Régionale APMEP de Poitou - Charentes
APMEP

Corol'aire

Juin 2020 n°121

Un sondage qui questionne.

Frédéric de Ligt

Un sondage Odoxa vient de sortir dont le titre est sans ambiguïté « Les services numériques, alliés essentiels d'enseignants applaudis, par les français » ; il est visible à partir de ce lien http://www.odoxa.fr/sondage/services-numeriques-allies-essentiels-denseignants-applaudis-francais/.

Les parents louent les enseignants pour leur adaptabilité pendant la période de confinement, attendent de l'institution et des établissements : formation, équipements, sécurisation des données et uniformisation des outils pour pouvoir affronter une éventuelle seconde vague. Est-ce à dire que les parents ont déjà intégré le fait qu'en cas de seconde vague nous ne serions pas plus préparés que pour la première et qu'un confinement généralisé et sévère s'imposerait à nouveau ? Par ailleurs des études récentes tendent à montrer que les enfants ne courent pratiquement aucun risque et ne transmettent pas non plus la maladie.

L'aspect le plus questionnant de ce sondage concerne l'approbation par une grande majorité des sondés de la prolongation, au-delà la période de confinement, de l'utilisation systématique de l'enseignement à distance.

Je pense que les parents s'imaginent qu'ils vont pouvoir solliciter les enseignants 24/24 à la moindre question sur les devoirs des enfants. Et bien je revendique le droit à la déconnexion !

Peut-être est-ce un effet de l'âge, mais pour ma part j'ai mal vécu cet isolement. La solitude devant un écran, même en visioconférence, est pesante à la longue. J'ai choisi un métier de contacts réels, avec des humains en chair et en os, et pas fait de relations virtuelles, désincarnées. Si c'est le chemin que doit prendre petit à petit la transmission des connaissances, des compétences, je pense en particulier à la formation continue du genre

Suite de l'édito page 23)

Sommaire

Rallye.......................... p.2
Maths et Mesure : Allons au bois (1).................. p.3
Les gammes musicales p.6
Les secrets de la table de Pythagore...........p.12
Balade sur la toile ..p. 15
Rubricollage............p.16
Le CLEA et ses productions p.21
Journées Nationales p.23

Ouf, on a réussi !

C'est non sans peine que nous avons finalisé le palmarès du Rallye 2020 en ce début du mois de juin.

En effet, l'épreuve finale s'était déroulée sans problème le jeudi 12 mars... Mais l'université ainsi que toutes les écoles, collèges, lycées ont fermé dès le lundi 15 mars. Nous n'avions absolument pas eu le temps de récupérer les dossiers. Entre les difficultés rencontrées par les collègues pour faire les envois, les frasques de la poste et l'interdiction pour nous de rentrer dans le local qui abritait les dossiers reçus, il nous a été impossible de corriger suivant le planning établi en début d'année.

Nous aurions pu jeter l'éponge, faire partie de ces innombrables événements qui ont avorté durant cette période... mais c'est mal connaître la persévérance de nos super-retraités, Jean et Jacques.

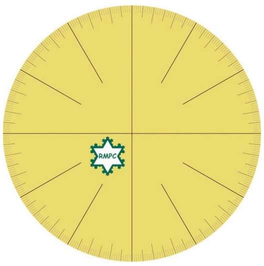
Dès l'annonce du dé-confinement, ils n'ont eu de cesse de tanner l'université pour récupérer les envois puis, après les avoir répertoriés, ils ont appelé les collègues des classes manquantes un à un, vérifié que les classes avaient bien participé, que les envois étaient bien partis...

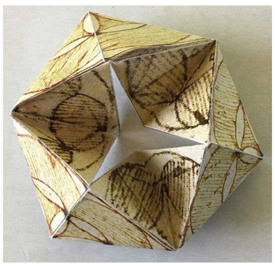
Nous avons ainsi pu organiser les corrections dès le 1er juin, avec une équipe restreinte, certes, (les membres actif·ves de l'équipe ont été exempté·e·s de cette charge) mais qui s'est astreinte à consacrer du temps dans un délai très court afin de pouvoir annoncer les résultats le plus vite possible.

Le jeudi 11 juin, nous réussissions à nous concerter, à distance, malgré les arrivées tardives de dossiers par la poste le jour même, pour élaborer le palmarès... enfin !

Mais la tâche n'était pas encore terminée, même si la remise des prix officielle n'avait pas lieu, il fallait organiser la répartition des lots et leurs envois, attribuer les flocons, éditer les diplômes rédiger et envoyer les bilans... en moins de quinze jours ! Le diaporama des morceaux choisis tardera un peu. Un message sera envoyé aux coordonnateurs lorsqu'il sera disponible sur notre site.

Concernant les lots, chaque élève des classes primées a reçu un rapporteur muet « spécial Rallye » (sans nombres, seulement les graduations), et un kaléidocycle « Léonard de Vinci » à monter. La planche de celui-ci est disponible sur notre site.





L'équipe est fière d'avoir pu mener le travail à son terme même si nous n'avons pas pu respecter tous nos engagements.

Concernant le bilan, nous avons subi, cette année encore, une baisse du nombre de classes participantes ; pourtant la nouvelle formule semble avoir été appréciée, en particulier grâce à l'allègement de la partie thème.

Malgré cette déception, l'équipe est heureuse de constater des productions de grande qualité et que notre Rallye pouvait être un support à des échanges riches entre les écoles et les collèges.

Le Rallye 2020 est fini, vive le Rallye 2021 ! Le thème sera « Maths et mesure »...

Maths et Mesure : Allons au bois (1)

Jean-Paul Guichard

Le ministère.

Avec le regain du chauffage au bois, la coupe, la vente et le transport de ce type de bois, le stère est devenu un sujet d'actualité, bien présent sur la Toile. Il est, depuis 1795, l'unité de mesure de volume du bois de chauffage. Même si cette unité a été officiellement abolie en 1977, elle a toujours cours actuellement dans la coupe et la vente du bois de chauffage. Expérimenter le stérage du bois c'est vivre le passage du liquide au solide, de la contenance au volume, d'une grandeur simple à une grandeur produit, de la dimension 1 à la dimension 3, du cube au cylindre.

Comment réaliser cette expérience sur le pôle 4 *Volumes* de l'exposition, ou dans sa classe ? Nous proposons de le faire en jouant avec un modèle réduit : le *ministère*, réalisation à l'échelle 1/10 du stère, qui est donc un *millistère*.

Mais commençons par le début : le *ministère*, comme la coudée de l'article précédent, est à la fois une unité et un instrument permettant de mesurer, avec cette unité, un volume de ***bois coupé***. On oublie trop souvent que les instruments de mesure doivent être adaptés au matériau et à la forme des objets qu'ils veulent mesurer. La forme du *ministère* : un cube de 10 cm de côté, ouvert pour pouvoir y ranger des *rondins*, morceaux de bois relativement calibrés, coupés en 10 cm de long. Comment réaliser de façon simple ce *ministère* ? Voici quelques idées, et quelques réalisations : 3 carrés de bois, avec colle ou rainurage, 2 carrés de bois et 4 montants en bambou, 1 patron en carton et du ruban adhésif… Remarquons que la réalisation du patron peut se faire en classe et constituer un travail préliminaire intéressant sur le cube.

Ministère Gaud

Ministère Mercier

Ministère Guichard

Pour le bois à stérer, il est facile d'en récupérer au jardin (taille de haies, arbres et arbustes), dans les bois, sur les plages (bois flotté)… Il faudra couper au sécateur ou à la scie des mini rondins de 10 cm de long : un bon exercice sur la mesure des longueurs dans lequel on voit vite l'intérêt d'un rondin étalon. Ces rondins peuvent aussi servir pour mesurer des longueurs.

