

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

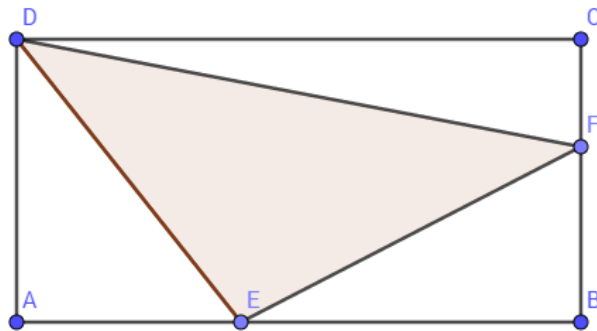
Des problèmes

120-1 *proposé par Dominique Gaud (Migné-Auxances) :*

Que d'or !

ABCD est un rectangle.

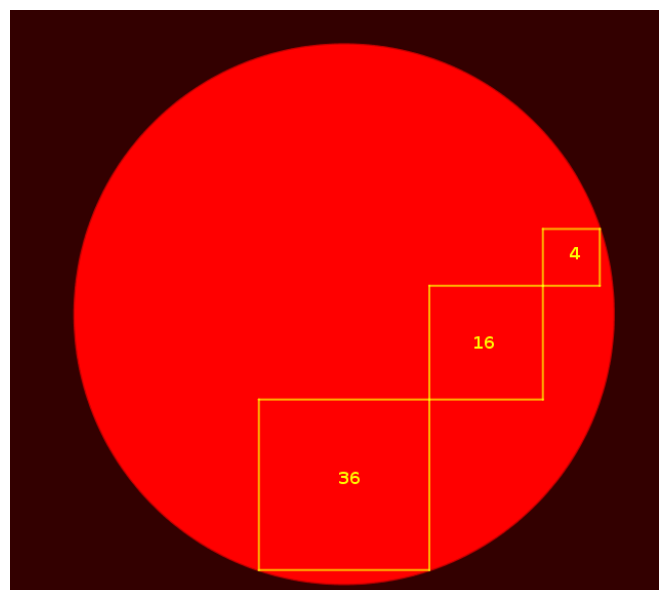
- 1- Où placer E et F pour que les trois triangles DCF, FBE et AED aient la même aire ?
- 2- Comment choisir alors le rectangle pour qu'en plus $DE = EF$?
- 3- Que dire alors du triangle DEF ?



120-2 *proposé par Sébastien Dassule-Debertonne (Bonneuil Matours) :*

Sans grande difficulté mais joli

Aire du disque ?



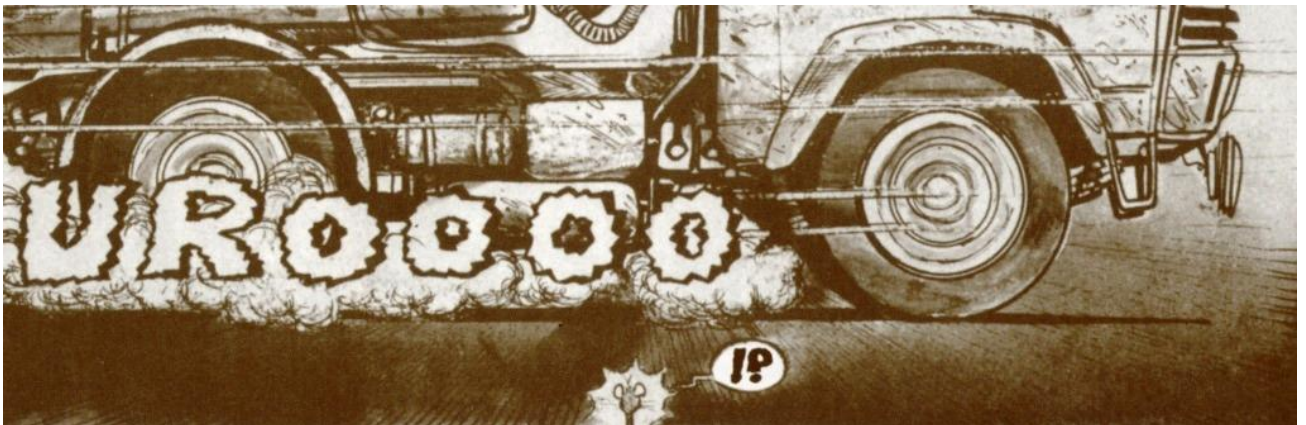
120-3 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Allez, on y croit !

