Les gammes musicales

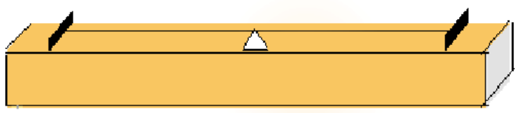
Nicolas Minet , IREM&S de Poitiers, professeur au Lycée du Bois d'Amour (Poitiers)

Épisode 3 : Les cases de la guitare

Résumé des épisodes précédents (Corol'aire n°116 et 117)

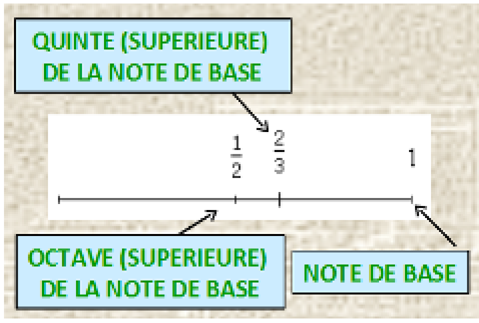
Une gamme est une échelle, ces deux mots n'en faisant qu'un en anglais : scale. Le nombre de notes et leur position sur l'échelle dépend des civilisations. L'intervalle d'octave est probablement le seul intervalle commun à toutes les civilisations car il délimite les deux extrémités de toute gamme. En effet, on peut le définir comme la différence entre deux sons, l'un produit par une corde et l'autre par sa moitié. Nous avons vu que la gamme de Pythagore fut créée à partir des intervalles d'octave et de quinte. Rappelons qu'un intervalle (musical) est, de manière générale, la différence sonore entre deux notes distinctes (on parle d'unisson lorsque les deux notes sont identiques).

Quand le musicien parle de note, le physicien parle de son et caractérise la hauteur d'une note par une fréquence. On peut établir expérimentalement que la fréquence d'une corde donnée est inversement proportionnelle à la longueur de corde qui vibre. On peut donc indifféremment parler de longueur ou de fréquence avec un instrument à cordes. Résumé en images :



Monocorde : Le chevalet mobile permet de modifier la longueur

Note	La plus aigüe	Entre deux	La plus grave
Longueur	1/2	2/3	1
Fréquence	2F	3/2 F	F
Intervalle avec la note de base	Octave	Quinte	Unisson



La gamme de Pythagore : encore d'actualité au XVIe siècle

Un intervalle se définit (aussi !) comme le quotient des fréquences des deux notes, en général la plus grande par la plus petite. Pourquoi s'intéresser aux **rapports** et pas aux différences des fréquences ? C'est ma foi une excellente question, et nous allons voir que la réponse est liée à l'impression de justesse sonore : en quelque sorte, le calcul des rapports va révéler une imperfection de certaines gammes. Ceci dit, on sait déjà que la gamme des Pythagoriciens a été créée à partir de deux **rapports** particuliers (quinte et octave), et que, selon les Anciens, les sons étaient d'autant plus consonants, que les fractions étaient simples.

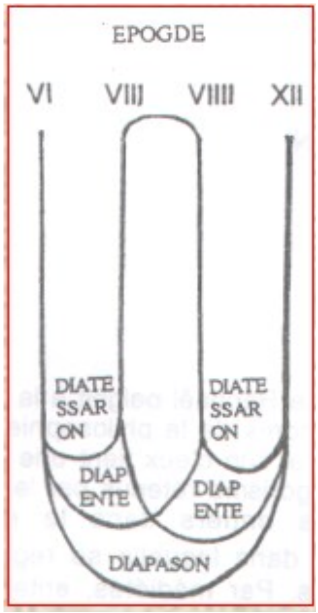
La gamme heptatonique[1] de Pythagore correspond à cette échelle de fractions comprises entre ½ et 1 :

