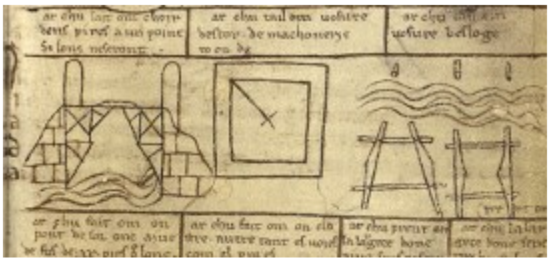
Ombres et lumières

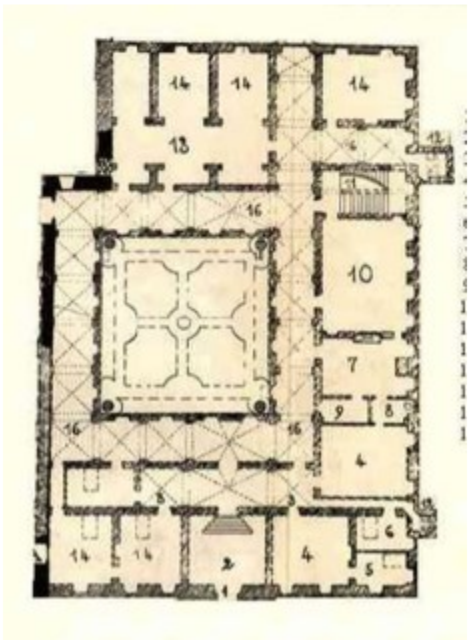
Dominique Gaud

Si les problèmes d'héritage furent la source des problèmes de partages en parties égales, d'autres préoccupations plus spirituelles ou harmonieuses eurent recours à des problèmes de partage équitables. Ainsi les bâtisseurs du moyen âge les utilisèrent lors de la construction de cloîtres pour des raisons harmonieuses (**un parfait équilibre entre ombre et lumière** semble-t-il) comme en témoignent les carnets de Villard de Honnecourt [1], architecte du XIIIe siècle.

> *Villard de Honnecourt, né autour de l'an 1200, est originaire du village de Honnecourt-sur-Escaut, situé près de Cambrai. Comme les compagnons de son temps, il fait son apprentissage en allant de ville en ville et de chantier en chantier. Il deviendra plus tard* magister latomus*, c'est-à-dire maître d'œuvre, profession qui englobe le métier d'architecte. Son activité professionnelle couvre les années 1225 à 1250.*
>
> *Les hommes de métier de l'époque voyageant beaucoup, nous connaissons, grâce à son Carnet, quelques-unes des étapes de son périple : Vaucelles, où il travailla à la construction de l'abbaye cistercienne, Cambrai, où il assista à l'« élévation du chœur de Notre-Dame de Cambrai », Reims, Laon, Chartres et Lausanne, mais également, vers 1235, la Hongrie, où il édifia à Košice la cathédrale dédiée à Sainte Élisabeth de Hongrie.* [2]

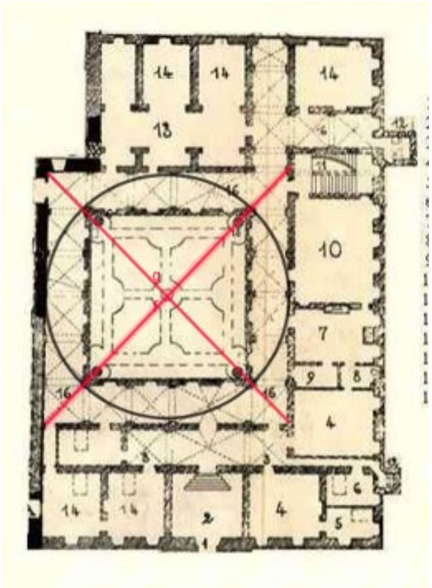
Le croquis central de la figure de droite illustre la construction d'un cloître, l'aire du déambulatoire devant être la même que l'aire du carré au centre.



