Les gammes musicales

Nicolas Minet , IREM&S de Poitiers, professeur au Lycée du Bois d'Amour (Poitiers)

Épisode 2 : La construction des notes

Résumé de l'épisode précédent (Corol'aire n°117)

Sur cette cithare (en photo), les cordes sont rigoureusement identiques à part leur longueur ; on peut donc se limiter à ce seul paramètre pour décider du nombre de notes de l'instrument (= combien de cordes ?) et de leur distinction (= quelle note = quelle longueur pour chaque corde ?)

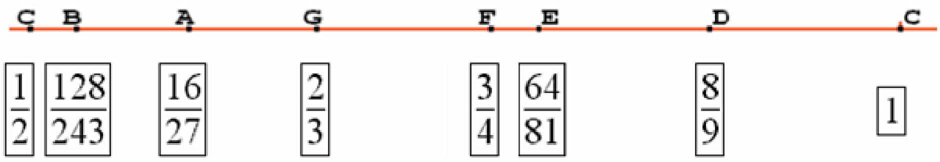
La tradition fait remonter à l'École Pythagoricienne l'étude arithmétique des intervalles musicaux ; l'objet est de déterminer des sons consonants rien qu'avec une échelle de nombres calculée à partir de quelques principes posés *a priori*.

Voici les premiers termes de la suite qui définit les longueurs de cordes d'une gamme nommée "gamme de Pythagore" :

$$1 \longrightarrow \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{8}{9} \longrightarrow \frac{16}{27} \longrightarrow \frac{64}{81} \longrightarrow \frac{128}{243} \longrightarrow \frac{512}{729} \longrightarrow \frac{2048}{2187} \longrightarrow \frac{4096}{6561} \longrightarrow \frac{16384}{19683} \longrightarrow \frac{32768}{59049} \longrightarrow \frac{131072}{177147} \longrightarrow \frac{524288}{531441}$$

Rappelons que selon l'un des principes (Corol'aire n°117) chaque terme vaut soit les 2/3 soit les 4/3 du précédent, afin que tous soient compris entre 1 et 1/2 qui correspondent aux notes extrêmes de la gamme.

Calculées en multipliant par 2 les numérateurs et par 3 les dénominateurs, ces fractions sont donc distinctes deux à deux ; or, un nombre infini de notes ne serait pas raisonnable, et il faut choisir un test d'arrêt de la suite. Ecoutons Hippolyte, biographe de Pythagore (– 440 ?) : « Pythagore affirmait que l'Univers chante et qu'il est construit selon les lois de l'Harmonie. Il fut le premier à ramener les mouvements des sept corps célestes au rythme et à l'harmonie musicale. » . Connaissant à l'époque Soleil, Lune et les 5 planètes les plus proches du Soleil, la conclusion est donc guidée pour Pythagore par une recherche d'harmonie universelle : **il y aura 7 notes distinctes dans la gamme puisqu'il y a 7 astres…** Réordonnant les nombres dans l'ordre croissant, voici donc les fractions de la gamme de Pythagore :



Objection, votre honneur

Deux points vous heurtent, je l'entends d'ici : d'une part, on voit 8 nombres donc 8 notes, et non 7.. En fait, les deux notes extrêmes ont le même nom (voir [2]) , disons C ou "Do" car elles donnent l'impression sonore d'être identiques quoique l'une est plus aigüe que l'autre (voir [1] ou, mieux, pincez une simple corde, puis pincez-la en plaçant votre doigt au milieu de la corde). Cela explique que les notes extrêmes ont le même nom, et il n'y a donc que 7 notes distinctes. Ensuite, l'une des fractions 512/729 a été modifiée… Pourquoi ? Je ne peux que faire des suppositions : primo, cette fraction 512/729 est la plus complexe de toutes ; deuzio, les fractions 512/729 et 3/4 ont un rôle symétrique : 512/729 vient de se déduire de 128/243 mais elle ne permet pas de déduire 1/2 alors que, *a contrario*, 1/2 vaut les 2/3 de 3/4, et donc 3/4 permet de "retomber" sur 1/2. Donc les deux fractions seraient admissibles, finalement. Tertio, une écoute peut convaincre que 3/4 est plus juste à l'oreille (voir [1]) mais n'est-ce pas une conséquence de notre éducation auditive ?... Et l'une des questions les plus importantes : à quel point la justesse qu'on perçoit d'une note n'est-elle que le fruit de nos habitudes auditives ?

