



Corol'aire

Mars 2020

n°120

À contre-courant

Frédéric de Ligt

Comme la plupart des collègues, je construis et je présente des figures obtenues à partir de logiciel d'un géométrie dynamique, je code par-ci par-là, je traite mes données sur un tableur et comme j'exerce en lycée j'utilise quotidiennement les nombreuses fonctionnalités de ma calculatrice graphique. À cela je ne trouve rien à redire, au contraire. Tous ces outils facilitent la compréhension des élèves et aussi la vie des enseignants.

Là où je me questionne depuis de nombreuses années c'est sur l'utilité pour les élèves, à moins de s'être déjà orientés dans une voie bien scientifique, de passer du temps à essayer de maîtriser tous ces outils à l'exception notable des tableurs. Que le professeur anime son cours avec d'élégantes figures, de jolies courbes, fasse fonctionner des algorithmes, c'est formidable ! Mais quel est le bénéfice, en termes de formation du futur citoyen, consommateur, travailleur de savoir se servir de GeoGebra, de savoir afficher correctement une courbe sur l'écran de sa calculatrice ou de se débrouiller en langage Python ou Scratch ?

Dans quelles études lui demandera-t-on ces savoir-faire ? Des études scientifiques seulement, et même pas économiques ou médicales où l'usage du tableur sera suffisant. Cela concerne donc un public très restreint que l'on peut désormais quantifier chaque année à peu près à la cohorte des élèves qui vont choisir la spécialité mathématiques en terminale ou NSI en première. L'apprentissage à ce niveau du code, de l'emploi de la calculatrice et de GeoGebra serait beaucoup plus rapide et utile pour le coup. Avec un bémol toutefois, puisque dans les filières scientifiques du supérieur on demande aux étudiants de retravailler avec leur calculatrice de collège, mais c'est un détail.

Si ces savoir-faire ne sont pas nécessaires à la poursuite des études dans le supérieur pour la grande majorité des élèves, peut-être cette maîtrise

Sommaire

Rallye..... p.2

Maths et Mesure, c'est parti..... p.3

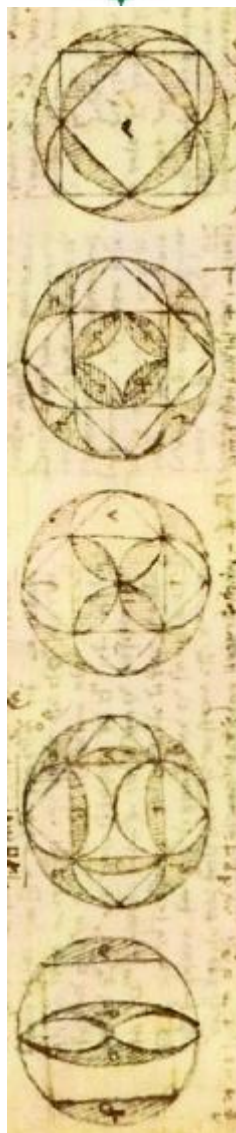
Les gammes musicales p.7

Ombres et Lumières... p.13

Maths et Mesure : la coudée égyptienne p. 16

Rubricollage..... p.18

Suite de l'édito page 24



Le Rallye s'est manifestement bien déroulé le jeudi 12 mars. Des petites erreurs sans conséquence dans le texte de l'épreuve nous ont été signalées pendant la permanence que nous avons tenue ce jour-là.

Les professeurs participants ont pu voir les changements importants de cette édition :

- une partie thème « **La géométrie de Léonard** » réalisée par les élèves entièrement avant l'épreuve finale,
- une série de 18 problèmes sur un quatre-pages avec 3 problèmes communs à deux niveaux consécutifs.

Autre nouveauté au niveau des secondes : l'épreuve était prévue sur une heure seulement au lieu de deux.

Ce sont près de 5800 élèves dans 224 classes de 49 établissements qui ont participé à cette édition. 2000 élèves et 44 classes de moins que l'an dernier ! Les difficultés actuelles rencontrées par notre profession ne sont pas étrangères à cette baisse des effectifs, d'autant plus que nous avons simplifié les modalités de passation.

À la suite des événements actuels, nous avons dû abandonner le planning prévu. Nous avons informé, par un message aux coordonnateurs, de l'annulation de la remise des prix le mercredi 3 juin au Pôle Scientifique de l'Université de La Rochelle.

Nous n'avons toujours pas pu récupérer les dossiers et certains établissements n'ont pu nous les envoyer. Quand pourrons-nous corriger et établir le palmarès ? Nul ne le sait.

Nous vous tiendrons au courant de la reprise de nos activités, le moment venu, par des messages aux coordonnateurs. N'hésitez pas à consulter notre site régulièrement pour de nouvelles informations.

Information COVID-19

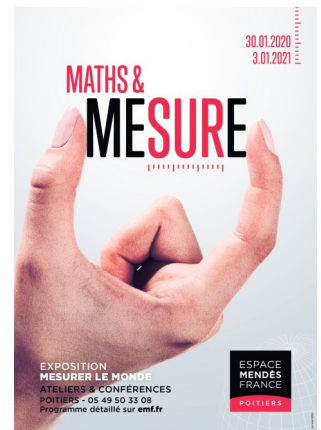
L'ensemble de ce numéro, à l'exception de l'article ci-dessus a été réalisé avant les mesures de confinement et de continuité pédagogique.

Maths et Mesure, c'est parti !

L'exposition *Maths et Mesure, mesurer le monde* est ouverte. Elle a été inaugurée le 29 janvier devant un public venu très nombreux.

Le succès des expositions que nous concevons avec l'Espace Mendès France, l'IREM&S, les conseillères pédagogiques, l'AGEEM et qui sont consacrées aux mathématiques est tel que leur durée est longue (près d'un 1 an).

Le personnel de l'Espace Mendès France, les représentants de l'APMEP, des inspecteurs du primaire et secondaire, de l'espace Mendès France, de l'IREM, de l'AGEEM étaient présents ainsi que la communauté urbaine de Poitiers et la région Nouvelle-Aquitaine montrant ainsi leur attachement au développement de la culture scientifique et en particulier mathématique.



Didier Moreau directeur de l'EMF, a rappelé l'importance dans le monde actuel de développer la pensée rationnelle et donc de vulgariser la science et s'est félicité une fois de plus de l'excellente collaboration entre tous les concepteurs de cette magnifique exposition. Celle-ci, de par la qualité de son thème, a reçu une subvention de la fondation Blaise Pascal¹.

De leur côté, les représentants de la communauté urbaine de Poitiers, et de la région ont assuré de leur soutien l'Espace Mendès France dans ses initiatives et se sont félicités de la synergie entre l'Espace Mendès France, l'université et les associations.

Les concepteurs de l'IREM&S, de l'APMEP, les conseillères pédagogiques, et les représentants de l'AGEEM se sont, quant à eux, félicités de l'ambiance de travail, de l'écoute des impératifs de chaque organisme afin de réussir au mieux cette exposition.

120 personnes ont eu le privilège de visiter l'exposition sous la conduite des concepteurs et partager un moment de convivialité avant d'assister à la conférence inaugurale de M. Jean Pierre Maillard².



Présentation d'un atelier autour de la pétanque



Les discours, avant un buffet généreux



Une assemblée nombreuse pour la conférence de M. Maillard

¹ <https://www.fondation-blaise-pascal.org/>

² Conférence disponible https://emf.fr/ec3_event/mesurer-la-distance-des-etoiles-de-lantiquite-au-xxie-siecle/

Mais quel est le contenu de cette exposition ?

On ne voit bien souvent dans les mathématiques que leur aspect formel et on oublie qu'elles ont été, et sont, un fabuleux outil pour l'exploration et la maîtrise du monde dans lequel nous vivons.

Pour sensibiliser les différents publics auxquels s'adresse l'exposition, des enfants de maternelle aux lycéens, des étudiants au grand public, un thème accessible à tous et très présent dans notre vie a été choisi : celui de la mesure.

Cette exposition insiste sur le rôle des grandeurs géométriques vues en maternelle et enseignées à l'école primaire, et montre l'importance de leur mesure dans la construction des nombres fractionnaires et décimaux. Des professeures de maternelle et de primaire ont été associées à la supervision des expériences et des manipulations, pour que des jeunes, et même des très petits puissent tirer le meilleur parti de leur visite de cette exposition.

Comment les hommes ont-ils pu connaître la forme de la Terre et mesurer ses dimensions ? Comment s'y repérer ? Comment dresser des cartes ? La maîtrise de notre monde commence par celle de la notion de **longueur**.

En expérimentant, les visiteurs comprendront comment les hommes ont élaboré leurs mesures et leurs unités, et pourquoi, en France à la Révolution, on a voulu doter le monde d'une mesure universelle : le mètre.

La mesure des **surfaces**, qui est à l'origine de la géométrie, a été déterminante dans notre histoire : surfaces planes des terrains, objet de l'arpentage, mais aussi surfaces courbes des divers objets qui nous entourent, avec une insistance particulière sur la sphère, la forme de notre planète. On y découvrira des méthodes variées, des découpages au calcul infinitésimal et divers moyens d'établir des formules.

La mesure des **volumes** est également l'objet de nombreuses expériences permettant de comprendre les liens entre les différentes unités. L'élaboration des formules de calcul est un des enjeux du pôle. Les objets du quotidien y sont très présents.

Comment mesurer les **distances lointaines** et les dimensions inaccessibles des astres ? Distances Terre-Lune, Terre Soleil, distances entre les étoiles, dimensions du système solaire autant de sujets rendus accessibles à partir de défis et expériences.

Finalement on peut en mesurer des choses, alors qu'en est-il du changement climatique ? Entre **météorologie et climatologie**, tout est ici aussi affaire de mesures.