Le cœur de l'expérience consiste à mesurer le volume d'un tas de rondins à l'aide d'une unité, comme cela est le cas pour les producteurs ou les marchands de bois de chauffage. Pour cela il vous faudra une certaine quantité de morceaux de petit bois taillé en 10 cm de long, un *ministère*, et une dizaine d'élastiques, pour un groupe de 2 à 3 élèves.

Comment procéder ?

La première étape consiste à remplir le *ministère* avec du bois, en disposant bien les *rondins* : la loi stipule qu'ils doivent être rangés parallèlement. On peut constater, sur la première photo, en forêt, qu'avec des rondins fendus en deux, on peut utiliser une disposition en couches croisées qui dispense de tout instrument. Par contre si on les empile tous dans le même sens, on peut expérimenter que le tas s'écroule, d'où la nécessité du *ministère* ou du *stère* instrument comme on le voit sur l'illustration de la fin de l'article, ou bien, en forêt, de pieux verticaux, visibles sur la première photo. Une fois le premier ministère mesuré que va-t-on faire du bois, avant de recommencer ?

C'est la deuxième étape. On peut le verser en vrac pour en faire un nouveau tas, et compter le nombre de fois que l'on aura vidé le ministère. Mais nous proposons de le conserver sous la forme d'un *fagot* : un élève tient les rondins du *ministère* verticaux, et un second enfile deux élastiques. On vient donc de transformer un cube de 10 cm de côté en un cylindre de 10 cm de hauteur. On a sous les yeux deux solides qui n'ont pas la même forme mais qui ont le même volume : ils contiennent la même quantité de bois. Et, de plus, on a réalisé, en acte, la quadrature du cercle, ou plutôt la « circulature » du carré, puisque les bases du cylindre et du cube ont même aire, ce qui se déduit de la formule du volume des prismes et cylindres que l'on trouve sur le panneau 3 du pôle 4. Je vous laisse calculer le diamètre du cylindre.

Après avoir épuisé le tas de bois, la troisième étape consiste à donner la mesure du tas de bois en *ministères*. On a réalisé un certain nombre de fagots, facile à dénombrer, mais il reste un *ministère* qui n'est pas plein. Pour exprimer la mesure du tas on peut utiliser un encadrement par deux entiers, ou ajouter au nombre entier de fagots une fraction estimée du dernier *ministère*. On voit ainsi que le problème de la mesure nous confronte, dès le plus jeune âge, au problème crucial de l'insuffisance des nombres entiers et de la nécessité de créer d'autres nombres, en commençant par le fractionnement de l'unité. Les nombres naissent de la mesure.


Dans l'expérience ci-dessus, on peut dire que le tas mesure plus de 3 ministères, mais moins de 4. On peut estimer sa mesure à 3 et demi (3 + 1/2, 3,5).

On peut, dans une quatrième étape, faire mesurer des volumes de boites en *ministères* en utilisant nos buchettes de bois, matériau facile à manipuler, matériau intermédiaire entre liquide et solide. En voici des illustrations.


Comparer le volume de la boîte cubique de gauche avec un *ministère* solide, comme celui en carton que l'on a placé dedans, permet juste de savoir qu'il est supérieur à 1 *ministère*. Avec les buchettes en bois on peut faire mieux. Mais pour comparer des volumes de solides creux, de récipients, le mieux est d'utiliser du liquide ou un matériau meuble (sable, grain, gravier roulé…). C'est ce qu'ont fait les hommes depuis les temps les plus lointains. Sur l'exposition vous pourrez faire ces transvasements. Ce qui permet de réaliser des tas d'expériences de comparaison sur la contenance de divers récipients. En particulier qu'un cube de 10 cm de côté, un *ministère*, a la même contenance qu'une bouteille d'un litre : formes différentes, volumes égaux.

Occasion de rappeler ou d'apprendre ce que l'on peut lire sur le premier panneau du pôle 4 :

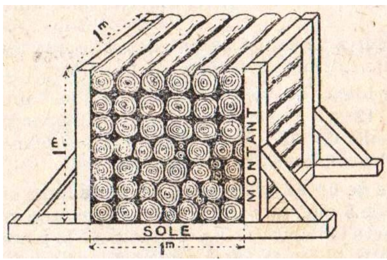
> *En France, depuis 1795, l'unité de volume pour les liquides est le litre (L ou l) avec ses multiples et sous-multiples décimaux.* ***Le litre est la contenance d'un cube de 10 cm de côté.***

Donc : 1 *ministère* = 1 dm^3 = 1 L.

Tout ce que nous venons de proposer peut se faire à partir de la maternelle. Pour les petits (mais peut-être aussi pour tous) il faut utiliser le langage des contenances (lequel des deux objets contient le plus de bois ?). Savoir reconnaitre un cube et un cylindre font partie des attendus du programme de maternelle. Pour le nombre de *ministères* dans le tas de bois, il n'y a pas de problème car les élèves doivent apprendre à dénombrer jusqu'à dix. Il y a donc, dans cette expérimentation, un travail important à faire avec les plus petits, mais qui est aussi intéressant pour les plus grands. Pour ceux-ci, on peut envisager divers prolongements du cycle 3 au lycée. C'est ce que nous verrons dans un deuxième épisode.

Epilogue

Sur la première photo de l'article, on peut essayer d'estimer le nombre de stères que mesure le premier tas. Je vous propose 15. Qu'en pensez-vous ? Evidemment ce pourrait être plus simple sur une photo prise de face. À chacun de choisir le document qui convient le mieux à son projet pédagogique.



Gravures extraites de manuels anciens pour l'école de M. Delfaud & A.Millet (Hachette)
Mathématiques et dessin géométrique, Deuxième cycle, Certificat d'études primaires, 1942 (page 249), et Arithmétique, Cours supérieur 1ère année, Certificat d'études, 1938 (page 164)

Les gammes musicales

Nicolas Minet , IREM&S de Poitiers, professeur au Lycée du Bois d'Amour (Poitiers)

Épisode 4 : Mathématique et musique, des domaines multiformes

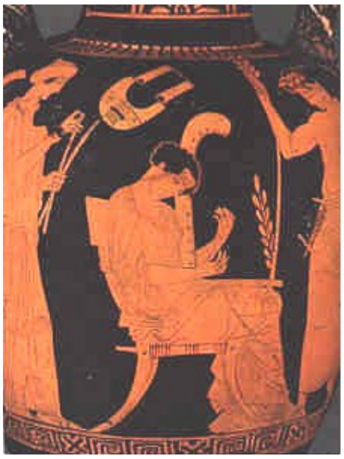
Nous achevons ici une présentation des notions musicales qui aident à problématiser le thème sur le son dispensé dans les cours d'Enseignement Scientifique de 1ère générale.

Résumé des épisodes précédents :

- Éclairages sur la musique dans le programme d'enseignement scientifique (définition d'une gamme)
- 7 notes dans la gamme : toujours ? Pourquoi ? (La gamme de Pythagore et les intervalles justes)
- Les cases de la guitare (pour transposer, il faut une gamme également tempérée)

Terminons la saga en replaçant dans leur contexte historique quelques uns de ces éléments-clés.

Petit synopsis de cet épisode 4



Art majeur dans l'Antiquité grecque, la musique forme les esprits vertueux. Elle est un élément incontournable d'une quête de l'harmonie de l'univers.