Octave, quinte, quarte, késaco ?

Ces termes très courants en musique peuvent désormais s'expliquer.

- Puisque la 8^{e} note (en partant de la plus grave) correspond à la **moitié** de longueur de la note initiale, on dira que cette 8^{e} note est **l'octave** (supérieure) de la note initiale. Ainsi, le second Do est à l'octave du premier ; précisons que ce terme "octave" sera **toujours** conservé pour désigner deux notes qui sont dans le rapport de longueur double (ou moitié), indépendamment du nombre de notes intermédiaires ;

- Puisque la 5^{e} note (en partant de la plus grave) correspond aux **2/3** de longueur de la note initiale, on dira que cette 5^{e} note est la **quinte** (supérieure) de la note initiale. Ainsi, Sol (G) est la quinte de Do (C) ;

- Puisque la 4^{e} note (en partant de la plus grave) correspond aux **3/4** de longueur de la note initiale, on dira que cette 4^{e} note est la **quarte** (supérieure) de la note initiale. Ainsi, Fa (F) est la quarte de Do (C) ;

Les plus arithméticiens d'entre vous auront deviné qu'on peut qualifier le Do de *quinte inférieure* (ou descendante) de Fa ou de *quarte inférieure* de Sol.

Ces principes théoriques aident dans la pratique à accorder les instruments, telle une cithare (voir [3]).
En effet, la 5^{e} corde, disons donc "Sol", qui mesure les 2/3 de la corde initiale du "Do" , doit produire toute seule le même son que lorsqu'on pince les 2/3 de la corde "Do". On peut ainsi accorder sa corde de "Sol".

Objection, votre honneur (bis)

7 notes dans la gamme, soit... Mais la raison astronomico-philosophique invoquée par Hippolyte ne peut suffire à l'expliquer, tout de même. En effet, elle ne suffit pas, elle coïncide... Observons quelles fractions de la gamme de Pythagore sont, dans leur ordre d'apparition lors de l'algorithme de calcul, les plus proches des notes extrêmes 1/2 et 1 : nous trouvons 128/243 (à 2 centièmes près) puis 2048/2187 (à 6 centièmes près) et enfin 524288/531441 (à 2 centièmes près). Ainsi, **on peut choisir de "boucler la boucle" au bout de 5, 7 et 12 itérations pour des raisons de meilleure approximation de nombre.**

Voila pourquoi on rencontre souvent des gammes à 5 notes (dites *pentatoniques*), 7 notes (*dites diatoniques*) ou 12 notes (dites *chromatiques*) que ce soit dans notre musique occidentale ou plus loin dans le monde. On pourrait associer ces nombres aux 5 touches noires, 7 blanches et donc 12 bicolores qu'on trouve sur un piano entre deux "Do" à l'octave l'une de l'autre ; on confondrait ainsi les notes d'un piano avec les notes de la gamme de Pythagore. Nous verrons à l'épisode suivant pourquoi ce n'est pas juste, mais l'image visuelle est bonne cependant.

Cycle, spirale, comma et loup

On l'a dit, la suite des fractions évoquée en début d'épisode est faite de nombres deux à deux distincts, d'où l'image de spirale pour illustrer la progression sans fin de cette suite ; or, le choix de s'arrêter pour des raisons de bonne approximation au bout de 5, 7 ou 12 itérations conduit à boucler la boucle, d'où l'image de *cycle*. On parle donc soit de **cycle** soit de **spirale des quintes** dans le sens où on a déjà défini ce terme : chaque fraction est la quinte de la précédente car elle en vaut les 2/3, à une octave près.