1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

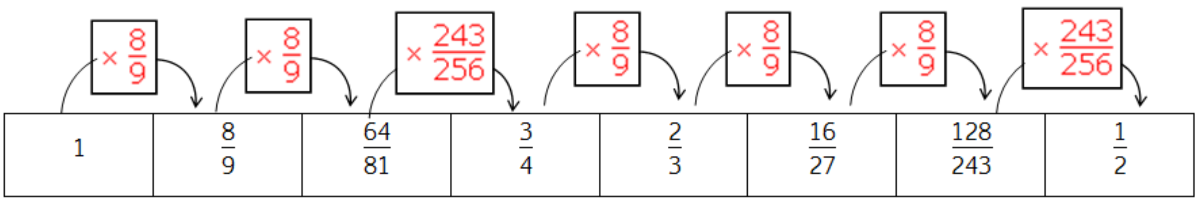
Dans sa fresque *l'École d'Athènes*, Raphaël met en scène, entre autres personnages, Pythagore entouré de disciples. L'un d'entre eux tient une ardoise et montre sur une figure de géométrie des intervalles musicaux issus de la gamme de Pythagore (retranscription de cette figure ci-contre) :

- les nombres VI et XII représentent la note de base et la note à l'octave ;
- les nombres VIII et VIIII correspondent aux 4^{e} et 5^{e} notes de la gamme.

Nombres	VI	VIII	VIIII	XII
Fraction de la gamme	1/2	2/3	3/4	1
Intervalle (nom actuel)	Octave	Quinte	Quarte	Unisson
Intervalle (nom ancien)	Diapason ou Double	Diapente	Diaterssaron	1

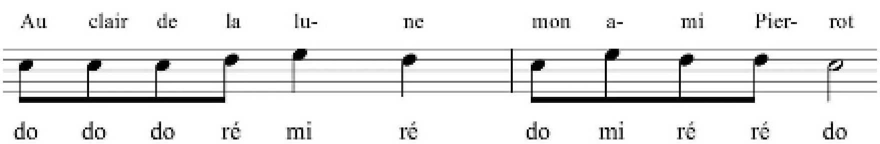


Nous verrons dans l'épisode final de notre saga comment Euclide avait défini une axiomatique pour déduire par des règles de logique quels intervalles étaient consonants ! En attendant, constatons ce fait remarquable : les rapports entre deux notes consécutives de la gamme de Pythagore sont soit égaux à 8/9 soit à 243/256. La fraction 8/9 était un intervalle de référence dénommé « *epogde* » (c'est le titre de la figure ci-contre), ce qu'on peut traduire par « *ton* », terme musical sur lequel on va revenir. En effet, cette dissymétrie de la gamme va poser question…



Transposer, késaco ?

Transposer, c'est décaler toutes les notes d'un morceau selon un même principe, vers le grave ou vers l'aigu. Illustrons ceci à partir d'une mélodie relativement connue :



[1] On considère qu'il y a 7 notes car la 8^{e} est à l'octave de la première. Elles porteront donc le même nom.

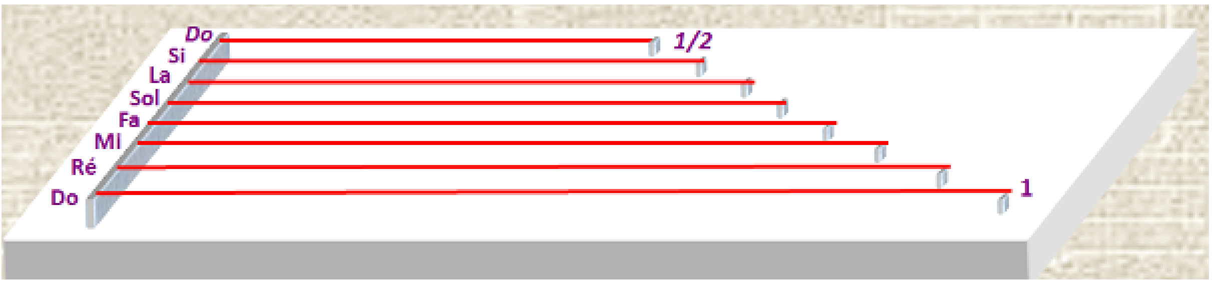
Supposons que le principe de transposition consiste à remplacer chaque note par la suivante : chaque *do* devient *ré*, chaque *ré* devient *mi* et chaque *mi* devient *fa*.