Un rat s'est mis en tête de traverser la nationale 10. Des poids lourds de toute l'Europe y circulent en convois serrés. Pour simplifier le problème on suppose que la file des camions est ininterrompue et que ceux-ci sont modélisés par des parallélépipèdes rectangles de longueur 15 m, de largeur 2,5 m et de hauteur 4 m. Ils roulent tous à 90 km/h en respectant une distance de sécurité de 50 m.

Si notre rat, nommons-le George, choisi une direction perpendiculaire au bord de la route, à partir de quelle vitesse a-t-il plus d'une chance sur deux de survivre à sa traversée ?

Peut-il abaisser cette vitesse en inclinant sa direction selon un angle α par rapport au bord de la route ?



Source : Ptit Luc. *Pacush Blues- Premières mesures*, Glénat, 1994.

120-4 proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :

À travers les âges

Quand Bertrand aura l'âge qu'a maintenant son père, sa sœur sera deux fois plus âgée qu'elle ne l'est actuellement et l'âge de son père sera alors le double de celui qu'aura Bertrand lorsque sa sœur aura l'âge actuel de son père.

La somme des trois âges fait un siècle.

Quel est l'âge de chaque personnage ?

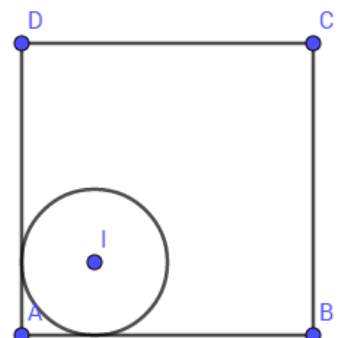
Des solutions

119-1 proposé par Jacques Chayé :

Comment coincer la bulle ?

Dans le carré ABCD, le cercle C de centre I et de rayon r ($0 < r < AB/2$) est tangent aux côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré.

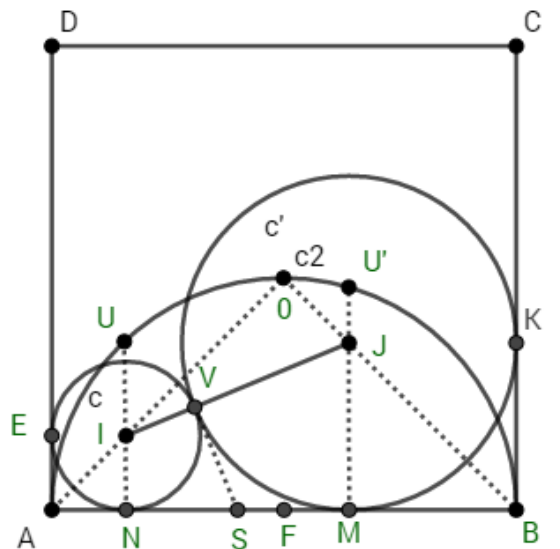
Construire un cercle situé dans le carré et tangent à C , à $[AB]$ et $[BC]$.



Solution de Serge Parpay

Supposons le problème résolu. Notons $\mathcal{C}'$ ce cercle et J son centre.

Le cercle C de centre I est tangent à $[AD]$ en E , à $[AB]$ en N . Le cercle C' est tangent à $[BC]$ en K , à $[AB]$ en M . Les cercles C et C' sont tangents en V . Les points I , V et J sont alignés. La tangente commune aux deux cercles coupe $[AB]$ en S . Notons F le milieu de $[AB]$ et C_2 le cercle de diamètre $[AB]$, la médiatrice de $[AB]$ coupe C_2 en un point O . La bissectrice de l'angle droit en A passe par I et O , la bissectrice de l'angle droit en B passe par J et O . La demi-droite $[NI)$ coupe le cercle C_2 en U , la demi-droite $[MJ)$ coupe le cercle C_2 en U' . La droite (SI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NSV}$ et la droite (SJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{VSM}$. Par conséquent $SN = SV = SM$, notons t cette longueur commune.



Les triangles VSI et VSJ sont donc semblables. (a)

On connaît C de rayon r . On note a le côté du carré. On veut tracer C' , donc avoir son rayon x . D'après (a) on a $x/t = t/r$, d'où les égalités $(x + t)/t = (t + r)/r = a/(t + r)$. On a alors $(t + r)^2 = ar$, soit $AS^2 = AN.AB$. Dans le triangle rectangle AUB , on a $AU^2 = AN.AB$. Par suite $AS = AU$. Le cercle de centre A et de rayon AU coupe donc $[AB]$ en S . Le cercle de centre S et de rayon SN coupe $[AB]$ en M et C en V . La droite (IV) coupe la droite (BO) en J . Le cercle C' de centre J , de rayon JV est le cercle cherché.