Des **fiches défis** avec corrigés reprennent les défis posés sur les panneaux, des **fiches expériences** expliquent aux accompagnateurs (animateurs, enseignants, parents...) les **manipulations** à faire et ce qu'elles apprennent, des **fiches explications** complètent pour les curieux les informations portées par les panneaux, des animations vidéos illustrent certains points.

Un **coin bibliothèque** complète la visite.

La visite de cette exposition très riche doit être préparée avec les visiteurs les plus jeunes car il est impossible dans un temps raisonnable de relever tous les défis et faire toutes les expériences. Tout comme lors d'une visite d'un grand musée, il est préférable de cibler un itinéraire en fonction des centres d'intérêts des visiteurs.

Dans le cas de visites de classe, il est impératif de s'inscrire auprès de l'Espace Mendès France car les réservations vont bon train et les créneaux disponibles risquent de manquer.

Tous les documents permettant de préparer une visite sont accessibles sur le site de l'Espace Mendès France, de l'IREM&S de Poitiers et de notre Régionale.

https://emf.fr/ec3_event/exposition-maths-mesure/

<http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article322>

http://irem.univ-poitiers.fr/portail/index.php?option=com_content&view=article&id=208:exposition-maths-mesure&catid=42&Itemid=55

Contenus des pôles et manipulations possible

PÔLE 1 - MESURER LA TERRE

Manipulations

- Calculer le rayon de la terre comme l'a fait Ératosthène,
- Savoir comment on a découvert que la Terre était ronde,
- Se repérer sur un planisphère et le globe terrestre par latitudes et longitudes
- Repérer le plus court chemin d'un point à un autre sur Terre,
- Comprendre comment on a mesuré au XVIII^e la longueur du méridien.

Panneaux

1. Représentation de la Terre dans l'antiquité
2. Se repérer sur la Terre
3. Cartographier la Terre



PÔLE 2 - MESURER LES LONGUEURS

Manipulations

- Mesure de distances avec des parties de son corps,
- Mesure de longueurs avec différents outils,
- Mesure de différents objets avec l'instrument le plus approprié,
- Comprendre d'où vient la formule du périmètre du cercle et comment a procédé Archimède,
- Mesurer des distances inaccessibles à l'aide de différents instruments.
- Comprendre pourquoi les hommes ont inventé une mesure universelle, le mètre.
- Utiliser le mètre, ses sous-unités et ses multiples.

Panneaux

1. Le corps, première ressource pour mesurer
2. La révolution du mètre
3. Mesurer plus et mieux



PÔLE 3 - MESURER LES AIRES

Manipulations

- Comparer des aires par carrelages et quadrillages,
- Comparer des aires par rectangulations et quadratures,
- Mesurer des aires par quadrillages et carrelages,
- Donner une image des ordres de grandeur des unités usuelles,
- Comprendre d'où vient la formule de l'aire du disque, de celle la sphère,
- Calculer l'aire d'un polygone sur une planche à clous,
- Comprendre le principe de la théorie des indivisibles qui permet de calculer des aires,
- Comprendre le principe du calcul intégral,
- Mesurer une aire sur une surface non plane,
- Mesurer directement une portion d'une carte par un logiciel.

Panneaux

1. Des origines aux calculs des aires
2. Calculer des aires
3. Comment établir des formules ?





PÔLE 4 - MESURER DES VOLUMES

Manipulations

- Comparer des volumes,
- Donner une image de l'ordre de grandeurs des contenances d'objets de la vie courante,
- Graduer un récipient à l'aide d'un verre unité,
- Comparer les volumes de différents objets par remplissage ou immersion,
- Mesurer le volume d'un objet par remplissage ou immersion,
- Manipuler les unités, les convertir,
- Donner une image de ce qu'est 1 m^3 , 1 dm^3 , 1 cm^3 ,
- Montrer et construire des objets de différentes formes et de même volume,
- Comprendre d'où viennent les formules des solides usuels,
- Comprendre les relations liant les volumes du cône, de la sphère et du cylindre de même diamètre et de même hauteur.

Panneaux

1. Mesurer des liquides
2. Mesurer avec des cubes
3. Mesurer avec des formules

PÔLE 5 - MESURER LE MONDE LOINTAIN

Manipulations

- Comprendre les unités utilisées pour mesurer des angles (très petits) en astronomie,
- Avec le « 1° sur le mur » : se représenter et comparer des angles de différentes grandeurs : 1° , $1'$ et $1''$,
- Mesurer l'angle Lune-Terre-Soleil au quartier et calculer le rapport des distances Terre-Lune et Terre-Soleil,
- Mesurer une parallaxe et une distance d'éloignement,
- Représenter le système solaire en temps réel en plaçant les 8 boules des planètes sur leurs orbites aux positions angulaires réelles du jour,
- Représenter le système solaire en minutes lumière : 6 cm au sol correspondent à 1 minute lumière,
- Déterminer les planètes qui sont observables ce soir ou demain matin et celles qui ne sont pas visibles,
- Comprendre les phases de Vénus,
- Parcourir en binôme deux orbites à pas consécutifs et comprendre le phénomène de rétrogradation par exemple pour la Terre et Mars,
- Construire une ellipse avec la méthode du jardinier

Panneaux

1. Terre—Lune—Soleil
2. Mesurer le système solaire
3. Mesurer le système solaire et au-delà



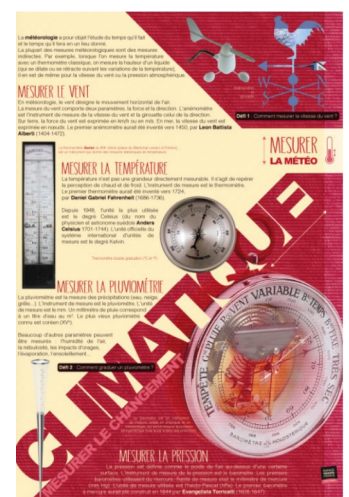
PÔLE 6 - MESURER LE CHANGEMENT CLIMATIQUE

Manipulations

- Visualisation de l'unité de mesure de la pluviométrie,
- Construire un graphique de pluviométrie,
- Construire une rose des vents,
- Mesurer la vitesse du vent (dispositif expérimental et animation numérique),
- Graduer différents pluviomètres,
- Convertir des degré Fahrenheit en degré Celsius,
- Lecture d'une carte météo
- Lecture de graphiques statistiques

Panneaux

1. Mesurer la météo
2. Comment mesurer le climat ?
3. Visualiser le changement climatique



Les gammes musicales

Nicolas Minet , IREM&S de Poitiers, professeur au Lycée du Bois d'Amour (Poitiers)

Épisode 3 : Les cases de la guitare

Résumé des épisodes précédents (Corol'aire n°116 et 117)

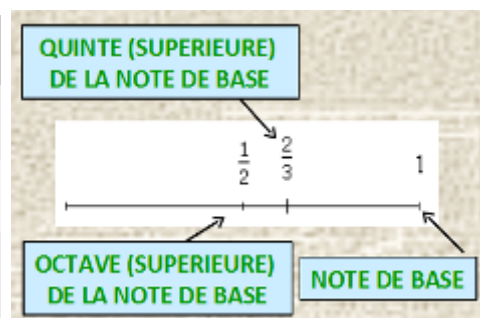
Une gamme est une échelle, ces deux mots n'en faisant qu'un en anglais : scale. Le nombre de notes et leur position sur l'échelle dépend des civilisations. L'intervalle d'octave est probablement le seul intervalle commun à toutes les civilisations car il délimite les deux extrémités de toute gamme. En effet, on peut le définir comme la différence entre deux sons, l'un produit par une corde et l'autre par sa moitié. Nous avons vu que la gamme de Pythagore fut créée à partir des intervalles d'octave et de quinte. Rappelons qu'un intervalle (musical) est, de manière générale, la différence sonore entre deux notes distinctes (on parle d'unisson lorsque les deux notes sont identiques).

Quand le musicien parle de note, le physicien parle de son et caractérise la hauteur d'une note par une fréquence. On peut établir expérimentalement que la fréquence d'une corde donnée est inversement proportionnelle à la longueur de corde qui vibre. On peut donc indifféremment parler de longueur ou de fréquence avec un instrument à cordes. Résumé en images :



Monocorde : Le chevalet mobile permet de modifier la longueur

Note	La plus aigüe	Entre deux	La plus grave
Longueur	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
Fréquence	2F	$\frac{3}{2} F$	F
Intervalle avec la note de base	Octave	Quinte	Unisson



La gamme de Pythagore : encore d'actualité au XVI^e siècle

Un intervalle se définit (aussi !) comme le quotient des fréquences des deux notes, en général la plus grande par la plus petite. Pourquoi s'intéresser aux **rapports** et pas aux différences des fréquences ? C'est ma foi une excellente question, et nous allons voir que la réponse est liée à l'impression de justesse sonore : en quelque sorte, le calcul des rapports va révéler une imperfection de certaines gammes. Ceci dit, on sait déjà que la gamme des Pythagoriciens a été créée à partir de deux **rapports** particuliers (quinte et octave), et que, selon les Anciens, les sons étaient d'autant plus consonants, que les fractions étaient simples.