Par ailleurs, son versant théorique se révèle dans *La Division du Canon* d'Euclide, lequel a suggéré, à l'instar d'autres ouvrages de la même époque, une *approche axiomatique de la musique*.

Pour ces deux raisons, science du nombre et philosophie, la musique a consitué un des piliers de *l'enseignement classique* du Moyen Âge. En effet, le nombre a été considéré comme voie d'accès à l'essence cachée des choses, la musique menant à la foi chrétienne.

Vers le XVe siècle, a émergé une insuffisance de la gamme de Pythagore : elle ne permet pas de transposer librement les mélodies. Un tel besoin artistique, parmi d'autres, a contribué à faire voler en éclat les *canons de la musique antique*, à l'instar des anciens modèles astronomiques qui ont connu aussi leurs révolutions. La famille Galilée fut un formidable moteur de cette double implosion.

Restent bien des rencontres majeures entre musique et sciences : la physique des facteurs d'orgues, la physiologie de l'oreille, l'informatique et la musique électronique… autant de sujets pour de futures chroniques !

Les intervalles musicaux étudiés par les Anciens

Moins célèbre que *Les Éléments* d'Euclide (autour de 300 av. J.-C.), la *Division du canon* est souvent attribuée au même auteur[1]. Cet ouvrage de théorie musicale est représentatif de l'approche des Anciens de la théorie musicale, à l'exception notable des traités d'Aristoxène pour qui l'expérience sensible devait précéder les calculs déductifs.

Mais quel est ce canon, et que signifie sa division ? C'est le monocorde, instrument théorique tout simple constitué d'une corde vibrante, et qui sert de modèle (ou canon, donc) pour concevoir les intervalle musicaux. Ainsi, une longueur unité de corde (de lyre) étant fixée, toute fraction de cette unité donne une longueur utilisable dans une échelle de notes (= une gamme) dans laquelle on privilégiera certaines fractions. Et pour en choisir, la logique hypotético-déductive entre en scène.

L'INTRODUCTION HARMONIQUE

DE CLÉONIDE

ET

LA DIVISION DU CANON

D'EUCLIDE LE GÉOMÈTRE

NOUVELLE TRADUCTION FRANÇAISE, AVEC COMMENTAIRE PERPÉTUEL

PAR CH. EM. RUELLE

Voyez déjà dans l'introduction[2] comment justifier l'intrusion des nombres dans la théorie musicale [2] :

> Voici le raisonnement suivi par l'auteur : dans le repos et en l'absence de tout mouvement, il y a silence.
>
> Pour qu'un son soit perçu par l'oreille il faut qu'il y ait percussion et mouvement.
>
> Les mouvements plus pressés, plus denses produisent des sons plus aigus. Les mouvements plus espacés, plus rares, produisent des sons plus graves.
>
> Par suite, les sons trop aigus deviennent justes au moyen du relâchement ou de la diminution du mouvement et les sons trop graves, au moyen de la surtension ou de l'augmentation du mouvement.
>
> C'est pourquoi les sons se composent de parties, puisque c'est par un effet d'augmentation ou de diminution (de mouvement) qu'ils deviennent justes. Or toutes choses qui se composent de parties sont susceptibles de rapports numériques (1).
>
> Par conséquent les sons, nécessairement, seront susceptibles de rapports numériques.

Patrice BAILHACHE [3] , rappelle le parti pris qui s'ensuit : « *le postulat fondamental de la* Division du canon *est alors que* "deux sons sont consonants lorsqu'ils correspondent à un intervalle multiple ou surperparticulier". *Ce postulat établit a priori, sans discussion possible, un rapport entre la qualité sensible de la consonance (le fait que les deux sons soient agréables) et une certaine situation arithmétique.* »

L'intervalle est **multiple** entre deux sons (ou deux segments correspondant à deux longueurs de corde) si le rapport des deux longueurs est un quotient d'entiers. Si de plus ce quotient se réduit à la forme (n+1)/n alors il est dit **superparticulier**, tel l'intervalle de quinte (3/2). La forme logique prévaut sur les sens au point que la consonance de l'intervalle **double** (ou intervalle d'octave) est le résultat d'une démonstration, alors que c'est sans doute le seul rapport commun à toutes les civilisations qui ont chanté ou créé des instruments…

Un dernier point important est la **division de l'intervalle double en deux intervalles égaux** à l'aide de points A, B, C et D tels que AB = 1, AD = 2 et AD/AC = AC/AB. Tout revient donc à trouver un point C tel que 2 = AC x AC. J'ai eu le plaisir de demander à Bernard Vitrac[3] suite à sa conférence de clôture des JN de La Rochelle en 2008 si les quantités irrationnelles pouvaient trouver leur origine dans ce problème,... et la réponse fut positive : ceci est une hypothèse tout à fait plausible !

Mathématiques et musique dans un même programme au Moyen Âge ?

Dans "*Des arts et des sciences relevant des études libérales*" (vers 550), le questeur Cassiodore, initiateur de la tradition des moines copistes, définit la mathématique ou philosophie doctrinale comme "*la science qui considère la quantité abstraite*" et la divise en : Arithmétique, Musique, Géométrie, Astronomie[4]. Ainsi, la théorie du monocorde fait partie des connaissances transmises dans un enseignement classique supérieur qui se met en place, et qui perdurera jusqu'à la fin du Moyen Âge : les sept arts libéraux sont enseignés aux hommes libres avec un premier cycle d'études littéraires (trivium : grammaire, rhétorique et dialectique) puis un second cycle lié aux mathématiques et nommé quadrivium (décrit ci-dessus). Ceci accompli, la théologie devient accessible, en conformité avec l'expression extraite de la Bible "*Tu as disposé des choses selon poids, nombre et mesure*" (Sagesse, XI, 21) qui relie actes du Créateur et connaissances mathématiques.

On trouve une hiérarchie comparable pour la musique : "*la musica instrumentalis* chantée ou jouée sur un instrument prolonge la nature par l'art ; elle fortifie l'âme des hommes ou *musica humana* ; enfin, la *musica mundana* ou Harmonie des Sphères est une métaphore de la volonté divine qui régit l'Univers" [4]. On comprend que les mathématiques, via la musique et l'astronomie, ont conservé une place centrale dans l'enseignement sous la domination chrétienne !

Quand les arts bousculent l'harmonie divine

La hiérarchie de l'Eglise Chrétienne réagit à partir du XIIe siècle devant les évolutions de la musique.

En effet, la bonne compréhension des textes liturgiques est perturbée lorsque la scansion des chants religieux est guidée par un rythme, une métrique, et non par le sens du texte lui-même, tourné vers la foi.

Je vous laisse visionner [5] et lire ce savoureux extrait du Concile de Vienne (1311-1312) :

"*Un grave tourment nous bouleverse, à savoir que par suite de la négligence de certains recteurs qui, tant que l'espoir d'une impunité l'a autorisé, ont accoutumé leurs ouailles à* *propager nombre d'infections (...) La plupart des ministres des églises (...) se laissent entraîner à différents forfaits, ce qui dérange bien souvent l'office ecclésiastique en offensant la majesté divine, et en scandalisant l'assistance.*"

La base des connaissances classiques va finir par se fissurer dans deux domaines, musique et astronomie, qui structuraient l'enseignement du quadrivium : d'une part, les modèles astronomiques vacillent, car les épicycles de Ptolémée ne résisteront pas aux progrès des mesures, observations et pensées des Tycho Brahé, Kepler et autres Copernic. D'autre part, les innovations musicales telles celles impulsées par les fondateurs de l'*Ars Nova* au XIVe siècle vont se libérer du rôle théologique assigné à la musique. Pour leur rôle dans ce double choc, une famille remarquable mérite un paragraphe pour elle toute seule.