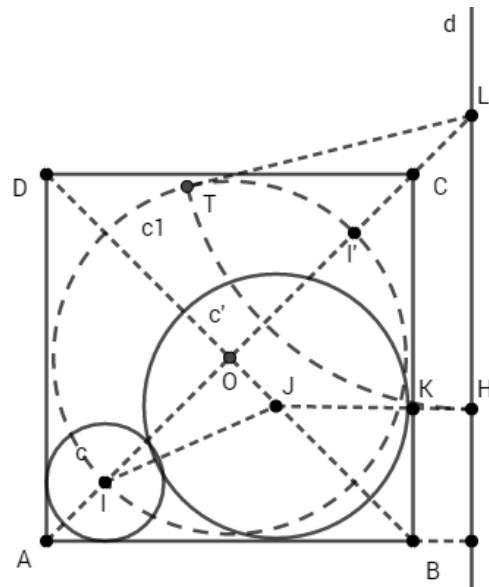
Solution de l'auteur

Soit J le centre d'un cercle C' répondant à la question et soit K le point de contact de ce cercle avec $[BC]$.

Soit H le point situé à la distance r de K dans le prolongement de [JK] et soit d la droite passant par H et perpendiculaire à (AB).

On a : $JI = JH$; le point J est alors à égale distance de I et de la droite d , il appartient par conséquent à la parabole P de foyer I et de directrice d .

Le cercle C' cherché étant tangent à $[AB]$ et à $[BC]$, J appartient aussi à (BD) .
Conclusion : J est un des points communs à la droite (BD) et à la parabole p .



Construisons ce point :

Il est le centre d'un cercle Γ centré sur (BD), passant par I et tangent à d. Γ passe donc aussi par I' le symétrique de I par rapport à (BD) ; il fait alors partie du faisceau F des cercles passant par I et I', comme, par exemple, le cercle C_1 de diamètre [II'] de centre O.

Soit L le point d'intersection de d et de (AC) et soit T un des deux points communs au cercle C_1 et au cercle de diamètre $[OL]$. (LT) est alors tangente au cercle C_1 .

LT^2 est la puissance de L par rapport à C_1 et par rapport à tous les cercles du faisceau $\mathcal{F}$ et en particulier par rapport à Γ .

Soit H sur d tel que $LH = LT$ et tel que la perpendiculaire à d en H coupe le segment $[BD]$; le point J cherché est alors le centre du cercle Γ et du cercle C' que nous cherchions à construire.

Remarque : le point H' symétrique de H par rapport à L est le point de contact avec d d'un autre cercle centré sur la droite (BD) et la parabole $\mathcal{P}$ et qui est donc tangent au cercle C , à la droite (AB) et à la droite (BC) .

Solution de Louis Rivoallan

D'abord les notations.

On appelle N le point de contact du cercle C et de la droite (AB) . On note O le centre du carré. On appelle J le centre du cercle cherché, noté C' , et M le point de contact du cercle C' avec la droite (AB) et V le point de contact de C et C' . La tangente commune aux cercles C et C' en V coupe $[AB]$ en S . Soit R le milieu de $[IJ]$.

On note P l'intersection de (IS) et de (NV) et Q l'intersection de (SJ) avec (VM) . Dans la symétrie d'axe (IS) , les points N et V sont échangés, donc (NV) est perpendiculaire à (IS) . De même (VM) est perpendiculaire à (SJ) .

On a $SN = SV$ d'une part et $SV = SM$ d'autre part. Par suite N , S et M étant alignés sur $[AB]$, le point S est le milieu de $[NM]$ et le triangle NVM est rectangle en V .

Le quadrilatère $QVPS$ a trois angles droits, donc c'est un rectangle et le quatrième angle de sommet S est aussi droit. Le point S est donc sur le cercle de diamètre $[IJ]$, noté C'' .

Les cercles C et C' étant tangents au carré, les droites (AI) d'une part et (BJ) d'autre part sont les diagonales du carré. Ces diagonales se coupent en O . Par suite le triangle IJO est rectangle en O et O est donc sur le cercle C'' .