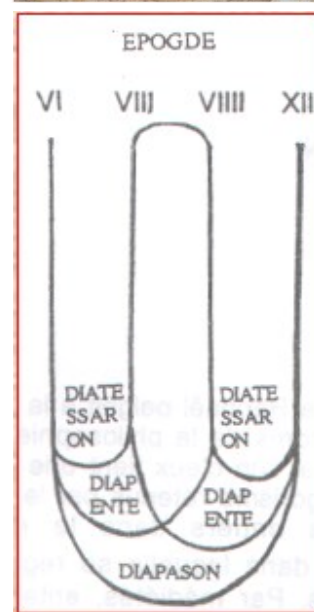
La gamme heptatonique¹ de Pythagore correspond à cette échelle de fractions comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1 :

1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
---	---------------	-----------------	---------------	---------------	-----------------	-------------------	---------------

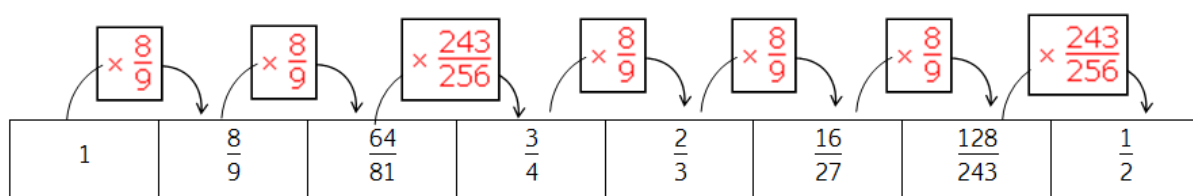
Dans sa fresque *l'École d'Athènes*, Raphaël met en scène, entre autres personnages, Pythagore entouré de disciples. L'un d'entre eux tient une ardoise et montre sur une figure de géométrie des intervalles musicaux issus de la gamme de Pythagore (retranscription de cette figure ci-contre) :

- les nombres VI et XII représentent la note de base et la note à l'octave ;
- les nombres VIII et VIII correspondent aux 4^e et 5^e notes de la gamme.

Nombres	VI	VIII	VIII	XII
Fraction de la gamme	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
Intervalle (nom actuel)	Octave	Quinte	Quarte	Unisson
Intervalle (nom ancien)	Diapason ou Double	Diapente	Diaterssaron	1



Nous verrons dans l'épisode final de notre saga comment Euclide avait défini une axiomatique pour déduire par des règles de logique quels intervalles étaient consonants ! En attendant, constatons ce fait remarquable : les rapports entre deux notes consécutives de la gamme de Pythagore sont soit égaux à $\frac{8}{9}$ soit à $\frac{243}{256}$. La fraction $\frac{8}{9}$ était un intervalle de référence dénommé « *epogde* » (c'est le titre de la figure ci-contre), ce qu'on peut traduire par « *ton* », terme musical sur lequel on va revenir. En effet, cette dissymétrie de la gamme va poser question...



Transposer, késaco ?

Transposer, c'est décaler toutes les notes d'un morceau selon un même principe, vers le grave ou vers l'aigu. Illustrons ceci à partir d'une mélodie relativement connue :



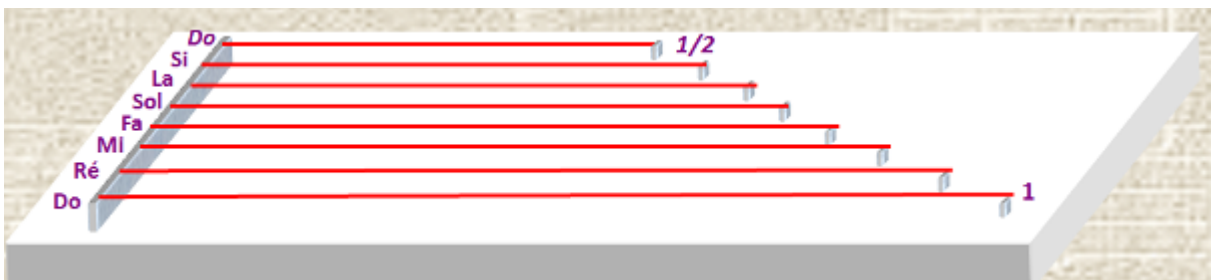
¹ On considère qu'il y a 7 notes car la 8^e est à l'octave de la première. Elles porteront donc le même nom.

Supposons que le principe de transposition consiste à remplacer chaque note par la suivante : chaque *do* devient *ré*, chaque *ré* devient *mi* et chaque *mi* devient *fa*.

La reconnaît-on encore, cette mélodie ? Deux problèmes au moins apparaissent :

- La réponse peut être subjective : moi, je reconnais ! Ah ? Pas moi...
- Sur quel instrument joue-t-on ? Quelle définition a-t-on donné pour chaque note qu'on nomme do, ré, mi... Autrement dit, quelles fréquences ou quelles longueurs de cordes a-t-on choisi ?

Imaginons qu'on s'en tienne à notre gamme de Pythagore : rappelons qu'à ce stade de notre récit, nous avons sous la main 7 notes, chacune correspondant à une fraction d'une corde de longueur 1. Cela nous permet de jouer avec cet instrument (telle une cithare à prix discount)



Désormais, une écoute est indispensable pour saisir le problème. Imaginons que « Do » soit la note de fréquence 100 Hz. Calculons les fréquences des notes suivantes, qu'on nommera « ré », « mi », etc...

1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
100 Hertz	113 Hz	125 Hz	133 Hz	Etc...	Etc...	Etc...	Etc...

Vous pouvez désormais jouer « Au clair de la Lune » à la sauce Pythagore en générant des sons ayant ces fréquences (par exemple avec le logiciel libre Audacity : sélectionner Generate puis Tone.)

Do	Do	Do	Ré	Mi	Ré	Do	Mi	Ré	Ré	Do
100 Hz	100 Hz	100 Hz	113 Hz	125 Hz	113 Hz	100 Hz	125 Hz	113 Hz	113 Hz	100 Hz

Transposons ensuite en rejouant la mélodie mais en décalant d'une note. En comparant les deux écoutes, on ne reconnaît pas très bien le morceau ! Enfin, en général... J'avais dit que ce serait subjectif ! Il faut s'y essayer ! À défaut, je vous propose d'écouter un autre extrait (massacré avec Audacity, voir [\[1\]](#) sur le web) et sa version transposée de deux manières : soit en ajoutant un même nombre (disons + 100 Hz) à chaque fréquence soit en multipliant chaque fréquence par un même nombre (disons x 1,25).

Dans un cas, on reconnaît l'extrait initial, mais dans l'autre Beethoven se retourne dans sa tombe !

Conclusion de l'expérience ? L'oreille semble identifier un intervalle musical « à quotient constant » et non « à différences constantes ». La raison ? Je n'en sais rien, je n'en ai jamais lu. Ce qu'il faut en déduire ?

La gamme de Pythagore ne permet pas de transposer n'importe comment car il y a deux types d'intervalles entre deux notes consécutives, qu'on peut appeler Grand Ton (GT) et Petit Ton (pt)

1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
	GT	GT	pt	GT	GT	GT	pt

Vous l'avez deviné, une transposition correcte du morceau consiste à passer des 3 notes en gras à gauche aux 3 notes en gras à droite. Car les intervalles sont les MEMES ! Ceci est fondamental...

Comment bien transposer, alors ?

Le problème de la transposition a une solution théorique : la voici dans les mots de Patrice Bailhache [2] au sujet de cette nouvelle gamme qu'on appellera « à tempérament égal » :

*Ce tempérament, celui en vigueur aujourd'hui sur tous les instruments à clavier, et même en principe dans toute la musique, sacrifie volontairement la première exigence, celle de la justesse, de manière à satisfaire pleinement les deux autres : modulations et transpositions infinies, clavier de **douze** touches par octave.*

*Il apparaît historiquement, sous forme imprécise, vers 1530, mais n'est alors réellement usité que pour les instruments à touche munie de frettes (luth, viole). Comme déjà dit, il ne s'impose pour le clavier qu'à l'époque de Bach. La réalisation effective du tempérament égal présente des difficultés. Les auteurs des XVI^e et XVII^e siècles proposent des méthodes géométriques de partition du **monocorde**. Il s'agit de diviser une longueur **en douze parties géométriquement proportionnelles** les unes aux autres.*

Il est ici question d'une gamme à douze notes. Certes nous avons vu dans l'épisode précédent qu'une gamme de Pythagore à douze notes existait, mais pourquoi ne pas tenter a priori cette division égale de l'octave en 7 intervalles égaux ? Tout reviendrait à chercher le nombre correspondant à un ton « T ».

1 = Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	$\frac{1}{2}$ = Do
	T	T	T	T	T	T	T

La division devant être géométrique, le nombre cherché est $\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$

Mais l'écoute du résultat peut laisser sceptique... ou pas. (Ah si, là, quand même ! ... Voir [1] ou bien créez cette gamme avec Audacity !)

En fait, c'est la division en 12 notes qui va offrir le meilleur des compromis ! La preuve en tableau :

Fractions de Pythagore arrondies à 3 décimales	1,000	0,889	0,790	0,750	0,667	0,593	0,527	0,500
Puissances de $\alpha = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$	α^0	α^2	α^4	α^5	α^7	α^9	α^{11}	α^{12}
Puissances de α arrondies à 3 décimales	1,000	0,891	0,794	0,749	0,667	0,595	0,530	0,500

C'est le compromis universel en vigueur à ce jour : good bye ! la gamme de Pythagore, malgré des fractions simples, avec certaines notes dites « naturellement justes » comme la quinte... et bonjour ! la gamme au tempérament égal, liée à un nombre irrationnel. La note « la » étant fixée depuis plus d'un demi-siècle à 440Hz (à une puissance de 2 près), et correspondant à α^9 , on peut enfin définir clairement les actuelles notes do, ré, mi, ... en recalculant leur fréquence à l'aide de la ligne des puissances du tableau ci-dessus. Alors, ça ne sert à rien, les racines ?

Et les cases de la guitare dans tout ça ?