Galilee père et fils bousculent les repères

Sans revenir sur les apports scientifiques du savant italien Galileo Galilei , on se bornera à rappeler que son observation des satellites de Jupiter met fin à la théorie selon laquelle le géocentrisme est universel. **Et d'un.**

Moins connu, mais plus intéressant musicalement parlant, son père Vicenzo Galilei (1520-1591) est l'un des plus éminents compositeurs de l'école musicale florentine. Il va suggérer deux ruptures fondamentales avec l'héritage des Anciens : démentir la légende des proportions des marteaux de Pythagore par une méthode (quasi) expérimentale, et proposer un découpage géométrique de l'octave, autrement dit : tenter de créer la gamme également tempérée. Détaillons un peu [7] :

"*Vincenzo n'est pas seulement un théoricien, il est également musicien. Lorsqu'il accorde son luth, il sent, physiquement, la tension exercée sur la corde. Il n'est pas étonnant qu'il ait cherché à vérifier la fable du forgeron, ce qu'aucun savant n'avait pensé à faire auparavant. Il suspend des poids aux cordes à l'extrémité d'un luth, là où elles sont fixées sur les chevilles qui permettent l'accord. Et il constate que pour produire l'octave, il faut non pas doubler le poids, mais le quadrupler. De même, pour produire la quinte (rapport de longueurs de cordes de 2/3), il faut multiplier le poids par 9/4, ce qui exprime bien le carré de l'inverse du rapport de longueur de corde. Et Vincenzo Galilei de commenter ainsi son expérience : Il existe peu de choses qui ne peuvent être pesées, comptées ou mesurées.*"

Galileo Galilei était à bonne école pour observer le monde, chercher à le quantifier et à le mesurer... Son père a porté un coup décisif aux théories des gammes a priori et, désormais, on déterminera les degrés (ou notes) d'une gamme en tenant compte de l'expérience sensible.

Mais Galilei père fut également élève du maître de la chapelle Saint-Marc à Venise, Gioseffo Zarlino, qui a donné son nom à une gamme basée sur un découpage arithmétique du monocorde en 2, 3, 4, 5... parties égales, ce qui produit des sons qu'on appellerait aujourd'hui *les partiels* de la corde. Si Vincenze Galilei a contesté ce découpage de l'octave, c'est parce que la gamme de son maître, basée sur des fractions, interdit toute transposition car les intervalles entre deux notes sont inégaux. Or le luthiste a pour ambition de déterminer une méthode permettant de résoudre ce problème sur son instrument. Exit la recherche d'harmonie issue de la tradition antique, place à la théorie qui sert un problème pratique. **Et de deux.**

Les nombres constructibles

La fameuse racine douzième de deux est la solution au problème de Galilée père, qui est le premier à proposer en Occident un découpage de l'octave en douze demi-tons égaux. "*Il propose alors le rapport 18/17 pour le demi-ton, afin de calculer la distance entre les frettes de l'instrument*" [6]. La "règle des 18" (voir épisode 3) connue de certains luthiers a pour justification cette approximation par Vincenzo Galilei de la racine douzième de deux dont 18/17 est la première fraction connue.

Dès lors, se pose la question de déterminer une valeur approchée de cet irrationnel de telle sorte que les luthiers pourront le construire concrètement. Il faut alors une valeur approchée et constructible du nombre $\sqrt[12]{2}$.

Le moine Marin Mersenne (1588-1648) suggère en 1636 de calculer le rapport $2/(3-\sqrt{2})$ et d'en extraire deux fois la racine carrée.

"*Finalement, le tempérament égal adopté depuis le XIX^e^ siècle par tous les musiciens (sauf les puristes) est un bon compromis, qui a le mérite d'être pratique, même s'il n'est pas réellement juste*" [7]. Ainsi, la recherche de la division de l'octave enclenchée deux millénaires auparavant pour des raisons spéculatives [1] trouve un second souffle dans une motivation pratique (la fabrication d'un luth transpositeur) et une réponse mathématique (les nombres constructibles)

Rideau

Nous avons vu que pour l'*artisan* désireux de construire un instrument, les mathématiques sont parfois indispensables (pour un violon, pas sûr, mais pour une guitare, si !). Pourtant, être matheux ne suffira pas à faire de nous, je le crains, un·e musicien·ne de talent ni un bon luthier... La sensibilité, l'adresse manuelle, le talent d'interprétation, la dextérité avec l'instrument, l'oreille musicale ou l'envie de composer sont ailleurs. Pas incompatibles avec les mathématiques, pourquoi le serait-ce ? Mais ailleurs.

Alors, art ou science ? Les deux, mon capitaine : la musique est multiforme ! Ses dimensions artistique, théologique et scientifique sont entremêlées : tantôt langage oral ou écrit, tantôt objet de spéculation, révélant les tourments des Hommes ou la beauté du monde, la musique est un des rares dénominateurs communs à tous les peuples. Et nous avons l'opportunité d'en parler aux élèves dans l'Enseignement Scientifique de Première Générale. Ne laissons pas passer cette chance...

---

1 Début XX^e^, controverse sur la paternité attribuée à Euclide ! Si Ruelle [2] ne la nie pas, Tannery [1] la conteste en relevant que les deux derniers énoncés sont en contradiction musicale avec les précédents. Ils ont donc été adjoints postérieurement à l'ouvrage original ; or ces deux ultimes résultats étant les seuls à parler de la division d'une corde de lyre, le titre du traité n'est plus justifié ! Ensuite, autant la forme hypotético-déductive est classique, autant l'introduction révèle deux incohérences peu plausibles de la part d'Euclide. Et Tannery d'ajouter que cette œuvre ne fait que suivre dans l'intention un principe de *La République* (VII, 531) où Platon dit que "*dans l'étude de la musique, il ne faut pas préférer les oreilles à la raison*", et "*la recherche des rapports numériques se fait a priori et sans aucune mesure.*"

2 L'encadré est la première des deux affirmations qui ont fait tiquer Tannery (cf supra, note 1)

3 https://www.apmep.fr/IMG/pdf/CR_Vitrac_conference.pdf

4 Où trouver de telles associations de champs scientifiques dans les décennies passées et présentes ? Seulement dans des programmes de mathématiques, disons .... "particuliers" : option de Première et Terminale L (2001-2011), Enseignement Scientifique de Première générale (2019 - ...) voire spécialité mathématiques de Terminale S.

Références

[1] TANNERY Paul, 1904 *Inauthenticité de la «* Division du canon *» attribuée à Euclide*.

CR des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres Année 1904, N.4 pp. 439-445

https://www.persee.fr/doc/crai_0065-0536_1904_num_48_4_19877

[2] RUELLE Charles Emile, 1906, *Sur l'authenticité probable de la division du canon musical attribuée à Euclide*. Revue des Études Grecques, Tome 19, fascicule 85, pp. 318-320

https://www.persee.fr/doc/reg_0035-2039_1906_num_19_85_6361

[3] BAILHACHE Patrice, *Sciences et musique : quelques grandes étapes en théorie musicale*

http://patrice.bailhache.free.fr/thmusique/etapesthmus.html

Publié dans *Littérature, médecine, société*, N° 13, Université de Nantes, 1996

[4] CULLIN Olivier, 2002, *Brève histoire de la musique au Moyen-Âge*, Fayard

[5] PROUST Dominique, 2001, *L'harmonie des sphères*, Seuil

[6] Video YouTube de la série Kaamelott (Alexandre Astier)

Voir l'extraordinaire épisode **La quinte juste**

https://youtu.be/gwcCohZ3lpI

[7] BASKEVITCH François, 2008, *Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie*.

