problème de Galilée père, qui est le premier à proposer en Occident un découpage de l'octave en douze demi-tons égaux. "*Il propose alors le rapport 18/17 pour le demi-ton, afin de calculer la distance entre les frettes de l'instrument*" [6]. La "règle des 18" (voir épisode 3) connue de certains luthiers a pour justification cette approximation par Vincenzo Galilei de la racine douzième de deux dont 18/17 est la première fraction connue.

Dès lors, se pose la question de déterminer une valeur approchée de cet irrationnel de telle sorte que les luthiers pourront le construire concrètement. Il faut alors une valeur approchée et constructible du nombre $^{12}\sqrt{2}$.

Le moine Marin Mersenne (1588-1648) suggère en 1636 de calculer le rapport $2/(3-\sqrt{2})$ et d'en extraire deux fois la racine carrée.



"*Finalement, le tempérament égal adopté depuis le XIX^e siècle par tous les musiciens (sauf les puristes) est un bon compromis, qui a le mérite d'être pratique, même s'il n'est pas réellement juste*" [7]. Ainsi, la recherche de la division de l'octave enclenchée deux millénaires auparavant pour des raisons spéculatives [1] trouve un second souffle dans une motivation pratique (la fabrication d'un luth transpositeur) et une réponse mathématique (les nombres constructibles)

Rideau

Nous avons vu que pour l'*artisan* désireux de construire un instrument, les mathématiques sont parfois indispensables (pour un violon, pas sûr, mais pour une guitare, si !). Pourtant, être matheux ne suffira pas à faire de nous, je le crains, un-e musicien-ne de talent ni un bon luthier... La sensibilité, l'adresse manuelle, le talent d'interprétation, la dextérité avec l'instrument, l'oreille musicale ou l'envie de composer sont ailleurs. Pas incompatibles avec les mathématiques, pourquoi le serait-ce ? Mais ailleurs.

Alors, art ou science ? Les deux, mon capitaine : la musique est multiforme ! Ses dimensions artistique, théologique et scientifique sont entremêlées : tantôt langage oral ou écrit, tantôt objet de spéculation, révélant les tourments des Hommes ou la beauté du monde, la musique est un des rares dénominateurs communs à tous les peuples. Et nous avons l'opportunité d'en parler aux élèves dans l'Enseignement Scientifique de Première Générale. Ne laissons pas passer cette chance...

1 Début XX^e, controverse sur la paternité attribuée à Euclide ! Si Ruelle [2] ne la nie pas, Tannery [1] la conteste en relevant que les deux derniers énoncés sont en contradiction musicale avec les précédents. Ils ont donc été adjoints postérieurement à l'ouvrage original ; or ces deux ultimes résultats étant les seuls à parler de la division d'une corde de lyre, le titre du traité n'est plus justifié ! Ensuite, autant la forme hypothético-déductive est classique, autant l'introduction révèle deux incohérences peu plausibles de la part d'Euclide. Et Tannery d'ajouter que cette œuvre ne fait que suivre dans l'intention un principe de *La République* (VII, 531) où Platon dit que "*dans l'étude de la musique, il ne faut pas préférer les oreilles à la raison*", et "*la recherche des rapports numériques se fait a priori et sans aucune mesure*."

2 L'encadré est la première des deux affirmations qui ont fait tiquer Tannery (cf supra, note 1)

3 https://www.apmep.fr/IMG/pdf/CR_Vitrac_conference.pdf

4 Où trouver de telles associations de champs scientifiques dans les décennies passées et présentes ? Seulement dans des programmes de mathématiques, disons "particuliers" : option de Première et Terminale L (2001-2011), Enseignement Scientifique de Première générale (2019 - ...) voire spécialité mathématiques de Terminale S.

RÉFÉRENCES

- [1] TANNERY Paul, 1904 *Inauthenticité de la « Division du canon» attribuée à Euclide*.
CR des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres Année 1904, N4 pp. 439-445
https://www.persee.fr/doc/crai_0065-0536_1904_num_48_4_19877
- [2] RUELLE Charles Emile, 1906, *Sur l'authenticité probable de la division du canon musical attribuée à Euclide*. Revue des Études Grecques, Tome 19, fascicule 85, pp. 318-320
https://www.persee.fr/doc/reg_0035-2039_1906_num_19_85_6361
- [3] BAILHACHE Patrice, *Sciences et musique : quelques grandes étapes en théorie musicale*
<http://patrice.bailhache.free.fr/thmusique/etapesthmus.html>
Publié dans *Littérature, médecine, société*, N° 13, Université de Nantes, 1996
- [4] CULLIN Olivier, 2002, *Brève histoire de la musique au Moyen-Âge*, Fayard
- [5] PROUST Dominique, 2001, *L'harmonie des sphères*, Seuil
- [6] Video YouTube de la série Kaamelott (Alexandre Astier)
Voir l'extraordinaire épisode **La quinte juste**
<https://youtu.be/gwcCohZ3lpl>



[7] BASKEVITCH François, 2008, *Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie*.

Archives Ouvertes HAL p. 29. Thèse soutenue à l'Université de Nantes
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00423362/document>