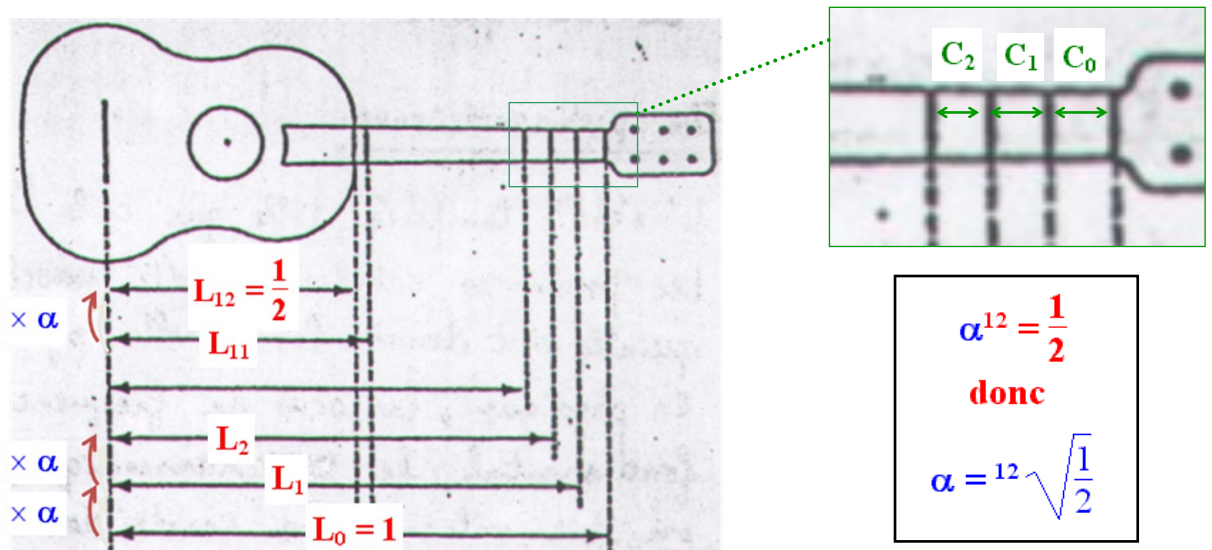
Sur une guitare, le luthier doit placer les frettes, ces barres de métal qui délimitent les cases sur le manche. Le tempérament égal demande que :

$$L_0 = 1, L_1 = \alpha, L_2 = \alpha^2, \dots, L_n = \alpha^n \text{ avec } \alpha = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}.$$

Donc les longueurs de case valent $C_0 = 1 - \alpha$, $C_1 = \alpha - \alpha^2$, $C_2 = \alpha^2 - \alpha^3$, ... et en général $C_n = \alpha^n - \alpha^{n+1}$.

Il est donc clair que la suite des longueurs de case est aussi géométrique et de raison α !

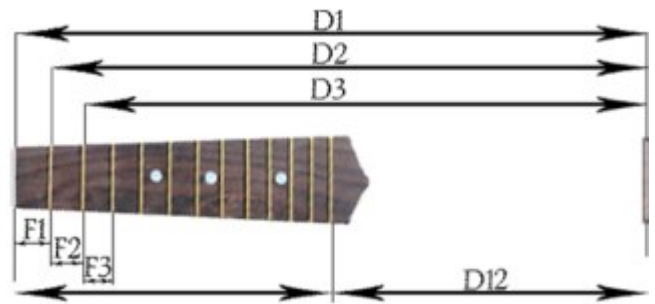
Je sais à quoi vous pensez là tout de suite maintenant : trouvons une guitare et un mètre pour vérifier !



Un ukulélé pourra faire l'affaire : l'approximation 18/17 de α par Vincenzo Galilei (1520–1591) est aujourd'hui connue des luthiers sous le nom de « **règle des 18** ». Je laisse Tonton Rémy [3] conclure !

« Un ukulélé a en général une touche de 12 frettes, quelquefois de 14 frettes. Calculer l'emplacement de l'octave est simple, mais trouver l'emplacement des autres notes nécessite des calculs plus savants. Les luthiers utilisent une équation appelée la règle des 18, c'est en fait celle des 17,8171537...

On calcule la position d'une frette à partir de la précédente..



D1 est la longueur du diapason de départ [longueur totale de corde] F1 est la position de la 1^{ère} frette à partir du sillet et $F1 = D1$ divisé par 17,8171537... la longueur de diapason restante sera $D2 = D1 - F1$.

D2 divisé à son tour par 17.8171537... nous donnera l'emplacement de F2 la deuxième frette.

La longueur de diapason restante sera $D3 = D2 - F2$. Et l'on poursuit jusqu'au nombre de frettes voulues.»

Après avoir compris ça, on peut mourir tranquille. Mais en musique.

Références

[1] MINET Nicolas, *7 notes dans la gamme, toujours ? Pourquoi ?* Feuille à problème n°7, IREM de Lyon

<http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille7/7notes/7notes.html>

[2] BAILHACHE Patrice, *Tempéraments musicaux et mathématiques*

<http://patrice.bailhache.free.fr/thmusique/temperaments.html>

[3] LE GOITRE Rémy, *Anatomie du ukulélé*

<http://www.tontonremy.com/ukulele/instrument/page3/page3.html>

Ombres et lumières

Dominique Gaud

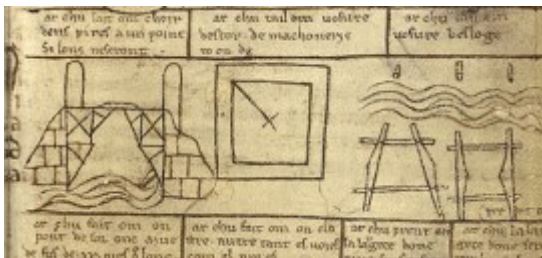
Si les problèmes d'héritage furent la source des problèmes de partages en parties égales, d'autres préoccupations plus spirituelles ou harmonieuses eurent recours à des problèmes de partage équitables. Ainsi les bâtisseurs du moyen âge les utilisèrent lors de la construction de cloîtres pour des raisons harmonieuses (**un parfait équilibre entre ombre et lumière** semble-t-il) comme en témoignent les carnets de Villard de Honnecourt [\[1\]](#), architecte du XIII^e siècle.



Villard de Honnecourt, né autour de l'an 1200, est originaire du village de Honnecourt-sur-Escaut, situé près de Cambrai. Comme les compagnons de son temps, il fait son apprentissage en allant de ville en ville et de chantier en chantier. Il deviendra plus tard magister latomus, c'est-à-dire maître d'œuvre, profession qui englobe le métier d'architecte. Son activité professionnelle couvre les années 1225 à 1250.

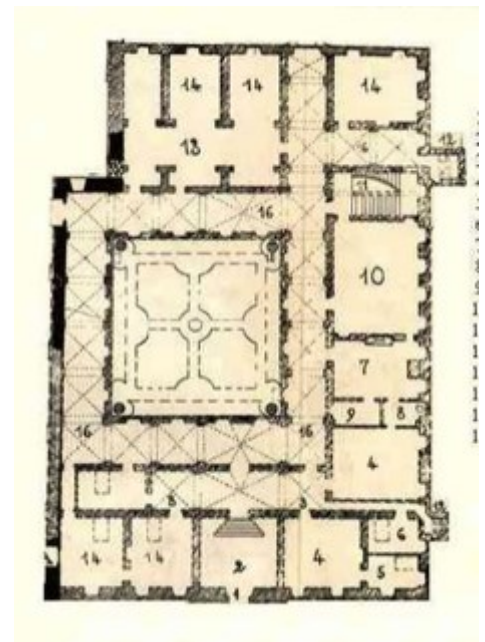
Les hommes de métier de l'époque voyageant beaucoup, nous connaissons, grâce à son Carnet, quelques-unes des étapes de son périple : Vaucelles, où il travailla à la construction de l'abbaye cistercienne, Cambrai, où il assista à l'« élévation du chœur de Notre-Dame de Cambrai », Reims, Laon, Chartres et Lausanne, mais également, vers 1235, la Hongrie, où il édifia à Košice la cathédrale dédiée à Sainte Élisabeth de Hongrie. [\[2\]](#)

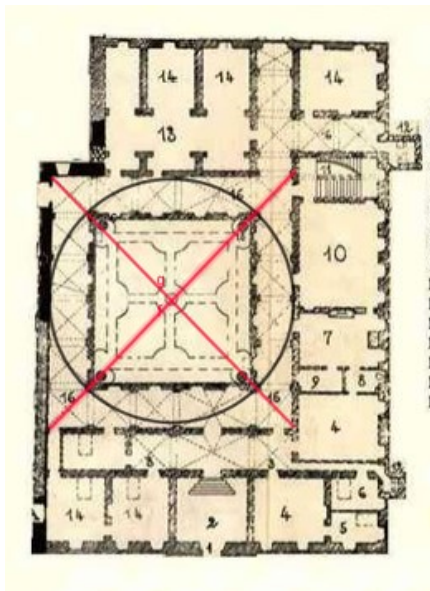
Le croquis central de la figure de droite illustre la construction d'un cloître, l'aire du déambulatoire devant être la même que l'aire du carré au centre.



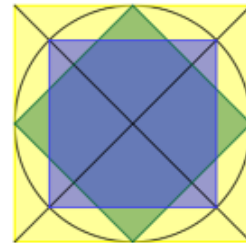
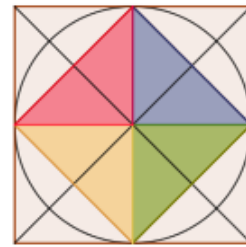
Cela se vérifie dans un certain nombre de monastères quand la topographie des lieux le permettait comme dans l'abbaye de Citeaux [\[3\]](#).

C'est un exercice classique conduisant à une mise en équation mais pour un bâtisseur du moyen-âge mieux valait un algorithme géométrique simple et celui-ci est élémentaire : deux diagonales et un cercle !





