Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

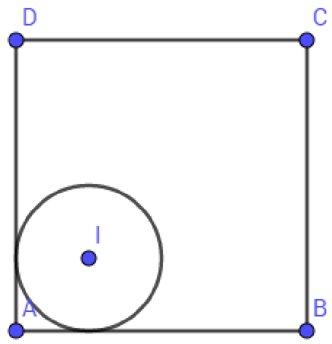
Des problèmes

119-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Comment coincer la bulle ?

Dans le carré ABCD, le cercle *C* de centre I et de rayon r ($0 < r < AB/2$) est tangent aux côtés [AB] et [AD] du carré.

Construire un cercle situé dans le carré et tangent à *C*, à [AB] et [BC].



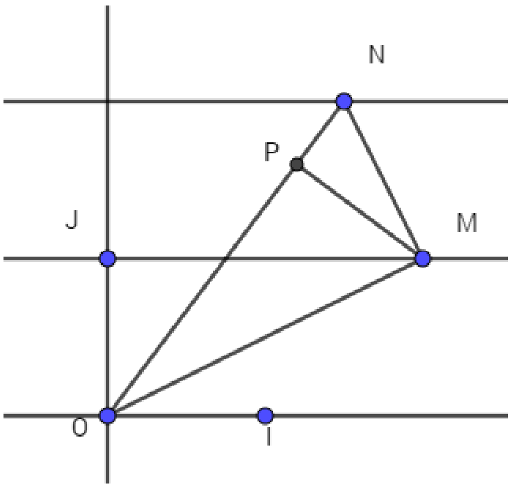
119-2 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Strophoïde droite

Soient D_1 la droite d'équation y = 1 et D_2 la droite d'équation y = 2 par rapport à un repère orthonormé (O, I, J). M est un point variable de D_1 et N un point variable de D_2. P est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OMN.

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MO})$ est l'angle droit direct.

Quel est l'ensemble décrit par P quand M décrit D_1 ?

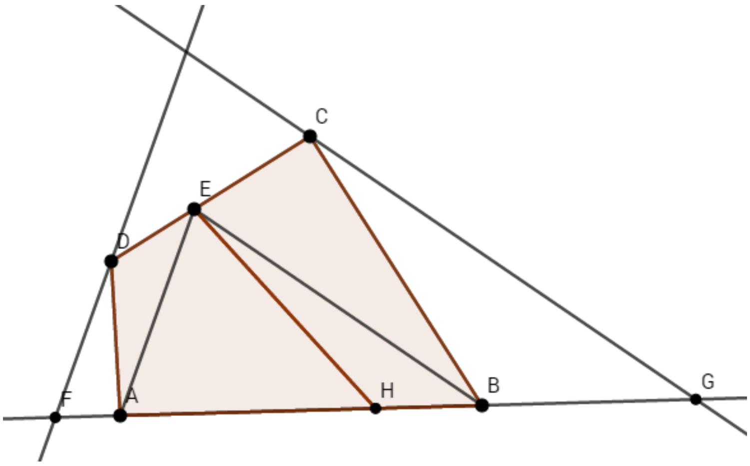


119-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $\left\lfloor \sqrt{n\text{-}1}+\sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n-1} \right\rfloor$ où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière du nombre.

115-4 *proposé par Dominique Gaud* :

Partage d'un quadrilatère convexe en deux parties de même aire
On prend E sur le côté [CD]. On mène la parallèle à (EA) passant par D qui coupe (AB) en F et la parallèle à (EB) passant par C qui coupe (AB) en G. H est alors le milieu de [FG]. Le segment [EH] partage le quadrilatère ABCD en deux parties de même aire.



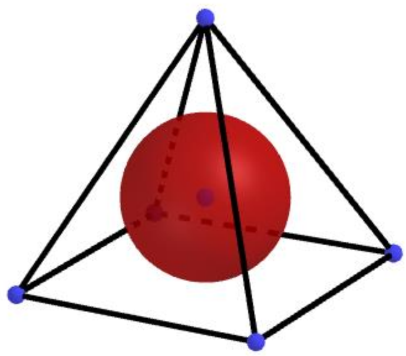
Y a-t-il des restrictions sur la position du point E sur [CD] et/ou sur les angles du quadrilatère convexe ?
Justifier alors l'exactitude de cette construction

Solution de Frédéric de Ligt

Avec Geogebra on constate que la construction partage le quadrilatère en deux parties de même aire seulement si le point H tombe entre A et B.
On se place désormais dans ce cas favorable.
La construction est alors valide y compris quand le point E est confondu avec les sommets C ou D. Les triangles EBC et EBG ont la même base [EB] et même hauteur puisque leur troisième sommet est situé sur une droite parallèle à la base. Aire(EBC) = Aire(EBG). De même Aire(EDA) = Aire(EAF).
Aire(ABCD) = Aire(EDA) + Aire(EAH) + Aire(EHB) + Aire(EBC) = Aire(EAF) + Aire(EAH) + Aire(EHB) + Aire(EBG) = Aire(EFG).
On sait qu'un triangle est partagé en deux triangles d'aires égales par n'importe laquelle de ses médianes. Comme H est le milieu du côté [FG], le triangle EFG est partagé en 2 triangles de même aire par le segment [EH]. Par conséquent le segment [EH] partage aussi le quadrilatère ABCD en deux quadrilatères de même aire.

117-1 *proposé par Jean-Christophe Berthonnaud* :

Dans une pyramide régulière à base carrée, dont le côté vaut la hauteur, on inscrit une sphère. Quelle relation entre le côté de la base et le rayon de la sphère ?