La reconnaît-on encore, cette mélodie ? Deux problèmes au moins apparaissent :

- La réponse peut être subjective : moi, je reconnais ! Ah ? Pas moi…

- Sur quel instrument joue-t-on ? Quelle définition a-t-on donné pour chaque note qu'on nomme do, ré, mi… Autrement dit, quelles fréquences ou quelles longueurs de cordes a-t-on choisi ?

Imaginons qu'on s'en tienne à notre gamme de Pythagore : rappelons qu'à ce stade de notre récit, nous avons sous la main 7 notes, chacune correspondant à une fraction d'une corde de longueur 1. Cela nous permet de jouer avec cet instrument (telle une cithare à prix discount)



Désormais, une écoute est indispensable pour saisir le problème. Imaginons que « Do » soit la note de fréquence 100 Hz. Calculons les fréquences des notes suivantes, qu'on nommera « ré », « mi », etc…

1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
100 Hertz	113 Hz	125 Hz	133 Hz	Etc…	Etc…	Etc…	Etc…

Vous pouvez désormais jouer « Au clair de la Lune » à la sauce Pythagore en générant des sons ayant ces fréquences (par exemple avec le logiciel libre Audacity : sélectionner Generate puis Tone.)

Do	Do	Do	Ré	Mi	Ré	Do	Mi	Ré	Ré	Do
100 Hz	100 Hz	100 Hz	113 Hz	125 Hz	113 Hz	100 Hz	125 Hz	113 Hz	113 Hz	100 Hz

Transposons ensuite en rejouant la mélodie mais en décalant d'une note. En comparant les deux écoutes, on ne reconnaît pas très bien le morceau ! Enfin, en général… J'avais dit que ce serait subjectif ! Il faut s'y essayer ! À défaut, je vous propose d'écouter un autre extrait (massacré avec Audacity, voir [1] sur le web) et sa version transposée de deux manières : soit en ajoutant un même nombre (disons + 100 Hz) à chaque fréquence soit en multipliant chaque fréquence par un même nombre (disons x 1,25).

Dans un cas, on reconnaît l'extrait initial, mais dans l'autre Beethoven se retourne dans sa tombe !

Conclusion de l'expérience ? L'oreille semble identifier un intervalle musical « à quotient constant » et non « à différences constantes ». La raison ? Je n'en sais rien, je n'en ai jamais lu. Ce qu'il faut en déduire ?

La gamme de Pythagore ne permet pas de transposer n'importe comment car il y a deux types d'intervalles entre deux notes consécutives, qu'on peut appeler Grand Ton (GT) et Petit Ton (pt)

1	$\mathbf{\frac{8}{9}}$	$\mathbf{\frac{64}{81}}$	$\frac{3}{4}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{\frac{16}{27}}$	$\mathbf{\frac{128}{243}}$	$\frac{1}{2}$

GT	GT	pt	GT	GT	GT	pt

Vous l'avez deviné, une transposition correcte du morceau consiste à passer des 3 notes en gras à gauche aux 3 notes en gras à droite. Car les intervalles sont les MEMES ! Ceci est fondamental…

Comment bien transposer, alors ?