La preuve sans mot, en observant :



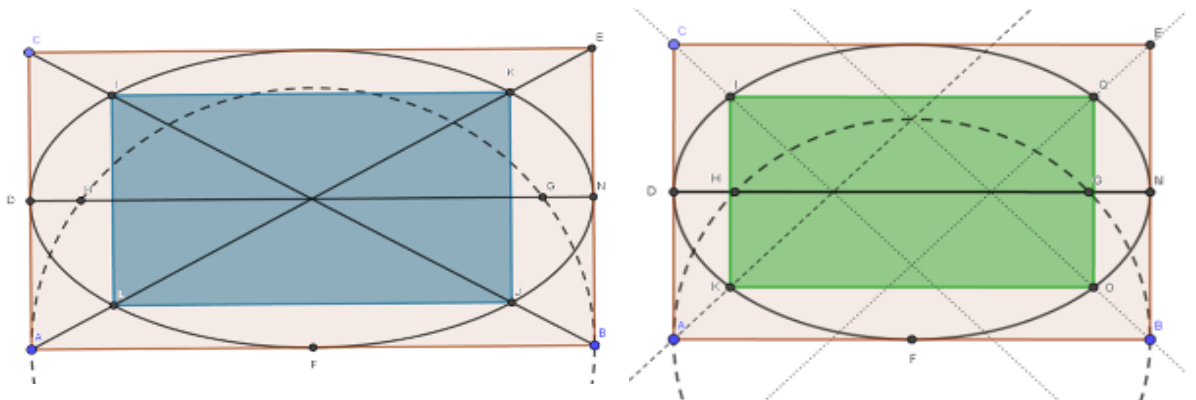
Oui mais voilà, si la topographie des lieux ne permet pas de faire un carré mais oblige le cloître à être rectangulaire, comment faire ?

Une mise en équation simple conduit à une largeur égale à $((a+b) - (a^2+b^2)^{0.5})/2$ où $2a$ et $2b$ sont les dimensions du rectangle initial. On peut le construire sans problème avec la règle et le compas mais en combien d'opérations ?

En oubliant une des conditions, on peut avoir deux solutions approchées certes mais élémentaires à construire qui reviennent à transformer le cercle en ellipse c'est-à-dire effectuer une affinité orthogonale qui conserve le rapport des aires.

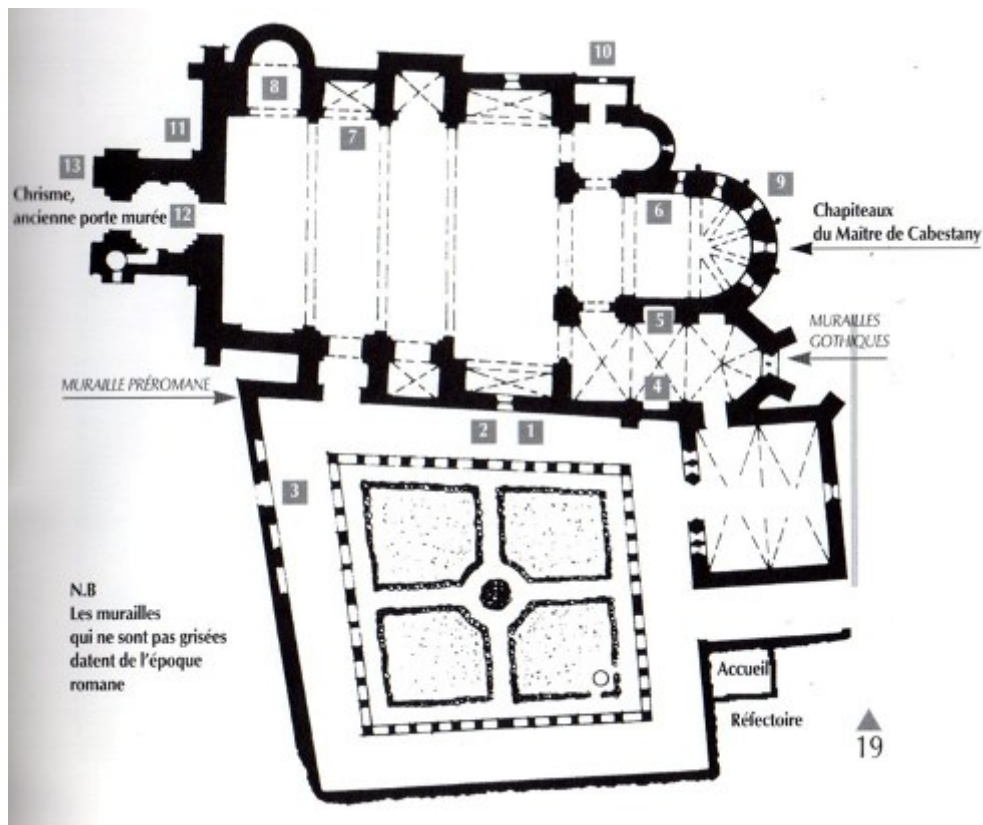
Deux solutions en construisant une ellipse dont les foyers sont les intersections de la médiane du rectangle avec le demi cercle centré sur un côté parallèle à cette médiane.

La première solution avec les diagonales donne bien l'égalité des aires (mais pourquoi ?) entre le jardin et le déambulatoire mais la largeur du déambulatoire n'est pas constante. On trace le demi-cercle de diamètre AB qui coupe la médiane du rectangle en H et G qui sont les foyers de l'ellipse car si O est centre du rectangle $OH = OG = (a^2-b^2)^{0.5}$. L'ellipse se trace selon la méthode du jardinier et le tour est joué. Si le rectangle est proche d'un carré (ce qui est bien sûr souvent le cas !) la largeur du déambulatoire n'est pas constante mais cela est peu visible.



L'autre solution consiste à maintenir un déambulatoire de largeur constante en utilisant les bissectrices des 4 angles droits mais alors les aires du jardin et du déambulatoire ne sont plus tout à fait égales mais l'erreur est moindre si là encore le rectangle s'approche du carré (peut-on évaluer cette différence ?).

Et si la topographie des lieux est encore plus problématique. Quelle démarche doit suivre l'architecte pour concilier au mieux les deux impératifs : égalités des aires et largeur du déambulatoire constant ?



Abbaye de Saint-Papoul (Aude)

Cela nous amène à réfléchir (le cloître est un lieu propice pour cela !) sur les constructions exactes et approchées à savoir : une construction effective à la main suivant une méthode exacte donne-t-elle un résultat plus satisfaisant lors de la réalisation qu'une construction fondée sur une méthode approchée ?

Nous ne sommes pas les premiers à nous poser de telles questions et même certains mathématiciens les ont théorisées.

En 1903, Emile Michel Hyacinthe Lemoine (celui du point remarquable du triangle !), publie *Géométrie ou arts des constructions géométriques* (qui ne prend en compte que les tracés à la règle et au compas). Cette théorie tente de définir parmi toutes les constructions effectives (exactes ou approchées) d'une figure « la meilleure et la plus simple ». Mais elle n'est pas applicable dans notre cas, faute à l'ellipse !

Moralité : comme pour les cloîtres il peut être parfois utile de mettre en lumière les méthodes approchées et mettre à l'ombre les méthodes exactes.

Bibliographie

Histoires de géomètres... et de géométrie, Jean Louis Brahem, ed Le Pommier, 2011

Kuzniack, Houdement, approximations géométriques *L'ouvert* n°105 (IREM de Strasbourg) numérisé

https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Oouvert/n105/o_105_19-28.pdf

Maths et mesure : visite expresse

Jean-Paul Guichard

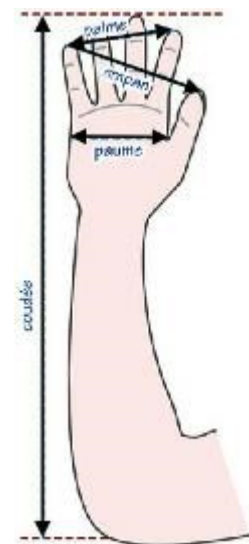
S'il n'est pas question, dans cet article, de faire une visite entière de l'Exposition Maths et Mesure, on peut tout de même prendre le temps de se concentrer sur un objet : la coudée égyptienne. C'est la visite expresse que nous propose Jean-Paul Guichard.



Coudée de Mâya, ministre des Finances du roi Toutânkhamon , 1336 - 1327 avant J.-C. (18^e dynastie)

Posez votre avant-bras sur un tableau blanc, une vitre, ou 2 feuilles A4 mises bout à bout. Marquez la longueur de votre avant bras (du coude à la pointe de vos doigts) : c'est votre coudée, avec laquelle vous pouvez mesurer les dimensions de la pièce dans laquelle vous vous trouvez. Pour améliorer la fiabilité et la commodité du report de la coudée, il vous suffit de tailler une baguette de bois de même longueur, comme vous en trouverez au pôle 2 de l'exposition Maths et mesure. Vous avez transformé votre coudée en un instrument, celui qui selon la tradition a permis à Thalès de mesurer l'ombre de la grande pyramide de Khéops, et d'en déduire sa hauteur : 280 coudées, que vous pourrez facilement convertir en mètres en mesurant votre coudée avec un mètre de couturière. La coudée permet donc de mesurer des longueurs inaccessibles grâce à la ruse de certains hommes connus sous le nom de mathématiciens...

Mais en mesurant la longueur de votre table, ou de votre pièce, il serait bien étonnant que vous trouviez un nombre entier de coudées. Il va donc falloir partager la coudée en un certain nombre de parts : combien ? Une partie de notre avant bras est notre main. Prenez la paume de votre main, là où sont fixés vos 4 doigts, et reportez-la sur la longueur de votre coudée qui figure sur le tableau blanc, la vitre ou les 2 feuilles A4 : vous verrez qu'elle y loge 6 fois. Donc la coudée va être partagée en 6 paumes, et la paume, de façon naturelle en 4 doigts. Le nombre de doigts que contient une coudée peut se vérifier en les comptant sur la coudée de Maya, sauf que c'est une coudée royale qui comporte une paume de plus que la coudée usuelle, appelée aussi coudée naturelle ou petite coudée. Il faut donc s'arrêter à temps ! Nous avons ainsi un instrument performant qui permet de faire des mesures de longueur au doigt près. Des mesures à exprimer en coudées, paumes, doigts. La possibilité d'activités de calcul de périmètres, et donc de conversions. Un moyen aussi de prendre la mesure de l'intérêt d'utiliser un système décimal d'unités.