La *quinte du loup* est une expression employée pour désigner un intervalle particulièrement "faux" : la dernière fraction 524288/531441 de la gamme de Pythagore n'est pas exactement 1, donc sa quinte (qui correspond à ses 2/3) n'est pas exactement 2/3. La différence à l'oreille entre les notes correspondant à ces deux quintes est audible : un phénomène physique particulier se produit lorsque deux sons très proches sont émis simultanément : c'est une vibration particulière appelée *battement*. Sans en donner d'explication physique, on associait à la Renaissance cette sensation, provoquée par l'écoute de cette quinte particulière, au hurlement d'un *loup*. (n'exagérons rien...)

Teaser pour la suite

Ne confondons d'ailleurs pas Saint Thomas de Conac, en Charente Maritime, où le loup gris a été vu mi novembre 2019, avec Saint Thomas d'Aquin, pour qui au XII^{e} la musique servait essentiellement à chanter les louanges du Créateur.

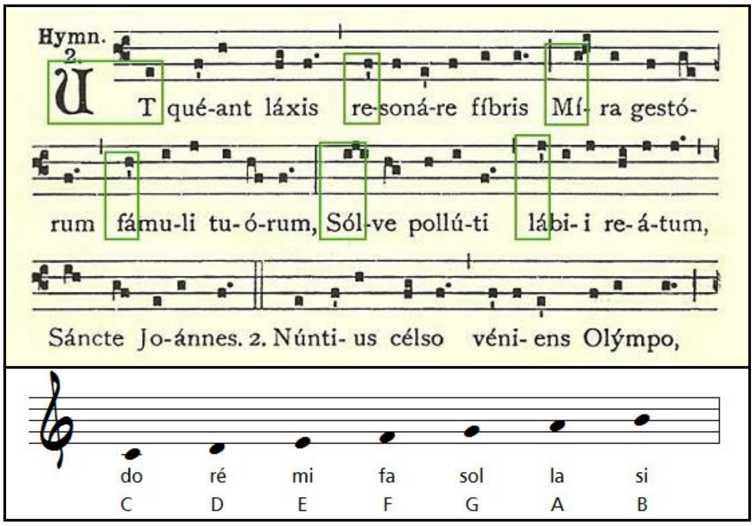
Nous évoquerons dans l'épisode 4 de notre série les divers usages de la musique, art et science, la musique ayant eu un grand statut philosophique et théologique jusqu'à la Renaissance. La gamme de Pythagore n'a pas été remise en question avant cette époque. (voir [5] si vous voulez rire) Nous verrons auparavant dans l'épisode 3 à venir que ce sont des raisons musicales qui ont conduit à l'abandon de la gamme de Pythagore, et nous expliquerons en quoi elle diffère de la gamme également tempérée, actuellement utilisée dans nos instruments usuels : pianos, guitares et autres instruments à notes prédéterminées (clarinette, saxophone,...)

[1] Feuille à problème de l'IREM de Lyon, **7 notes dans la gamme, toujours ? Pourquoi ?**

https://urlz.fr/6tE5

[2] **Le nom des notes**

http://choeurslava.free.fr



On attribue à Guido d'Arezzo (vers 1030) l'idée de mettre en musique l'hymne à St Jean Baptiste en plaçant 6 notes (de la plus grave à la plus aigüe) sur les syllabes initiales de certains mots. La note "Si" viendra ultérieurement de la contraction de Sancte Ioannes, et ce n'est qu'au XVII^{e} s. que "Do" remplacera "Ut", un terme toujours usité.

La notation anglo-saxonne des notes : https://cnpmusic.com

[3] Vidéo You Tube "Comprendre les Diapasons : la gamme de Pythagore" **Comment accorder la cithare ?**

[4] Site web Faits divers "Gammes et Tempéraments" **Pour entendre un battement** https://www.physinfo.org/chroniques/arithmetique.html aller au paragraphe "Entre justesse et transposition"

[5] Vidéo YouTube de la série Kaamelott (Alexandre Astier) Voir l'extraordinaire épisode **La quinte juste**