Solution de Frédéric de Ligt

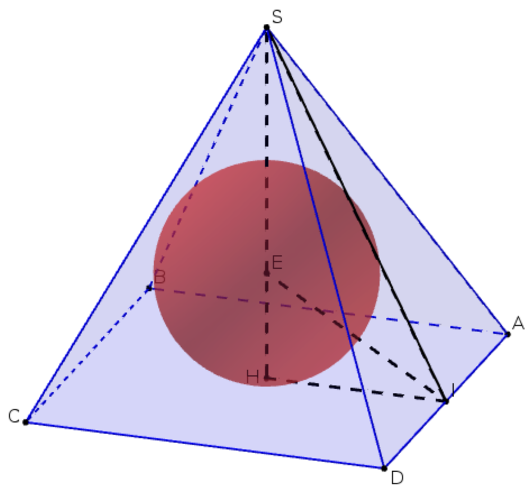
On a : SH = 2IH = a, donc $\tan\hat{I} = \frac{a}{a/2} = 2 = \frac{2\tan\hat{I}/2}{1\text{-}\tan^2\hat{I}/2}$.

D'où l'équation vérifiée par $\tan\hat{I}/2$:

$\tan^2\hat{I}/2+\tan\hat{I}/2-1=0$ dont la solution positive, la seule correspondant au problème posé, vaut $\tan\hat{I}/2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Par ailleurs $\tan\hat{I}/2=\frac{r}{a/2}$ où r désigne le rayon de la sphère inscrite dans la pyramide.

En rapprochant ces deux expressions de $\tan\hat{I}/2$ on obtient finalement $r=\frac{a}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{a}{2\varphi}$ où φ désigne le nombre d'or.



117-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :

Résoudre l'équation $(a - b)^2 = a + b$ avec a et b entiers, a > b > 0.

Solution de Hugues Biratelle

Une solution de l'équation est un couple (a, b) de deux nombres entiers naturels non nuls tels que $a > b$.

Puisque $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$, on a que $(a - b)^2 = a + b$ équivaut à $(a + b)^2 - 4ab = a + b$ ou encore à $(a + b)(a + b - 1) = 4ab$.

Posant $n = a + b$, on cherche a et b de somme $a + b = n$ et de produit $ab = n(n - 1)/4$. On se place dans **R**.

Si a et b existent, alors les solutions de l'équation du second degré en x : $x^2 - nx + n(n - 1)/4 = 0$.

Or le discriminant qui vaut $n^2 - n(n - 1) = n$ est supérieur ou égal à 3 car $a > b > 0$ et donc b vaut au moins 1 et a au moins 2. On en déduit que l'équation admet des solutions dans **R**.

Celles-ci sont :

$a = \frac{n+\sqrt{n}}{2}$ et $b = \frac{n-\sqrt{n}}{2}$ avec $n \geq 3$.

Recherche des solutions entières

S'il en existe alors $\sqrt{n}$ est un entier et donc n est un carré parfait :

$n = N^2$ avec $n \geq 4$ et donc $N \geq 2$.

Cela donne $a = \frac{N^2+N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$ et $b = \frac{N^2-N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$.

Réciproquement ces réels conviennent. En effet a est un entier car N ou $N + 1$ est pair, de même N ou $N - 1$ est pair ; $a - b = N \geq 2$ entraine $a > b$; $(a - b)^2 = N^2$ et $a + b = N^2$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des couples (a, b) = $\left(\frac{N(N+1)}{2}, \frac{N(N-1)}{2}\right)$ où N est un entier supérieur ou égal à 2.

Il y a une infinité de tels couples. Voici ceux que l'on obtient pour N = 2, 3, 4 et 5 respectivement : (3, 1), (6, 3), (10, 6) et (15, 10).

Autre méthode
On pose $N = a - b$.
Alors $N^2 = a + b$. Comme $a > b > 0$, on a $a > b \geq 1$ puis $N^2 = a + b > 2b \geq 2$.
Si (a, b) est solution de l'équation alors il est solution du système :

$$\begin{cases} a+b=N^2 \\ a-b=N \end{cases}$$

Puisque 1 × (-1) − 1 × 1 = -2 est non nul, ce système admet une seule solution et c'est le couple (a, b) tel que $a = \dfrac{\begin{vmatrix} N^2 & 1 \\ N & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-N^2-N}{-2} = \dfrac{N(N+1)}{2}$ et $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & N^2 \\ 1 & N \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{N-N^2}{-2} = \dfrac{N(N-1)}{2}$.
La partie réciproque et la conclusion sont ensuite identiques à la méthode précédente.

118-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Exprimer en fonction de n la somme des chiffres de l'entier n.

Solution de l'auteur

De façon un peu abrupte cela donne $n-9\displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor}\left\lfloor \frac{n}{10^i} \right\rfloor$ où $\lfloor \ \rfloor$ désigne la partie entière du nombre et log le logarithme décimal.
Pour mieux comprendre l'origine de cette formule on va montrer comment est ainsi obtenue la somme des chiffres de 2019.
2019 = 9 + 2010= 9 + 9 × 201 + 201
= 9 + 9 × 201 + 1 + 200 = 9 + 9 × 201 + 1 + 9 × 20 + 20
= 9 + 9 × 201 + 1 + 9 × 20 + 9 × 2 + 2.
Et donc 2019 − (9 × 201 + 9 × 20 + 9 × 2) = 9 + 1 + 2 = 12.
Enfin si $10^\alpha \leq n < 10^{\alpha+1}$ alors $\alpha \leq \log n < \alpha + 1$ et donc $\lfloor \log n \rfloor = \alpha$. On a en particulier que $\left\lfloor \dfrac{n}{10^\alpha} \right\rfloor$ donne le chiffre situé à gauche dans l'écriture décimale de n.