Dans le trapèze $NIJM$, la droite (SR) passe par S le milieu de $[NM]$ et par R milieu de $[IJ]$, par conséquent (théorème de Thalès), elle est parallèle à (IN) et à (JM) et par suite elle est perpendiculaire à $[AB]$. Par suite $[RS]$ est un rayon de C'' perpendiculaire en S à (AB) , donc C'' est le cercle passant par les points O et I et tangent en S à la droite (AB) .

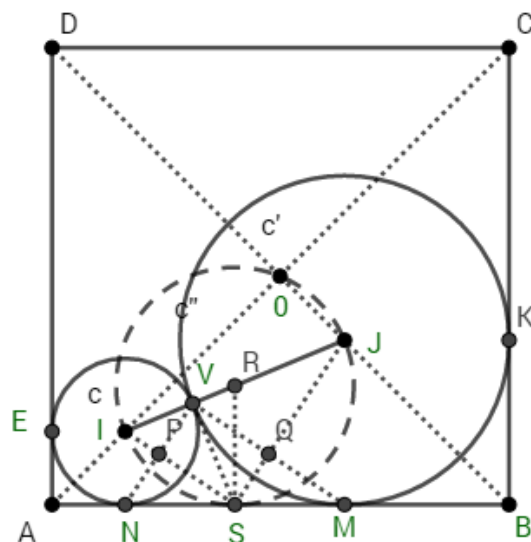
On est donc ramené à un problème classique : trouver le ou les cercles du faisceau de cercles à point de base O et I , tangent(s) à la droite donnée (AB) .

La construction de Wallis permet de le faire aisément. Il y a deux cercles qui conviennent en général. Pour chacun de ces cercles, on a donc le point V , puis le point K et enfin le point J .

Autre approche.

Le début est identique pour montrer que le triangle ISJ est rectangle en S et le triangle NVM est rectangle en V .

Le segment $[SV]$ est respectivement la hauteur issue de S dans ISJ et la médiane relative à $[NM]$ dans NVM .



Si on note x le rayon du cercle cherché et a le côté du carré, on a donc :

$VS^2 = rx$ (propriété de la hauteur dans un triangle rectangle).

$VS^2 = NM^2/4 = (a - r - x)^2/4$ (calcul du carré de la médiane)

Après développement, on obtient l'équation du second degré : $x^2 - 2(a + r)x + (a - r)^2 = 0$

Les solutions sont $x_1 = (a + r) - 2\sqrt{ar}$ et $x_2 = (a + r) + 2\sqrt{ar}$.

Ces nombres sont constructibles à la règle et au compas, et cela permet donc de trouver les centres des cercles cherchés.

119-3 proposé par Frédéric de Ligt :

Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $\lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière du nombre.

Solutions de Louis Rivoallan

Louis Rivoallan a été inspiré par la question et a envoyé plusieurs solutions aux approches bien différentes. En voici deux.

Début commun aux deux démonstrations :

La relation est vérifiée pour $n = 1$ car $\sqrt{(2)}$ et $\sqrt{(3)}$ ont la même partie entière 1.

Désormais, on suppose $n \geq 2$.

Tout d'abord, il est aisé de voir que les suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ respectivement par

$u_n = \sqrt{(n-1)} + \sqrt{(n+1)}$ et $v_n = \sqrt{(4n-1)}$ sont des suites croissantes.

On sait également que la fonction racine carrée est concave donc,

pour tout $x \geq 1$, $\sqrt{(x-1)} + \sqrt{(x+1)} < 2\sqrt{x}$.

Soit $A(n) = (u_n + v_n)(2\sqrt{(n^2-1)} + (2n-1))$.

Pour $n > 1$, on a $A(n) > 0$ donc pour $n > 1$, le signe de $u_n - v_n$ est le même que celui de $(u_n - v_n) \times A(n) = 4n - 5$.

Donc, pour $n > 1$, $u_n - v_n > 0$, autrement dit $v_n < u_n$.

Suite de la première preuve :

De plus $u_n - v_n = \frac{4n-5}{A(n)} = \frac{1-\frac{5}{4n}}{\frac{A(n)}{4n}}$.

Il est aisé de voir que, pour $n > 1$, $\frac{A(n)}{4n} > 1$ et $1 - \frac{5}{4n} < 1$, donc $u_n - v_n < 1$.

Est-il possible qu'il existe un entier m entre v_n et u_n ? Deux cas peuvent être envisagés suivant que ce nombre est pair ou impair.

a) Ce nombre est pair, $m = 2a$.

