Corol'aire

Décembre 2019 n°119

Qui veut devenir prof de maths ?

Frédéric de Ligt

Un petit point sur le recrutement en enseignants de mathématiques ces quatre dernières années par le biais du concours du CAPES externe :

Année	Postes	Admis	% de postes non pourvus
2016	1440	1134	21
2017	1440	1066	26
2018	1183	1068	9
2019	1200	972	19

Pour 2020 il y a 1185 postes à pourvoir. Pour l'agrégation externe, les pourcentages de pertes sont du même ordre. On ne peut pas dire que les étudiants se précipitent vers la profession. L'administration adapte d'ailleurs l'offre à la demande.

Quelles causes pour expliquer cela ? D'une façon générale l'enseignement n'attire plus, les médias répètent à l'envi, non sans raison, que les conditions de travail sont devenues plus difficiles, et que le niveau des salaires est de plus en plus faible (20^{e} rang des pays de l'OCDE, derrière la Slovénie, le Portugal et l'Espagne).

En 22 ans (de janvier 1994 à juillet 2016), le point d'indice a progressé de 19,4 % alors que l'inflation sur la même période progressait de 39,15 %, soit une différence de 20 points. Pour un débutant dans la fonction publique, à grille indiciaire identique, cela représente une perte de rémunération de 20 % sur la période... (Wikipedia)

Suite de l'édito page 18

Sommaire

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

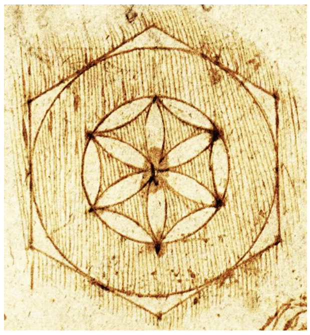
Groupe Rallye

Les membres retraités (mais actifs !) de l'équipe du Rallye se sont retrouvés le lundi 25 novembre pour mettre sous enveloppes le courrier relatif à l'édition 2020 du Rallye : lettres aux chefs d'établissements et aux collègues, modalités et inscriptions. Tous les collèges, LGT, LPO et LP ont reçu ce courrier et votre chef d'établissement a dû vous le transmettre. Si ce n'est pas le cas, vous pouvez le télécharger sur le site de la Régionale à l'adresse :

http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article319

Sur cette même page du site, la partie « Problèmes » de l'épreuve d'entraînement et la partie « Thème » de l'épreuve finale sont à votre disposition. Nouveauté de cette édition : un seul fichier pour chaque partie et pour tous les niveaux.

Pour la **partie « Problèmes »** de l'épreuve d'entraînement, l'épreuve finale de 2017 a été reprise (par erreur ! Nous aurions dû reprendre celle de 2018 !), mais mise dans la nouvelle forme prévue pour l'épreuve finale 2020, avec trois problèmes communs à deux niveaux consécutifs. Ainsi, les élèves habitués au Rallye ne seront pas désorientés. Cependant, il y a un bulletin réponse par niveau.



Pour la **partie « Thème »** sur « La géométrie de Léonard » de Vinci, c'est la même épreuve pour tous les niveaux. Bien sûr les capacités et qualités mises en œuvre seront appréciées en fonction des niveaux.

Il sera bientôt disponible sur le site un ensemble de ressources permettant d'aborder ou d'approfondir cette partie.

Les inscriptions sont ouvertes depuis début décembre. N'attendez pas la **date limite du 27 janvier** pour inscrire vos classes ; vous nous faciliterez le travail. Rappelons que les droits d'inscription sont de 6 € par classe, que les factures seront envoyées à partir du 6 janvier 2020 et que la date limite de paiement est fixée au 17 février 2020.

Nous vous espérons nombreux à partager avec nous cette fête des mathématiques.

Compte-rendu du comité du 6 novembre 2019

Nouveau bureau et nouveau comité
Audrey HUGONNAUD-FAYOLLAT, pour le premier degré, rejoint le comité; Le bureau est reconduit.