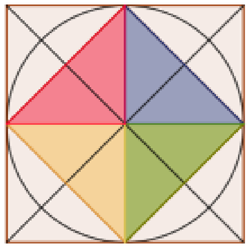


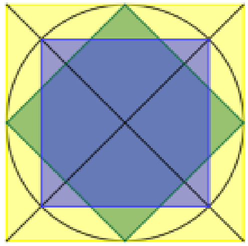
Cela se vérifie dans un certain nombre de monastères quand la topographie des lieux le permettait comme dans l'abbaye de Citeaux [3].

C'est un exercice classique conduisant à une mise en équation mais pour un bâtisseur du moyen-âge mieux valait un algorithme géométrique simple et celui-ci est élémentaire : deux diagonales et un cercle !



La preuve sans mot, en observant :





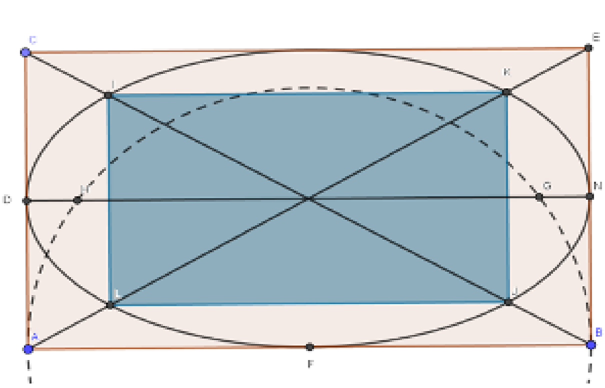
Oui mais voilà, si la topographie des lieux ne permet pas de faire un carré mais oblige le cloître à être rectangulaire, comment faire ?

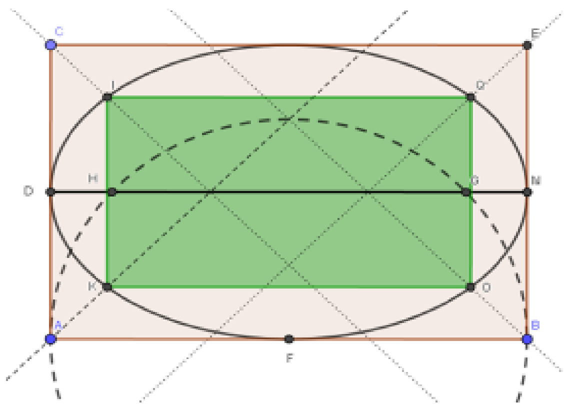
Une mise en équation simple conduit à une largeur égale à $((a+b) - (a^2+b^2)^{0,5})/2$ où 2a et 2b sont les dimensions du rectangle initial. On peut le construire sans problème avec la règle et le compas mais en combien d'opérations ?

En oubliant une des conditions, on peut avoir deux solutions approchées certes mais élémentaires à construire qui reviennent à transformer le cercle en ellipse c'est-à-dire effectuer une affinité orthogonale qui conserve le rapport des aires.

Deux solutions en construisant une ellipse dont les foyers sont les intersections de la médiane du rectangle avec le demi cercle centré sur un côté parallèle à cette médiane.