Archives Ouvertes HAL p. 29. Thèse soutenue à l'Université de Nantes https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00423362/document

Les secrets de la table de Pythagore

Dominique Gaud

Je croyais connaître ma table de multiplication mais elle ne m'avait pas tout dit…

Durant la période de confinement, j'ai été amené à aider quelques élèves notamment sur la multiplication. J'ai ressorti de mes vieux cartons quelques subtilités données par cette table qui ont été pour la plupart décrites dans la brochure n°16 de l'APMEP *Elem-Math T2 : La multiplication des naturels à l'école élémentaire*.

Il y a là matière à éveiller la curiosité à tous les niveaux. Ma curiosité a été quant à elle bien éveillée comme en témoigne la suite de cet article.

Il y a des remarques évidentes qui, si elles peuvent surprendre les plus jeunes, ne sont pas une surprise pour les plus âgés de nos élèves :

- La symétrie par rapport à la diagonale,
- La diagonale qui est formée des carrés des nombres
- Les sauts de n en n dans la table des multiples de n.
- Des nombres apparaissent plus que d'autres et ils sont disposés suivant une forme harmonieuse qui est l'hyperbole.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575
24	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625
26	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	567	594	621	648	675
28	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	588	616	644	672	700
29	29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725

- Certains nombres n'apparaissent que dans la première ligne ou première colonne.

Et puis il y a des propriétés qui surprennent à un premier abord et dont la justification demande que l'on fasse un bon usage du calcul littéral à la fois pour coder mais aussi pour calculer :

- Sur la diagonale la différence des carrés donne la suite des nombres impairs mais on peut aussi dire que la différence entre deux carrés de deux nombres consécutifs est la somme de ces deux nombres : $9^2 - 8^2 = 9 + 8$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

- Choisissons une case au hasard : la somme des nombres situés au-dessus et au-dessous est égale à la somme des nombres situés à sa gauche et à sa droite, ici 30 + 40 = 42 + 28 et cette somme est le double du nombre central.

15	20	25	30	35
18	24	30	36	42
21	28	35	42	49
24	32	40	48	56
27	36	45	54	63

- Traçons un rectangle quelconque suivant les lignes de cette table.

32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
48	54	60	66	72	78	84	90	96	102
56	63	70	77	84	91	98	105	112	119
64	72	80	88	96	104	112	120	128	136
72	81	90	99	108	117	126	135	144	153
80	90	100	110	120	130	140	150	160	170

Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : 54 x 144 = 81 x 96.

- Prenons une case et faisons la somme de celles qui l'entoure, on obtient 8 fois le contenu de la case choisie.

4	55	66	77	[illegible]
8	60	72	84	[illegible]
2	65	78	91	[illegible]

Mais il y a aussi plus sophistiqué dans cette table :

- Prenons un carré de côté n (ici $n = 7$)

Effectuons la somme des contenus de toutes les cases par lignes.

$(1 + 2 + \ldots + n) + 2 \times (1 + 2 + \ldots + n) + \ldots + n \times (1 + 2 + \ldots + n) = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Or ce résultat rappelle la somme des n premiers cubes ! Mais où sont les cubes ? Dans le gnomon !

x	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

x	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	[illegible]
3	3	6	9	12	15	18	[illegible]
4	4	8	12	16	20	24	[illegible]
5	5	10	15	20	25	30	[illegible]
6	6	12	18	24	30	36	[illegible]

$$n + 2n + 3n + \ldots + n(n - 1) + n^2 + 2n + \ldots + (n - 1)\,n = 2n(1 + \ldots + (n - 1)) + n^2 = n^2(n - 1) + n = n^3.$$

Ainsi on retrouve, à l'aide de table, que la somme des n premiers cubes est bien le carré de la somme des premiers entiers.

Si les nombres carrés s'alignent parfaitement sur la diagonale, qu'en est-il des nombres figurés plans ?

Nombres triangulaires

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91

Nombres hexagonaux

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120

Nombres pentagonaux

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391
24	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425
26	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459
28	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476
29	29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493
30	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510

La répartition est déjà plus complexe car elle a lieu sur deux droites.

Avez-vous déjà essayé la somme des contenus des diagonales ainsi ?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72

On obtient la suite de nombres :

1 ; 4 ; 10 ; 20 ; 35 etc. Cela ne vous rappelle rien ? Il s'agit des nombres tétraédriques.

Cette table n'a pas encore tout dit. Je vous invite à poursuivre son interrogatoire afin qu'elle fasse des aveux complets.

Balade sur la toile

Sébastien Dassule-Debertonne

Pendant le confinement, j'ai noté un certain nombre de sites intéressants. Je les partage avec vous.

Yvan Monka, créateur du site www.maths-et-tiques.fr (que beaucoup d'entre nous ont remercié pendant le confinement), a déjà adapté son site pour les terminales. Retrouvez ici ses vidéos pour les terminales générales (spécialité et options) : https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminale et là celles pour les terminales technologiques https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminaleT.

GeoGebra a ouvert une nouvelle fonctionalité GeoGebra Classroom qui permet de suivre en direct le travail des élèves, d'attribuer du travail spécifique... bref tout ce qui aurait dû être prêt le 11 mars (Ah bon ! ça l'était ?). À découvrir : https://www.geogebra.org/m/eqxtf55a

Les démonstrations reviennent en force dans les programmes. Ces deux padlets recensent les obligatoires des programmes en seconde (https://padlet.com/mathsguyon/5icf1txlu5g1) et en spécialité de première (https://padlet.com/mathsguyon/qcm9rly891x3).

Retrouver un programme oblige à emprunter des méandres pas toujours faciles. Voici une appli pour retrouver d'un clic n'importe quel programme du secondaire : https://mathsecondaire.glideapp.io/

Vous en avez rêvé pendant le confinement et ça existe : un programme compatible avec toutes les distributions pour annoter des pdf. En plus c'est gratuit et intègre LaTeX. Les informations sur PDF4Teachers sont à consulter ici : https://github.com/clementgre/PDF4Teachers/releases/tag/1.2.0.

L'académie de Bordeaux propose une progression par thème pour l'option maths complémentaires. À étudier : https://ent2d.ac-bordeaux.fr/disciplines/mathematiques/option-mathematiques-complementaires/.

L'espace M@gistère proposait une formation au PNF à propos de l'enseignement scientifique en terminale. La formation est terminée mais les documents sont toujours accessibles à https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=1980.

Enfin la Banque Nationale de Sujets pour les E3C est publique. On peut consulter les sujets à l'adresse : http://quandjepasselebac.education.fr/revisions-la-banque-nationale-de-sujets/

Ru – Bri – COL↳AGE

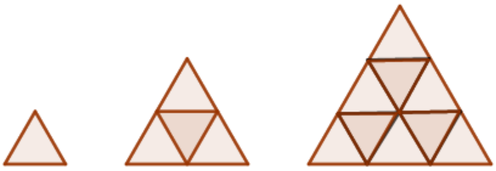
Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

121-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :
Combien de triangles ?