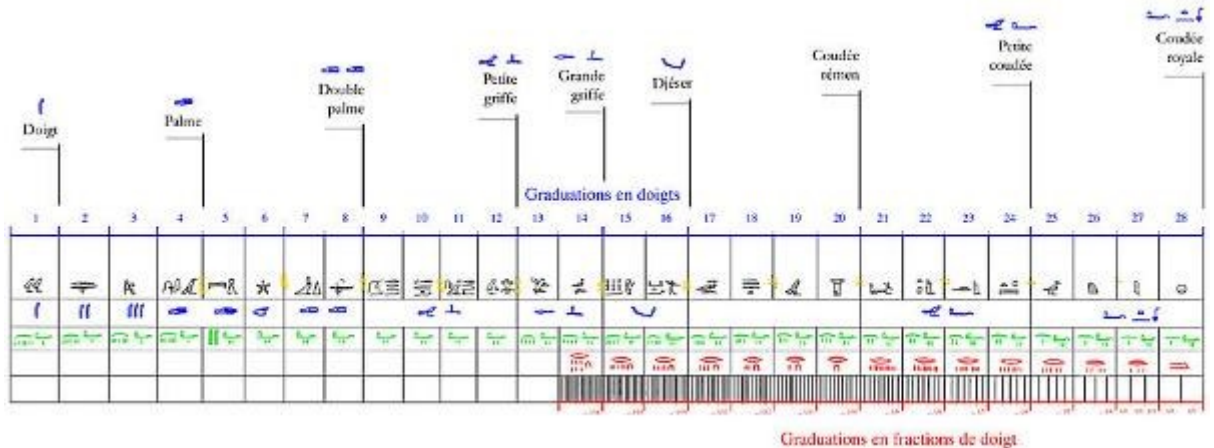
La coudée et ses divisions

Utiliser un instrument de mesure non usuel : comprendre comment il est fabriqué, et découvrir la nécessité des sous-unités pour faire des mesures. Ce sont les objectifs de l'expérience sur la coudée qui est proposée dans l'exposition *Maths et Mesure*, et qui peut se pratiquer avec des modalités adaptées à partir de la maternelle. Une parmi plus de 20 ex-

périences proposées aux visiteurs.

Dans cette expérience on peut aussi travailler la notion d'étalon : la mesure d'une longueur dépend de la longueur choisie pour unité, et si l'on veut tous avoir la même mesure il faut que nous choissions tous la même coudée. Mais l'exposition nous propose de vivre cette situation avec l'expérience sur le Pied de Roi à découvrir également.

Pour aller plus loin : les fractions égyptiennes comme vous ne les avez jamais vues !



Pour les longueurs plus petites que le doigt, les Égyptiens n'utilisent pas une fraction déterminée du doigt comme sous-unité (par exemple $1/16$ de doigt, ou $1/3$ de doigt : les doigts étant alors partagés en 16 ou 3 parties égales ; ou comme au Moyen Âge la ligne qui valait $1/9$ de doigt), mais ils utilisent toutes les fractions de $1/2$ à $1/16$.

C'est ce que l'on aperçoit sur la coudée de Maya, et que l'on voit clairement sur son schéma reproduit ci-dessus.

Comment faisaient-ils pour mesurer une longueur plus petite qu'un doigt ?

Ils utilisaient pour commencer la plus grande fraction possible du doigt, puis dans le reste ils faisaient de même. Par exemple imaginons que nous utilisions pour faire notre mesure le 16^{e} du doigt (doigt partagé en 16 parties égales) et que nous trouvions $7/16$ de doigt : cela veut dire que nous avons utilisé le $1/16$ de doigt pour unité. Alors que le mesureur égyptien aurait vu que $1/2$ est trop grand, mais $1/3$ ça va. Dans le reste il ne peut loger que $1/10$. Donc sa mesure est $1/3 + 1/10$. On peut vérifier que $1/3 + 1/10$ est très proche de $7/16$.

Aurait-il pu trouver exactement la même mesure ? Oui !

Quelles fractions du doigt aurait-il alors utilisées ?

Indication : en partant avec une fraction plus petite que $1/3$, par exemple la suivante $1/4$.

On peut vérifier que $1/4 + 1/8 + 1/16$ est une solution. Y en a-t-il d'autres ?

Ainsi les Égyptiens, à cause de leur technique de mesurage, certainement plus fiable pour de très petites longueurs, n'utilisèrent que des fractions de numérateur 1 (une seule exception : $2/3$) fractions que par suite les mathématiciens appelleront fractions égyptiennes. De même dans leurs problèmes de partage, à cause de leur technique de la division. Par exemple 2 divisé par 7 est $1/4 + 1/28$. Car pour partager 2 pains entre 7 hommes, on donnera à chacun $1/4$ de pain ; reste $1/4$ de pain à partager en 7, soit $1/28$ de pain pour chacun. On peut vérifier que $1/4 + 1/28 = 2/7$.

Voir : Keller Olivier, *L'algèbre et le calcul en Égypte ancienne*, IREM de Lyon, 1986.

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

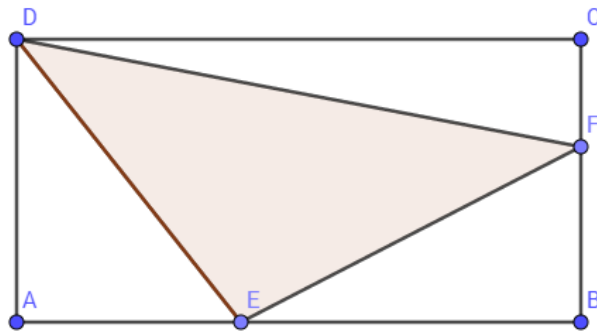
Des problèmes

120-1 *proposé par Dominique Gaud (Migné-Auxances) :*

Que d'or !

ABCD est un rectangle.

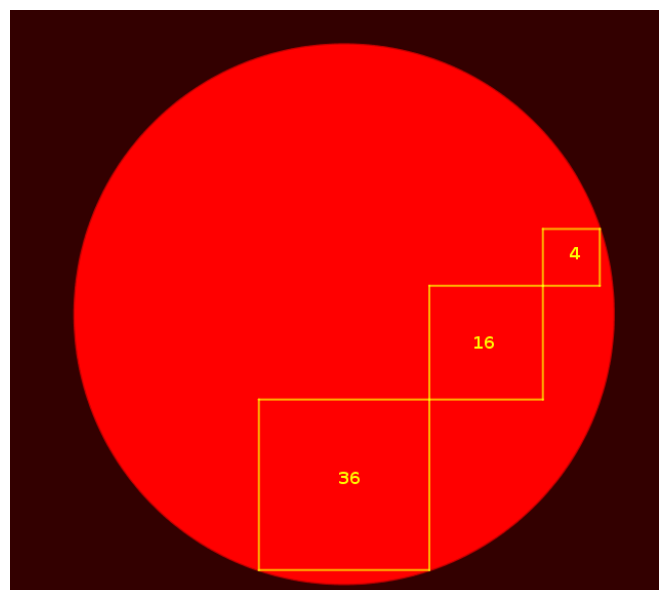
- 1- Où placer E et F pour que les trois triangles DCF, FBE et AED aient la même aire ?
- 2- Comment choisir alors le rectangle pour qu'en plus $DE = EF$?
- 3- Que dire alors du triangle DEF ?



120-2 *proposé par Sébastien Dassule-Debertonne (Bonneuil Matours) :*

Sans grande difficulté mais joli

Aire du disque ?



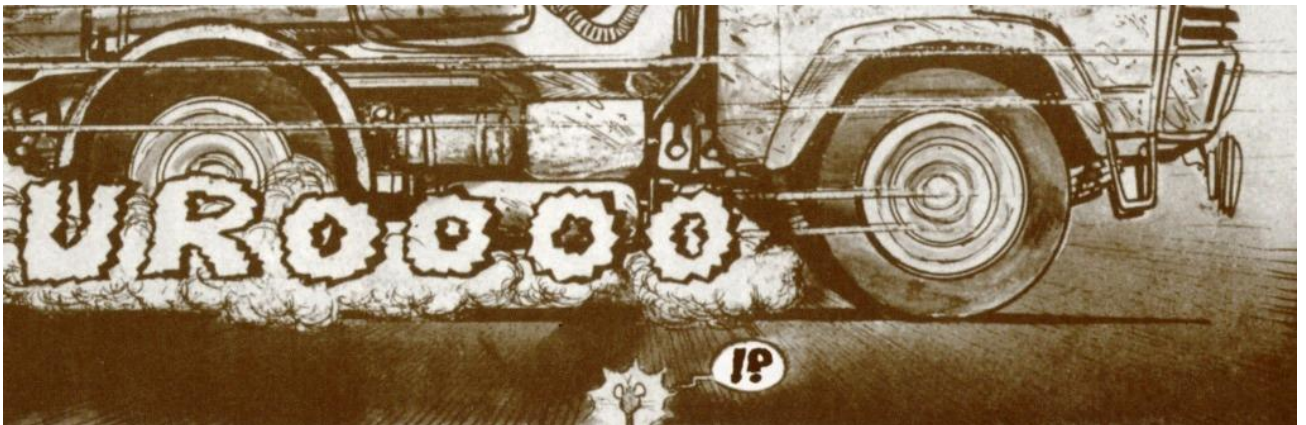
120-3 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Allez, on y croit !

Un rat s'est mis en tête de traverser la nationale 10. Des poids lourds de toute l'Europe y circulent en convois serrés. Pour simplifier le problème on suppose que la file des camions est ininterrompue et que ceux-ci sont modélisés par des parallélépipèdes rectangles de longueur 15 m, de largeur 2,5 m et de hauteur 4 m. Ils roulent tous à 90 km/h en respectant une distance de sécurité de 50 m.

Si notre rat, nommons-le George, choisi une direction perpendiculaire au bord de la route, à partir de quelle vitesse a-t-il plus d'une chance sur deux de survivre à sa traversée ?