Le problème de la transposition a une solution théorique : la voici dans les mots de Patrice Bailhache [2] au sujet de cette nouvelle gamme qu'on appellera « à tempérament égal » :

Ce tempérament, celui en vigueur aujourd'hui sur tous les instruments à clavier, et même en principe dans toute la musique, sacrifie volontairement la première exigence, celle de la ***justesse****, de manière à satisfaire pleinement les deux autres : modulations et* ***transpositions*** *infinies, clavier de* ***douze*** *touches par octave.*

Il apparaît historiquement, sous forme imprécise, vers 1530, mais n'est alors réellement usité que pour les instruments à touche munie de frettes (luth, viole). Comme déjà dit, il ne s'impose pour le clavier qu'à l'époque de Bach. La réalisation effective du tempérament égal présente des difficultés. Les auteurs des XVIe et XVIIe siècles proposent des méthodes géométriques de partition du ***monocorde****. Il s'agit de diviser une longueur* ***en douze parties géométriquement proportionnelles*** *les unes aux autres.*

Il est ici question d'une gamme à douze notes. Certes nous avons vu dans l'épisode précédent qu'une gamme de Pythagore à douze notes existait, mais pourquoi ne pas tenter a priori cette division égale de l'octave en 7 intervalles égaux ? Tout reviendrait à chercher le nombre correspondant à un ton « T ».

1 = Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	$\frac{1}{2}$ = Do

T	T	T	T	T	T	T

La division devant être géométrique, le nombre cherché est $\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$

Mais l'écoute du résultat peut laisser sceptique… ou pas. (Ah si, là, quand même ! … Voir [1] ou bien créez cette gamme avec Audacity !)

En fait, c'est la division en 12 notes qui va offrir le meilleur des compromis ! La preuve en tableau :

Fractions de Pythagore arrondies à 3 décimales	1,000	0,889	0,790	0,750	0,667	0,593	0,527	0,500
Puissances de $\alpha = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$	α^0	α^2	α^4	α^5	α^7	α^9	α^{11}	α^{12}
Puissances de α arrondies à 3 décimales	1,000	0,891	0,794	0,749	0,667	0,595	0,530	0,500

C'est le compromis universel en vigueur à ce jour : good bye ! la gamme de Pythagore, malgré des fractions simples, avec certaines notes dites « naturellement justes » comme la quinte… et bonjour ! la gamme au tempérament égal, liée à un nombre irrationnel. La note « la » étant fixée depuis plus d'un demi-siècle à 440Hz (à une puissance de 2 près), et correspondant à α^9 , on peut enfin définir clairement les actuelles notes do, ré, mi, … en recalculant leur fréquence à l'aide de la ligne des puissances du tableau ci-dessus. Alors, ça ne sert à rien, les racines ?

Et les cases de la guitare dans tout ça ?

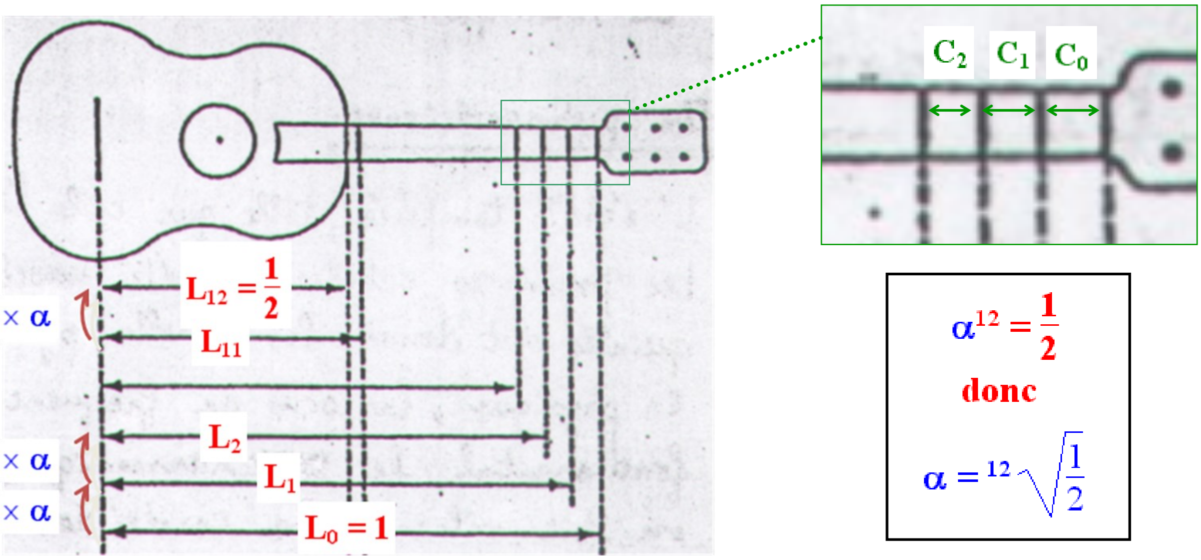
Sur une guitare, le luthier doit placer les frettes, ces barres de métal qui délimitent les cases sur le manche. Le tempérament égal demande que :