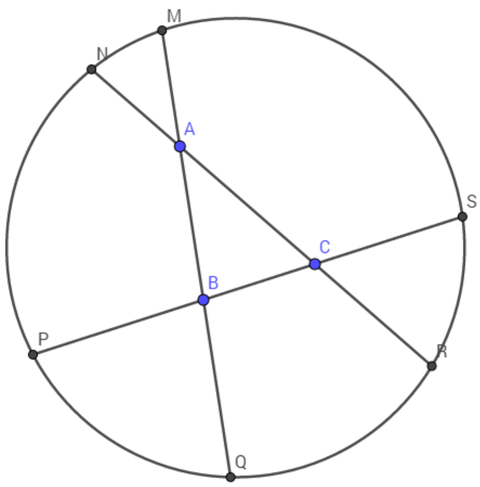
Au rang 1 : 1 triangle
Au rang 2 : 5 triangles (4 avec la pointe en haut et 1 avec la pointe en bas)
Au rang 3 : 13 triangles (10 avec la pointe en haut et 3 avec la pointe en bas)

Quelle est le nombre de triangles au rang *n*, avec *n* entier naturel non nul.

121-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Le grand mathématicien anglais J.H. Conway, récemment disparu, a produit d'innombrables contributions sur les sujets les plus divers, dont une très originale, à la géométrie élémentaire baptisée *Cercle de Conway*, qui fait l'objet du problème suivant :

Soit un triangle ABC, on note a = BC, b = AC, c = AB.
Sur les prolongements de [AB] et de [AC] du côté de A, on place respectivement les points M et N tels que AM = AN = a.
De même sur les prolongements de [BC] et [BA] du côté de B, on place respectivement les points P et Q tels que BP = BQ = b.
Enfin sur les prolongements de [CA] et [CB] du côté de C, on place respectivement les points R et S tels que CR = CS = c.

Montrer que les points M, N, P, Q, R, S sont cocycliques.



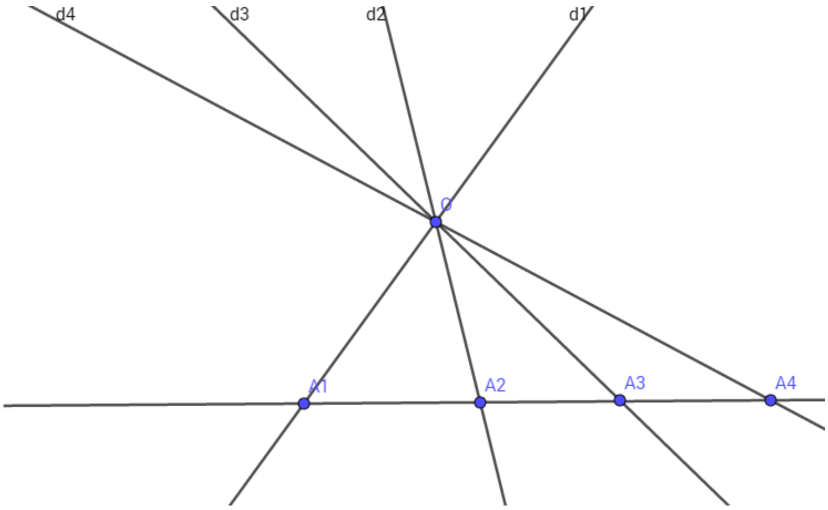
121-3 *proposé par Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre supérieur ou égal à 2 sur le corps des réels ou des nombres complexes, quelles sont les matrices M telles que pour toute matrice A on ait :

$$\det(A + M) = \det(A) + \det(M) ?$$

Des solutions

67-1 *proposé par Serge Parpay* :

Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont concourantes au point O. Construire une droite d qui coupe ces quatre droites respectivement en A_1, A_2, A_3 et A_4 de telle façon que $A_1A_2 = A_3A_4$.

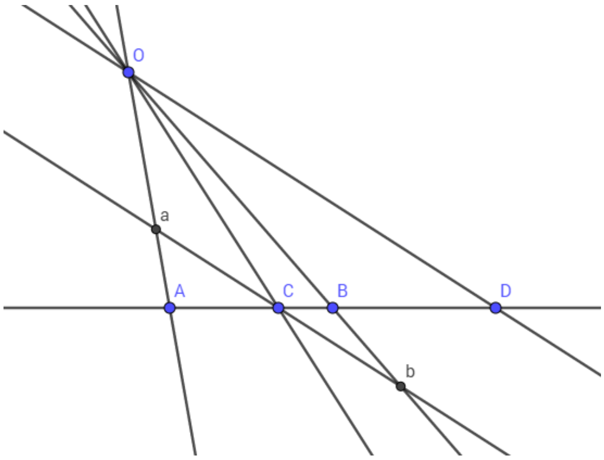


Solution de l'auteur

Préliminaires et rappels :

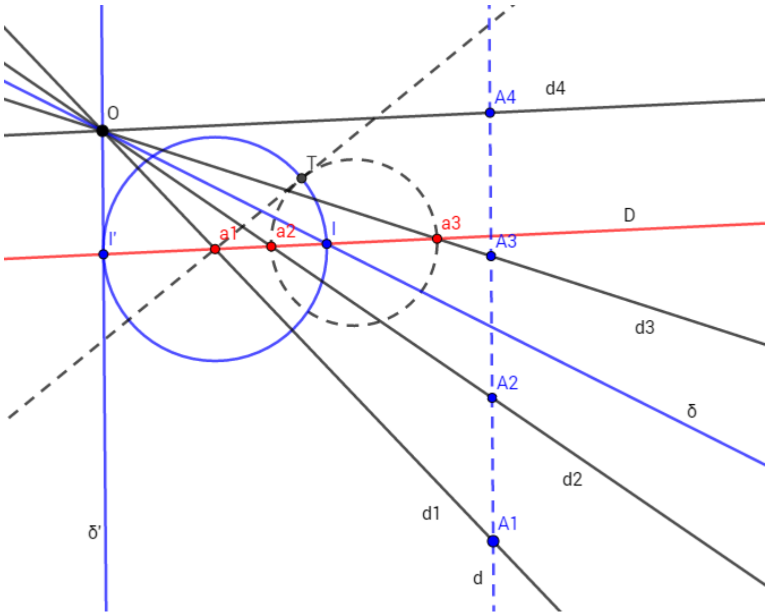
Quatre points A, B, C, D alignés forment une division harmonique si $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. *On écrit par convention (A, B, C, D) = -1. Trois des quatre points d'une division étant donnés, le quatrième est parfaitement déterminé.*
I étant le milieu du segment [AB], on a $IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ *(condition nécessaire et suffisante).*
J étant le milieu de [CD], on a $JC^2 = JD^2 = \overline{JA}.\overline{JB}$ *(idem).*
(A, B, C, D) étant une division harmonique et O étant un point extérieur à la droite qui supporte la division, les droites (OA), (OB), (OC), (OD) forment un faisceau harmonique. On écrit par convention (OA, OB, OC, OD) = -1.

Une parallèle à un des rayons du faisceau est divisé par les trois autres en deux segments égaux (condition nécessaire et suffisante) ; par exemple sur la figure ci-contre aC = Cb : pour le démontrer voir les triangles semblables Aca et ADO d'une part, BCb et BDO d'autre part et utiliser $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.



Un faisceau harmonique découpe sur toute droite non parallèle à un des rayons du faisceau une division harmonique (utiliser l'idée précédente).