On aurait $v_n < 2a$, donc $4n - 1 < 4a^2$. Quel est le terme de la suite (v_n) le plus proche de cet entier ? C'est $n = a^2$.

Mais alors $u_{a^2} = \sqrt{(a^2-1)} + \sqrt{(a^2+1)} < 2\sqrt{(a^2)}$ car la fonction racine carrée est concave, donc $u_{a^2} < 2a$.

Le nombre $2a$ n'est pas entre v_{a^2} et u_{a^2} .

b) Ce nombre est impair, $m = 2a + 1$.

On aurait $4n - 1 < (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$. Donc $4n < 4a^2 + 4a + 2$.

Le terme de la suite (v_n) le plus proche est obtenu pour $n = a^2 + a$ alors :

$u_{a^2+a} = \sqrt{(a^2+a-1)} + \sqrt{(a^2+a+1)} < 2\sqrt{(a^2+a)} < 2\sqrt{\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)} = 2\left(a+\frac{1}{2}\right) = 2a+1 = m$.

Là encore le nombre m n'est pas entre v_{a^2+a} et u_{a^2+a} .

Pour $n > 1$, aucun entier n'est compris entre v_n et u_n , et l'écart $u_n - v_n$ est inférieur à 1, donc ces termes ont les mêmes parties entières.

La relation demandée est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Suite de la seconde preuve :

On note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble des entiers n tels que $a \leq n \leq b$.

Pour tout a appartenant à $\mathbb{N}^*$, on note $I_a = \llbracket a^2 + 1; a^2 + a \rrbracket$ et $J_a = \llbracket a^2 + a + 1; (a + 1)^2 \rrbracket$.

On a $\{1\} \cup (\cup_{a=1}^{+\infty} (I_a \cup J_a)) = \mathbb{N}^*$. Donc, il existe un nombre entier $a \geq 1$ tel que $n \in I_a$ ou $n \in J_a$.

a) Cas où $n \in I_a$.

Compte tenu de la croissance des suites (u_n) et (v_n) et de l'inégalité $v_n < u_n$, on a donc :

$$v_{a^2+1} \leq v_n < u_n \leq u_{a^2+a}.$$

Or,

$$v_{a^2+1} = \sqrt{4(a^2 + 1) - 1} = \sqrt{4a^2 + 3} > \sqrt{((2a)^2)} = 2a$$

et

$$u_{a^2+a} = \sqrt{(a^2 + a - 1)} + \sqrt{(a^2 + a + 1)} < 2\sqrt{(a^2 + a)} = 2\sqrt{\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)} < 2a + 1$$

car la fonction racine carrée est concave.

Donc pour $n \in I_a$, $\lfloor u_n \rfloor = \lfloor v_n \rfloor = 2a$.

b) Cas où $n \in J_a$.

On procède de la même façon et on a $v_{a^2+a+1} \leq v_n < u_n \leq u_{(a+1)^2}$.

D'où

$$v_{a^2+a+1} = \sqrt{4a^2 + 4a + 4 - 1} = \sqrt{((2a + 1)^2 + 2)} > 2a + 1,$$

$$u_{(a+1)^2} = \sqrt{((a + 1)^2 - 1)} + \sqrt{((a + 1)^2 + 1)} < 2\sqrt{(a + 1)^2} = 2a + 2.$$

Ce qui montre que pour $n \in J_a$, $\lfloor u_n \rfloor = \lfloor v_n \rfloor = 2a + 1$. La relation demandée est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Solution de l'auteur

La relation est vérifiée pour $n = 1$. Pour tout entier plus grand que 1 on a :

$$(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1}.$$

Comme on a les inégalités :

$$n - 1 < \sqrt{n^2 - 1} < n,$$

$$2n - 2 < 2\sqrt{n^2 - 1} < 2n.$$

On a donc :

$$4n - 2 < (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})^2 < 4n,$$

$$\sqrt{4n-2} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n}.$$

Soit maintenant k l'unique entier non nul tel que :

$$k^2 < 4n - 2 < 4n - 1 < 4n \leq (k + 1)^2.$$

Alors

$$k < \sqrt{4n-2} < \sqrt{4n-1} < \sqrt{4n} \leq k + 1,$$

et aussi

$$k < \sqrt{4n-2} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n} \leq k + 1.$$

$$\text{Finalement } k = \lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor.$$