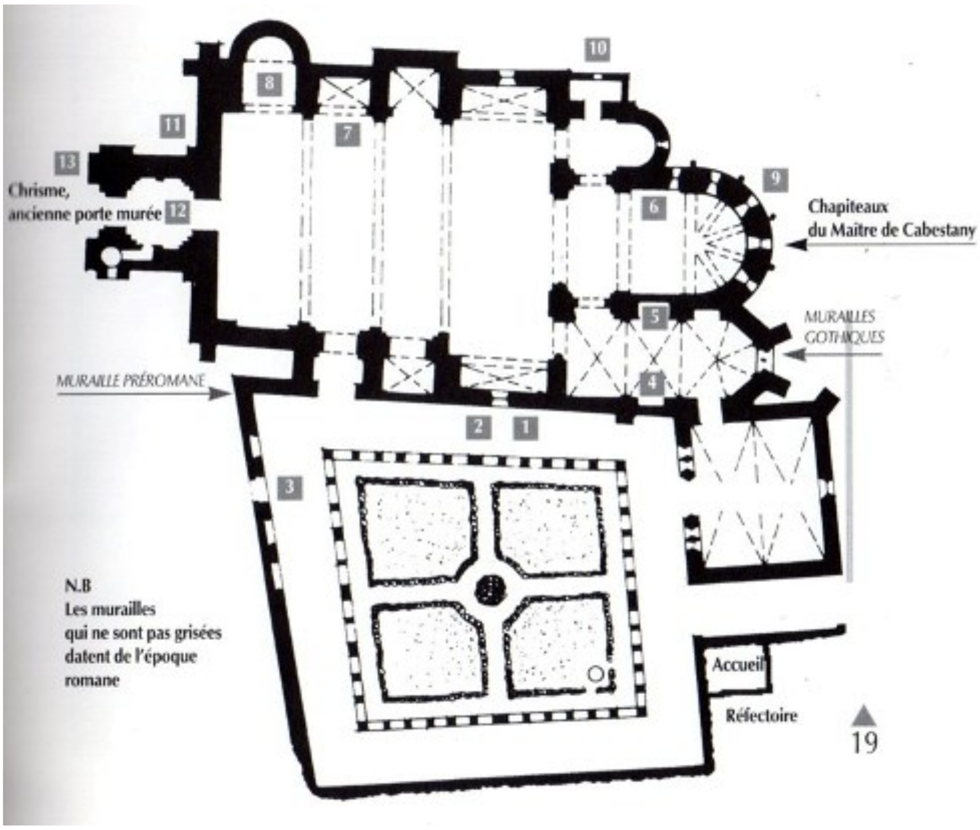
La première solution avec les diagonales donne bien l'égalité des aires (mais pourquoi ?) entre le jardin et le déambulatoire mais la largeur du déambulatoire n'est pas constante. On trace le demi-cercle de diamètre AB qui coupe la médiane du rectangle en H et G qui sont les foyers de l'ellipse car si O est centre du rectangle OH = OG = $(a^2-b^2)^{0,5}$. L'ellipse se trace selon la méthode du jardinier et le tour est joué. Si le rectangle est proche d'un carré (ce qui est bien sûr souvent le cas !) la largeur du déambulatoire n'est pas constante mais cela est peu visible.





L'autre solution consiste à maintenir un déambulatoire de largeur constante en utilisant les bissectrices des 4 angles droits mais alors les aires du jardin et du déambulatoire ne sont plus tout à fait égales mais l'erreur est moindre si là encore le rectangle s'approche du carré (peut-on évaluer cette différence ?).

Et si la topographie des lieux est encore plus problématique. Quelle démarche doit suivre l'architecte pour concilier au mieux les deux impératifs : égalités des aires et largeur du déambulatoire constant ?



Abbaye de Saint Papoul (Aude)

Cela nous amène à réfléchir (le cloître est un lieu propice pour cela !) sur les constructions exactes et approchées à savoir : une construction effective à la main suivant une méthode exacte donne-t-elle un résultat plus satisfaisant lors de la réalisation qu'une construction fondée sur une méthode approchée ?

Nous ne sommes pas les premiers à nous poser de telles questions et même certains mathématiciens les ont théorisées.

En 1903, Emile Michel Hyacinthe Lemoine (celui du point remarquable du triangle !), publie *Géométrographie ou arts des constructions géométriques* (qui ne prend en compte que les tracés à la règle et au compas). Cette théorie tente de définir parmi toutes les constructions effectives (exactes ou approchées) d'une figure « la meilleure et la plus simple». Mais elle n'est pas applicable dans notre cas, faute à l'ellipse !

Moralité : comme pour les cloîtres il peut être parfois utile de mettre en lumière les méthodes approchées et mettre à l'ombre les méthodes exactes.

Bibliographie

Histoires de géomètres... et de géométrie, Jean Louis Brahem, ed Le Pommier,2011

Kuzniack, Houdement, approximations géométriques *L'ouvert* n°105 (IREM de Strasbourg) numérisé

https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Ouvert/n105/o_105_19-28.pdf