Soit d une droite répondant à la question (remarquons que toute parallèle à d, par exemple d', conviendrait également).
$A_1A_2 = A_3A_4$. Les segments $[A_1A_4]$ et $[A_2A_3]$ ont même milieu M. Soit δ la droite passant par les points O et M et soit δ' la parallèle à d passant par O.
M étant le milieu de $[A_2A_3]$, $(d_2, d_3, \delta, \delta') = -1$. M étant le milieu de $[A_1A_4]$, $(d_1, d_4, \delta, \delta') = -1$.
Soit alors une droite D parallèle à d_4 coupant δ en I, δ' en I', d_1 en a_1, d_2 en a_2, d_3 en a_3.
$(d_1, d_4, \delta, \delta') = -1$ et D parallèle à d_4 : donc a_1 milieu de [II'].
$(d_2, d_3, \delta, \delta') = -1$ et a_1 milieu de [II'] : donc $a_1I^2 = a_1I'^2 = = \overline{a_1a_2}.\overline{a_1a_3}$.
Cette relation permet la construction de I et de I', et par suite des droites □ et □'.
<u>Construction</u> : une droite D parallèle à d_4 donne les points a_1, a_2 et a_3 ; on trace un cercle passant par a_2 et a_3, une tangente (a_1T) à ce cercle (on a alors $a_1I^2 = a_1I'^2 = a_1a_2.a_1a_3$) ; le cercle de centre a_1 et de rayon a_1T coupe la droite D aux points I et I'. On construit les droites (OI) i.e. δ et (OI') i.e. δ'. Une droite d parallèle à δ' répondra à la question.



Les deux droites jouent un rôle équivalent dans les faisceaux de droites : de même que toute droite d parallèle à δ', toute droite d' parallèle à δ répond à la question.
Reste à vérifier que cette construction donne bien une solution au problème. Ce qui est immédiat en reprenant les caractéristiques de la figure construite.

118-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier :*

Soit N un entier naturel non nul. Quel est le nombre de solutions de l'équation : $\frac{1}{N}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (a et b entiers naturels non nuls) ?

Solution de Frédéric de Ligt

Tout d'abord on règle le cas N = 1 qui s'écrit de façon unique sous la forme $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

On suppose désormais que N est un entier supérieur ou égal à 2. On doit avoir a > N. On peut donc écrire a sous la forme a = N + k avec k entier naturel non nul.

En conséquence $\frac{1}{b}=\frac{k}{N(N+k)}$ ou encore $k(b - N) = N^2$.

Pour vérifier cette équation d'inconnues k et b il faut et il suffit que k divise N^2 ; or tout entier naturel N supérieur ou égal à 2 peut se factoriser d'une façon unique sous la forme $N=\prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$ où les P_i sont des nombres premiers distincts et les exposants α_i sont des entiers naturels non nuls.

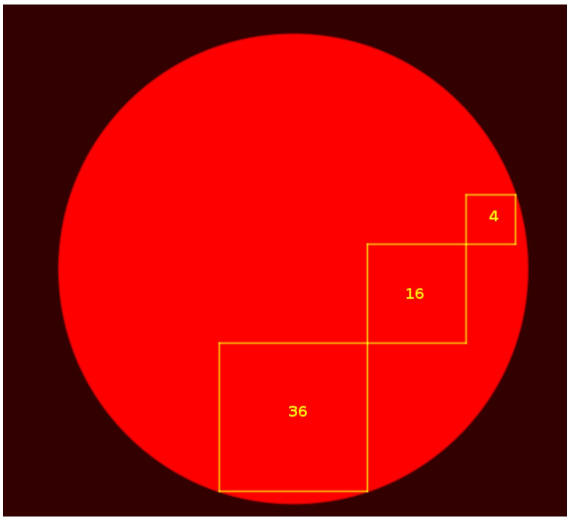
On sait qu'alors le nombre de diviseurs de $N^2=\prod_{i=1}^{n} P_i^{2\alpha_i}$ est $\prod_{i=1}^{n}(2\alpha_i+1)$ qui est donc le nombre de solutions cherchées.

Remarques :

- Les solutions sont alors de la forme : (a ; b) = (N + diviseur de N^2 ; N + N^2/diviseur de N^2)
- Le nombre de solutions trouvé inclus le cas N = 1 en prenant les α_i nuls.

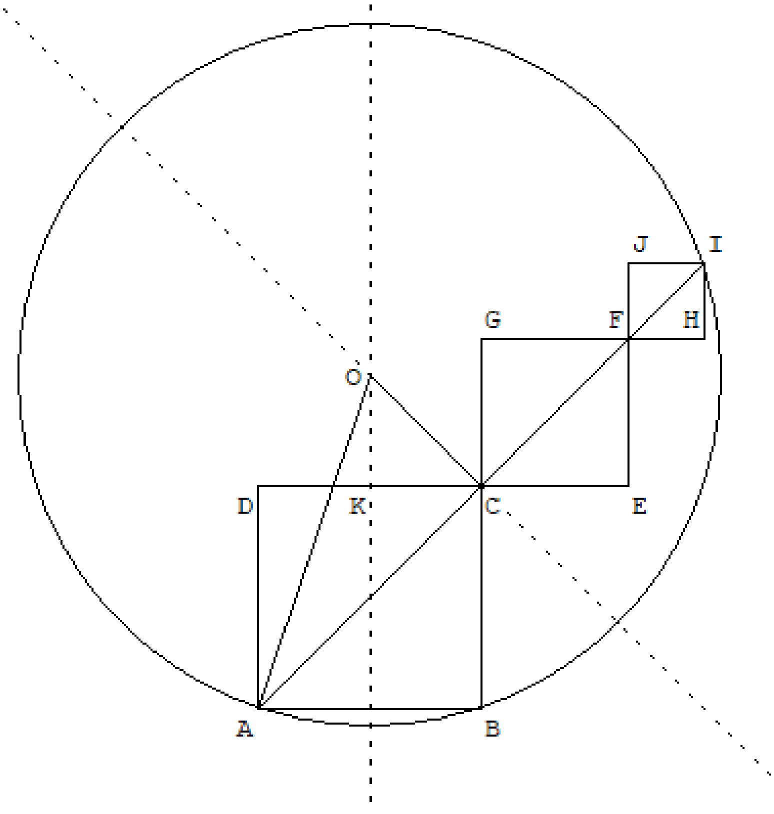
120-2 *proposé par Sébastien Dassule-Debertonne* :

Sans grande difficulté mais joli



Aire du disque ?

Solution de Jacques Chayé



Les diagonales [AC], [CF] et [FI] sont alignées et AC = $6\sqrt{2}$, CI* = $4\sqrt{2}$ + $2\sqrt{2}$. Par conséquent, le point C est le milieu de [AI].

Soit O l'intersection des médiatrices des cordes [AB] et [AI].

Ce point O est le centre du cercle dont on cherche l'aire.

Le triangle ACO est rectangle en C.

D'autre part, soit K le milieu de [CD], on a : $\widehat{ACK}=\frac{\pi}{4}\text{rad}$ donc, $\widehat{KCO}=\frac{\pi}{4}\text{rad}$.

Le triangle rectangle KCO est donc isocèle et OC = $\frac{AC}{2}=3\sqrt{2}$.

Finalement :

$OA^2 = AC^2 + OC^2 = 72 + 18 = 90$.

Le rayon du cercle est donc égal à $\sqrt{90}$ et son aire est égale à 90π.

120-4 *proposé par Jacques Chayé* :

À travers les âges

Quand Bertrand aura l'âge qu'a maintenant son père, sa sœur sera deux fois plus âgée qu'elle ne l'est actuellement et l'âge de son père sera alors le double de celui qu'aura Bertrand lorsque sa sœur aura l'âge actuel de son père.
La somme des trois âges fait un siècle.

Quel est l'âge de chaque personnage ?

Solution de Louis Rivoallan

Soit x, y et z les âges respectifs de Bertrand, de son père et de sa sœur.