Peut-il abaisser cette vitesse en inclinant sa direction selon un angle α par rapport au bord de la route ?



Source : Ptit Luc. Pacush Blues- Premières mesures, Glénat, 1994.

120-4 proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :

À travers les âges

Quand Bertrand aura l'âge qu'a maintenant son père, sa sœur sera deux fois plus âgée qu'elle ne l'est actuellement et l'âge de son père sera alors le double de celui qu'aura Bertrand lorsque sa sœur aura l'âge actuel de son père.

La somme des trois âges fait un siècle.

Quel est l'âge de chaque personnage ?

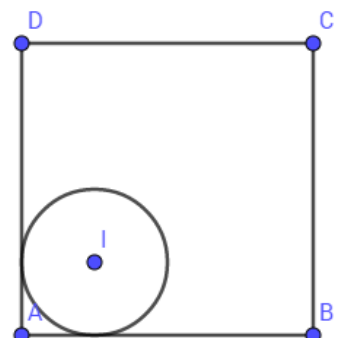
Des solutions

119-1 proposé par Jacques Chayé :

Comment coincer la bulle ?

Dans le carré ABCD, le cercle C de centre I et de rayon r ($0 < r < AB/2$) est tangent aux côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré.

Construire un cercle situé dans le carré et tangent à C , à $[AB]$ et $[BC]$.

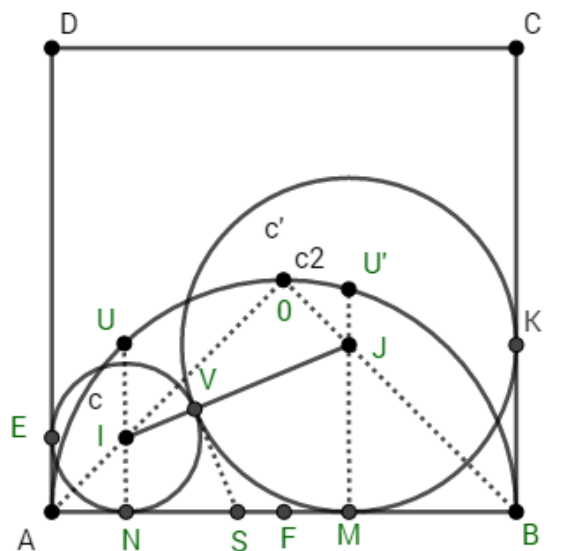


Solution de Serge Parpay

Supposons le problème résolu. Notons C' ce cercle et J son centre.

Le cercle C de centre I est tangent à $[AD]$ en E , à $[AB]$ en N . Le cercle C' est tangent à $[BC]$ en K , à $[AB]$ en M . Les cercles C et C' sont tangents en V . Les points I , V et J sont alignés. La tangente commune aux deux cercles coupe $[AB]$ en S . Notons F le milieu de $[AB]$ et C_2 le cercle de diamètre $[AB]$, la médiatrice de $[AB]$ coupe C_2 en un point O . La bissectrice de l'angle droit en A passe par I et O , la bissectrice de l'angle droit en B passe par J et O . La demi-droite $[NI]$ coupe le cercle C_2 en U , la demi-droite $[MJ]$ coupe le cercle C_2 en U' . La droite (SI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NSV}$ et la droite (SJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{VSM}$.

Par conséquent $SN = SV = SM$, notons t cette longueur commune.



Les triangles VSI et VSJ sont donc semblables. (a)

On connaît C de rayon r . On note a le côté du carré. On veut tracer C' , donc avoir son rayon x . D'après (a) on a $x/t = t/r$, d'où les égalités $(x + t)/t = (t + r)/r = a/(t + r)$.

On a alors $(t + r)^2 = ar$, soit $AS^2 = AN \cdot AB$. Dans le triangle rectangle AUB , on a $AU^2 = AN \cdot AB$. Par suite $AS = AU$. Le cercle de centre A et de rayon AU coupe donc $[AB]$ en S . Le cercle de centre S et de rayon SN coupe $[AB]$ en M et C en V . La droite (IV) coupe la droite (BO) en J . Le cercle C' de centre J , de rayon JV est le cercle cherché.

Solution de l'auteur

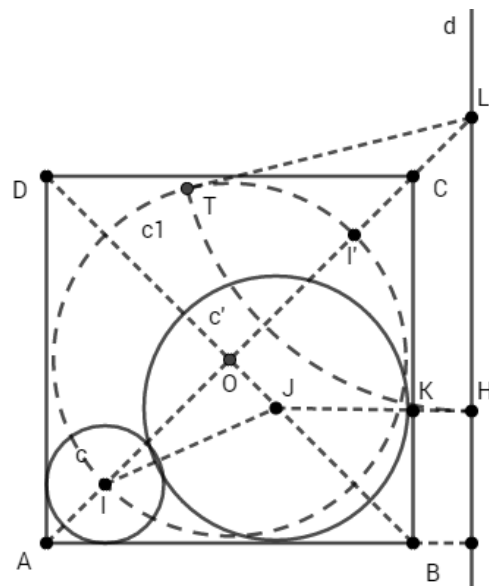
Soit J le centre d'un cercle C' répondant à la question et soit K le point de contact de ce cercle avec $[BC]$.

Soit H le point situé à la distance r de K dans le prolongement de $[JK]$ et soit d la droite passant par H et perpendiculaire à (AB) .

On a : $JI = JH$; le point J est alors à égale distance de I et de la droite d , il appartient par conséquent à la parabole P de foyer I et de directrice d .

Le cercle C' cherché étant tangent à $[AB]$ et à $[BC]$, J appartient aussi à (BD) .

Conclusion : J est un des points communs à la droite (BD) et à la parabole P .



Construisons ce point :

Il est le centre d'un cercle Γ centré sur (BD) , passant par I et tangent à d . Γ passe donc aussi par I' le symétrique de I par rapport à (BD) ; il fait alors partie du faisceau F des cercles passant par I et I' , comme, par exemple, le cercle C_1 de diamètre $[II']$ de centre O .

Soit L le point d'intersection de d et de (AC) et soit T un des deux points communs au cercle C_1 et au cercle de diamètre $[OL]$. (LT) est alors tangente au cercle C_1 .

LT^2 est la puissance de L par rapport à C_1 et par rapport à tous les cercles du faisceau $\mathcal{F}$ et en particulier par rapport à Γ .

Soit H sur d tel que $LH = LT$ et tel que la perpendiculaire à d en H coupe le segment $[BD]$; le point J cherché est alors le centre du cercle Γ et du cercle C' que nous cherchions à construire.

Remarque : le point H' symétrique de H par rapport à L est le point de contact avec d d'un autre cercle centré sur la droite (BD) et la parabole $\mathcal{P}$ et qui est donc tangent au cercle C , à la droite (AB) et à la droite (BC) .

Solution de Louis Rivoallan

D'abord les notations.

On appelle N le point de contact du cercle C et de la droite (AB) . On note O le centre du carré. On appelle J le centre du cercle cherché, noté C' , et M le point de contact du cercle C' avec la droite (AB) et V le point de contact de C et C' . La tangente commune aux cercles C et C' en V coupe $[AB]$ en S . Soit R le milieu de $[IJ]$.

On note P l'intersection de (IS) et de (NV) et Q l'intersection de (SJ) avec (VM) . Dans la symétrie d'axe (IS) , les points N et V sont échangés, donc (NV) est perpendiculaire à (IS) . De même (VM) est perpendiculaire à (SJ) .

On a $SN = SV$ d'une part et $SV = SM$ d'autre part. Par suite N , S et M étant alignés sur $[AB]$, le point S est le milieu de $[NM]$ et le triangle NVM est rectangle en V .

Le quadrilatère $QVPS$ a trois angles droits, donc c'est un rectangle et le quatrième angle de sommet S est aussi droit. Le point S est donc sur le cercle de diamètre $[IJ]$, noté C'' .

Les cercles C et C' étant tangents au carré, les droites (AI) d'une part et (BJ) d'autre part sont les diagonales du carré. Ces diagonales se coupent en O . Par suite le triangle IJO est rectangle en O et O est donc sur le cercle C'' .

Dans le trapèze $NIJM$, la droite (SR) passe par S le milieu de $[NM]$ et par R milieu de $[IJ]$, par conséquent (théorème de Thalès), elle est parallèle à (IN) et à (JM) et par suite elle est perpendiculaire à $[AB]$. Par suite $[RS]$ est un rayon de C'' perpendiculaire en S à (AB) , donc C'' est le cercle passant par les points O et I et tangent en S à la droite (AB) .

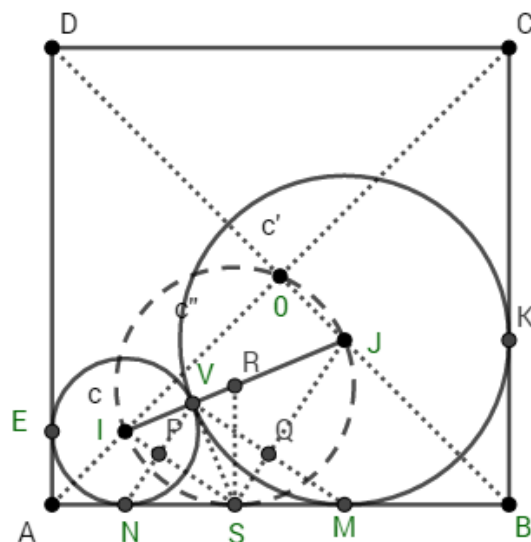
On est donc ramené à un problème classique : trouver le ou les cercles du faisceau de cercles à point de base O et I , tangent(s) à la droite donnée (AB) .

La construction de Wallis permet de le faire aisément. Il y a deux cercles qui conviennent en général. Pour chacun de ces cercles, on a donc le point V , puis le point K et enfin le point J .

Autre approche.