$$L_0 = 1,\ L_1 = \alpha,\ L_2 = \alpha^2,\ \ldots,\ L_n = \alpha^n \text{ avec } \alpha = \sqrt[12]{½}.$$

Donc les longueurs de case valent $C_0 = 1 - \alpha$, $C_1 = \alpha - \alpha^2$, $C_2 = \alpha^2 - \alpha^3$, … et en général $C_n = \alpha^n - \alpha^{n+1}$.

Il est donc clair que la suite des longueurs de case est aussi géométrique et de raison α !

Je sais à quoi vous pensez là tout de suite maintenant : trouvons une guitare et un mètre pour vérifier !



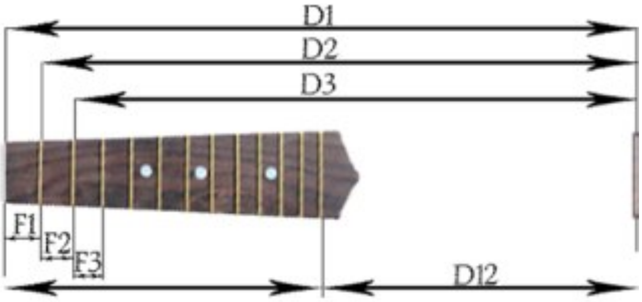
Un ukulélé pourra faire l'affaire : l'approximation 18/17 de α par Vincenzo Galilei (1520–1591) est aujourd'hui connue des luthiers sous le nom de « **règle des 18** ». Je laisse Tonton Rémy [3] conclure !

« *Un ukulélé a en général une touche de 12 frettes, quelquefois de 14 frettes. Calculer l'emplacement de l'octave est simple, mais trouver l'emplacement des autres notes nécessite des calculs plus savants. Les luthiers utilisent une équation appelée la règle des 18, c'est en fait celle des 17,8171537….*

On calcule la position d'une frette à partir de la précédente..

La touche

Les frettes



D1 est la longueur du diapason de départ [longueur totale de corde] *F1 est la position de la 1ère frette à partir du sillet et F1 = D1 divisé par 17,8171537... la longueur de diapason restante sera D2 = D1 – F1.*
D2 divisé à son tour par 17.8171537... nous donnera l'emplacement de F2 la deuxième frette.
La longueur de diapason restante sera D3 = D2 – F2. Et l'on poursuit jusqu'au nombre de frettes voulues.»

Après avoir compris ça, on peut mourir tranquille. Mais en musique.

Références

[1] MINET Nicolas, *7 notes dans la gamme, toujours ? Pourquoi ?* Feuille à problème n°7, IREM de Lyon

http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille7/7notes/7notes.html

[2] BAILHACHE Patrice, *Tempéraments musicaux et mathématiques*

http://patrice.bailhache.free.fr/thmusique/temperaments.html

[3] LE GOITRE Rémy, *Anatomie du ukulélé*

http://www.tontonremy.com/ukulele/instrument/page3/page3.html