	Bertrand	Son père	Sa soeur
Aujourd'hui	x	y	z
Quand Bertrand aura l'âge de son père	x + (y − x) = y	y + (y − x) = 2y - x	z + (y − x) = -x + y + z
Quand sa sœur aura l'âge du père	x + (y − z) = x + y - z	y + (y − z) = 2y - z	z + (y − z) = y

Il n'y a plus qu'à traduire les phrases en équations :
« Sa sœur sera deux fois plus âgée qu'elle ne l'est actuellement » :

$$-x + y + z = 2z, \text{ soit } x - y + z = 0 \;;$$

« L'âge du père sera alors le double de celui qu'aura Bertrand quand sa sœur aura l'âge du père » :

$$2y - x = 2(x + y - z), \text{ soit } 3x - 2z = 0 \;;$$

« La somme des trois âges fait un siècle » :

$$x + y + z = 100.$$

D'où le système :

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$ La solution est (x ; y ; z) = (20 ; 50 ; 30)

Bertrand a 20 ans, son père 50 ans et sa sœur 30 ans.

Le CLEA et ses productions

Sébastien Dhérissard

Le CLEA, Comité de Liaison Enseignants et Astronomes, est une association de type loi 1901, qui promeut l'enseignement de l'astronomie grâce à sa revue saisonnière, *les Cahiers Clairaut*, ses hors-séries *(Maths et astronomie*, *Les constellations*, *Astronomie à l'école*, *le Soleil)*, ses maquettes, son site (clea-astro.eu), son école d'été...

Les cahiers Clairaut sont archivés sur le site (http://clea-astro.eu/archives/web/) et accessibles gratuitement 3 ans après leur parution.

Le dernier numéro des cahiers Clairaut porte en particulier sur l'enseignement scientifique au lycée. Certains articles sont en accès libre.. (Consulter le sommaire : http://clea-astro.eu/vieclea/productions-recentes/cc/cc170/cahiers-clairaut-nb0170-ete-2020).

De nombreux autres articles en lien avec le programme de l'enseignement scientifique en 1ère sont accessibles en ligne à l'adresse :

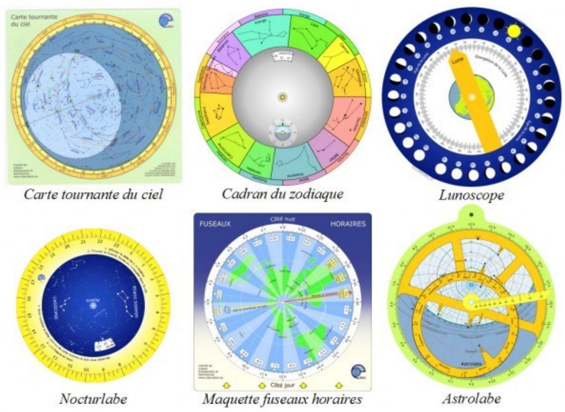
http://clea-astro.eu/avec-nos-eleves/lycees/enseignement-scientifique-1ere/

Si vous souhaitez soutenir cette association en adhérant, en vous abonnant ou en abonnant votre établissement, vous trouverez les renseignements utiles sur la page :

https://ventes.clea-astro.eu/

Vous y trouverez en particulier ce lot de 6 maquettes.

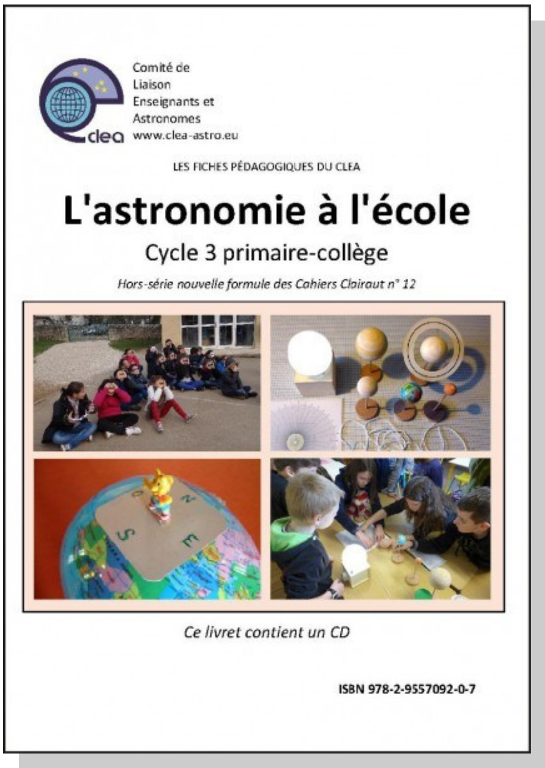
https://ventes.clea-astro.eu/maquettes/113-lot-de-6-maquettes.html

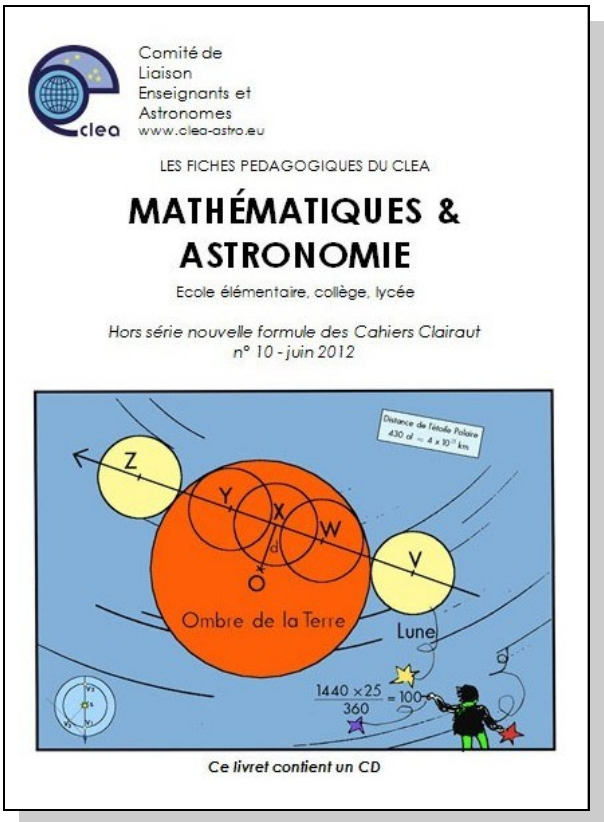


Carte tournante du ciel — *Cadran du zodiaque* — *Lunoscope*

Nocturlabe — *Maquette fuseaux horaires* — *Astrolabe*

Terminons en présentant ces deux brochures, utiles pour apprendre tout en ayant la tête dans la Lune.





Suite de l'édito

M@gistère, je crains d'y être franchement hostile. Les mammifères sociaux que nous sommes encore ont besoin de se rencontrer physiquement, d'échanger de vive voix. J'entends encore des formateurs nous accueillir avec ces bonnes paroles : le stage est un moment de respiration pédagogique.

Vivement que je revoie mes élèves à la rentrée !

Journées Nationales

La crise sanitaire que nous venons de traverser à conduit a l'annulation de nombreux événements, faute de pouvoir accueillir le public tout en assurant sa sécurité.

Dans ces circonstances, l'APMEP a donc décidé de reporter son congrès national prévu en octobre à Bourges. Celui-ci aura lieu au début des vacances de Toussaint 2021 (les dates exactes ne sont pas encore connues).

En conséquence, les Journées Nationales organisées par la Régionale de Poitou-Charentes à Jonzac auront lieu en 2022.

Personne ne sait encore si la participation aux Journées Nationales permettra d'obtenir des Open Badges !

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication
F. de Ligt
Comité de rédaction
F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne,
J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.
Imprimerie
IREM de Poitiers. Adresse ci-dessus.

Éditeur
APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège Social
Voir adresse ci-dessus
Dépôt légal
Juin 2020