Le début est identique pour montrer que le triangle ISJ est rectangle en S et le triangle NVM est rectangle en V .

Le segment $[SV]$ est respectivement la hauteur issue de S dans ISJ et la médiane relative à $[NM]$ dans NVM .



Si on note x le rayon du cercle cherché et a le côté du carré, on a donc :

$VS^2 = rx$ (propriété de la hauteur dans un triangle rectangle).

$VS^2 = NM^2/4 = (a - r - x)^2/4$ (calcul du carré de la médiane)

Après développement, on obtient l'équation du second degré : $x^2 - 2(a + r)x + (a - r)^2 = 0$

Les solutions sont $x_1 = (a + r) - 2\sqrt{ar}$ et $x_2 = (a + r) + 2\sqrt{ar}$.

Ces nombres sont constructibles à la règle et au compas, et cela permet donc de trouver les centres des cercles cherchés.

119-3 proposé par Frédéric de Ligt :

Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $\lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière du nombre.

Solutions de Louis Rivoallan

Louis Rivoallan a été inspiré par la question et a envoyé plusieurs solutions aux approches bien différentes. En voici deux.

Début commun aux deux démonstrations :

La relation est vérifiée pour $n = 1$ car $\sqrt{(2)}$ et $\sqrt{(3)}$ ont la même partie entière 1.

Désormais, on suppose $n \geq 2$.

Tout d'abord, il est aisé de voir que les suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ respectivement par

$u_n = \sqrt{(n-1)} + \sqrt{(n+1)}$ et $v_n = \sqrt{(4n-1)}$ sont des suites croissantes.

On sait également que la fonction racine carrée est concave donc,

pour tout $x \geq 1$, $\sqrt{(x-1)} + \sqrt{(x+1)} < 2\sqrt{x}$.

Soit $A(n) = (u_n + v_n)(2\sqrt{(n^2-1)} + (2n-1))$.

Pour $n > 1$, on a $A(n) > 0$ donc pour $n > 1$, le signe de $u_n - v_n$ est le même que celui de $(u_n - v_n) \times A(n) = 4n - 5$.

Donc, pour $n > 1$, $u_n - v_n > 0$, autrement dit $v_n < u_n$.

Suite de la première preuve :

De plus $u_n - v_n = \frac{4n-5}{A(n)} = \frac{1-\frac{5}{4n}}{\frac{A(n)}{4n}}$.

Il est aisé de voir que, pour $n > 1$, $\frac{A(n)}{4n} > 1$ et $1 - \frac{5}{4n} < 1$, donc $u_n - v_n < 1$.

Est-il possible qu'il existe un entier m entre v_n et u_n ? Deux cas peuvent être envisagés suivant que ce nombre est pair ou impair.

a) Ce nombre est pair, $m = 2a$.

On aurait $v_n < 2a$, donc $4n - 1 < 4a^2$. Quel est le terme de la suite (v_n) le plus proche de cet entier ? C'est $n = a^2$.

Mais alors $u_{a^2} = \sqrt{(a^2-1)} + \sqrt{(a^2+1)} < 2\sqrt{(a^2)}$ car la fonction racine carrée est concave, donc $u_{a^2} < 2a$.

Le nombre $2a$ n'est pas entre v_{a^2} et u_{a^2} .

b) Ce nombre est impair, $m = 2a + 1$.

On aurait $4n - 1 < (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$. Donc $4n < 4a^2 + 4a + 2$.

Le terme de la suite (v_n) le plus proche est obtenu pour $n = a^2 + a$ alors :

$u_{a^2+a} = \sqrt{(a^2+a-1)} + \sqrt{(a^2+a+1)} < 2\sqrt{(a^2+a)} < 2\sqrt{\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)} = 2\left(a+\frac{1}{2}\right) = 2a+1 = m$.

Là encore le nombre m n'est pas entre v_{a^2+a} et u_{a^2+a} .

Pour $n > 1$, aucun entier n'est compris entre v_n et u_n , et l'écart $u_n - v_n$ est inférieur à 1, donc ces termes ont les mêmes parties entières.

La relation demandée est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Suite de la seconde preuve :

On note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble des entiers n tels que $a \leq n \leq b$.

Pour tout a appartenant à $\mathbb{N}^*$, on note $I_a = \llbracket a^2 + 1; a^2 + a \rrbracket$ et $J_a = \llbracket a^2 + a + 1; (a + 1)^2 \rrbracket$.

On a $\{1\} \cup (\cup_{a=1}^{+\infty} (I_a \cup J_a)) = \mathbb{N}^*$. Donc, il existe un nombre entier $a \geq 1$ tel que $n \in I_a$ ou $n \in J_a$.

a) Cas où $n \in I_a$.

Compte tenu de la croissance des suites (u_n) et (v_n) et de l'inégalité $v_n < u_n$, on a donc :

$$v_{a^2+1} \leq v_n < u_n \leq u_{a^2+a}.$$

Or,

$$v_{a^2+1} = \sqrt{4(a^2 + 1) - 1} = \sqrt{4a^2 + 3} > \sqrt{((2a)^2)} = 2a$$

et

$$u_{a^2+a} = \sqrt{(a^2 + a - 1)} + \sqrt{(a^2 + a + 1)} < 2\sqrt{(a^2 + a)} = 2\sqrt{\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)} < 2a + 1$$

car la fonction racine carrée est concave.

Donc pour $n \in I_a$, $\lfloor u_n \rfloor = \lfloor v_n \rfloor = 2a$.

b) Cas où $n \in J_a$.

On procède de la même façon et on a $v_{a^2+a+1} \leq v_n < u_n \leq u_{(a+1)^2}$.

D'où

$$v_{a^2+a+1} = \sqrt{(4a^2 + 4a + 4 - 1)} = \sqrt{((2a + 1)^2 + 2)} > 2a + 1,$$

$$u_{(a+1)^2} = \sqrt{((a + 1)^2 - 1)} + \sqrt{((a + 1)^2 + 1)} < 2\sqrt{(a + 1)^2} = 2a + 2.$$

Ce qui montre que pour $n \in J_a$, $\lfloor u_n \rfloor = \lfloor v_n \rfloor = 2a + 1$. La relation demandée est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Solution de l'auteur

La relation est vérifiée pour $n = 1$. Pour tout entier plus grand que 1 on a :

$$(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})^2 = 2n + 2\sqrt{n^2 - 1}.$$

Comme on a les inégalités :

$$n - 1 < \sqrt{n^2 - 1} < n,$$

$$2n - 2 < 2\sqrt{n^2 - 1} < 2n.$$

On a donc :

$$4n - 2 < (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})^2 < 4n,$$

$$\sqrt{4n-2} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n}.$$

Soit maintenant k l'unique entier non nul tel que :

$$k^2 < 4n - 2 < 4n - 1 < 4n \leq (k + 1)^2.$$

Alors

$$k < \sqrt{4n-2} < \sqrt{4n-1} < \sqrt{4n} \leq k + 1,$$

et aussi

$$k < \sqrt{4n-2} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n} \leq k + 1.$$

$$\text{Finalement } k = \lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor.$$

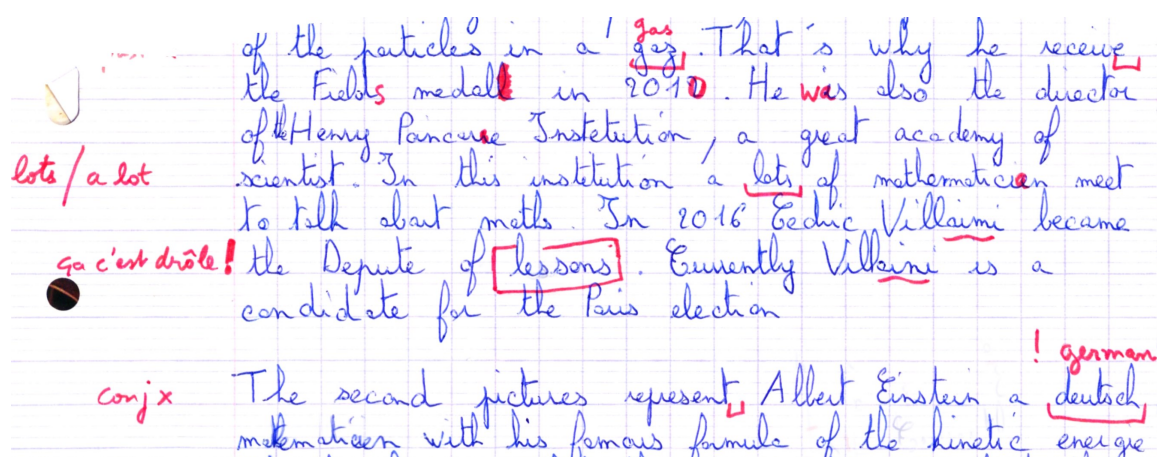
aide-t-elle à la formation et/ou à l'instruction des futurs citoyens, consommateurs, travailleurs. Je cherche encore la réponse.

C'est une réflexion très personnelle ; je sais que quantité de collègues sont fascinés par ces technologies et voudraient faire partager leur enthousiasme.

Un temps précieux cependant est consacré à ces apprentissages, dans des conditions pas toujours satisfaisantes (apprendre les rudiments de Python en classe entière, faute de doublement par exemple), temps qui selon moi, pourrait sans doute être mieux employé.

Pour rigoler

Quand le député de la V^e circonscription de l'Essonne est écorché et renvoyé à son rôle d'enseignant par un élève en DNL Maths-Anglais...



Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : <http://apmep.poitiers.free.fr/>

Mél. apmep.poitiers@free.fr

Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication

F. de Ligt

Éditeur

APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

Comité de rédaction

F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne,
J. Germain, J. Fromentin, P. Rugeon.

Siège Social

Voir adresse ci-dessus

Dépôt légal

Imprimerie

IREM de Poitiers. Adresse ci-dessus.

Mars 2020