Bilan et perspective de la Journée Régionale
Une belle réussite cette année. Nous sommes heureux des félicitations de Mme la DASEN du département de La Charente.
Deux nouvelles collègues proposent leur participation à la mise en place des Journées Nationales à Jonzac en 2021.
Une rencontre est programmée le 4 décembre 2019 avec l'IEN Charente, en charge des maths, pour pérenniser la participation des PE (voir le compte rendu p.4).
À propos du lycée, Frédéric de Ligt transmet à Jacques Germain un questionnaire de l'APMEP National. Il sera diffusé auprès de tous les adhérents.
La future Journée 2020 est pressentie à IHEEF (Institut des Hautes Études de l'Éducation et de la Formation), anciennement ESEN, au Futuroscope le 7 ou 14 octobre 2020. Nous proposerons aux IEN de programmer cette journée dans le temps de formation des PE.

Rallye
Thème : La géométrie de Léonard de Vinci. C'est un thème allégé cette année (JN 2021 obligent), à réaliser avant l'épreuve. Lors de l'épreuve, il n'y aura que les problèmes.
Dix-huit problèmes pour couvrir l'ensemble des cinq niveaux (donc chevauchement d'exercices proposés entre les niveaux, à hauteur de trois).
Les CM du primaire sont invités à participer, mais avec le pilotage d'un professeur de collège, dans le cadre d'une relation écoles-collège.
Il est acté que chaque classe lauréate recevra 30 rapporteurs vierges (bel outil pour permettre aux élèves de s'approprier la notion de mesure en degré). Il s'agit d'un équipement pédagogique pour la classe. Une modique somme d'environ 300 € est engagée. Reste à trouver une idée de cadeau individuel plus ludique !
Marc Moyon, qui a travaillé sur les dessins géométriques de Léonard de Vinci, pourrait présenter la conférence lors de la remise des prix au Pôle Sciences de La Rochelle le 3 juin 2020.

Site de la Régionale
Jacques Germain pose la question du transfert d'hébergement de notre site vers celui proposé par le National. Ceci pourrait être une bonne chose, le cahier des charges ayant nettement diminué depuis les anciennes propositions du National.
Deux problèmes subsistent cependant :

- le nom du domaine pour avoir notre propre lisibilité,
- le changement de version de « spip ».

L'étude se poursuit sous la direction de Jacques. Il nous faudrait trouver quelqu'un capable d'effectuer les changements nécessaires.

Journées Nationales 2021
Communication
La réalisation de l'affiche est assurée. Nous aurons des propositions pour mars et la première esquisse est encourageante.
Pour le film, Philippe Rogeon a trouvé trois étudiants de l'IUT d'Angoulême. Le projet tutoré est acté ; ces trois étudiants, accompagnés par un professeur référent qui est également ingénieur du son dans le privé, vont développer le produit sur leur année scolaire.
En vue de « l'apéro » aux JN de Bourges, Philippe Rogeon nous fait goûter des toasts à la fleur d'ail (fabriquée à Niort). Une très bonne note attribuée par les amateurs d'ail. Mais

il reste à penser aux autres.
Jean-Marie Parnaudeau soulève le besoin, pour aller à la pêche à la subvention, d'un petit dépliant résumant nos futures journées à Jonzac. Il pourrait être également réalisé un document plus dense à diffusion interne, pour nous donner les bons arguments lors de discussions. L'idée étant approuvée, le groupe communication doit se charger de cette réalisation.

Comité scientifique
Julien Michel accepte d'en prendre la responsabilité, bien sûr accompagné de plusieurs membres. Corinne Parcelier propose de communiquer à l'aide de « framapad ». D'ailleurs un débat s'installe en prenant comme support ses recherches, consignées et discutées sur ce support.
Julien Michel souhaite que l'on privilégie les ressources locales lorsqu'on le peut.
Un gros travail reste à faire, car les avis divergent selon les conférenciers proposés.

Hébergement
Le palais des congrès de Jonzac va prochainement accueillir un énorme congrès autour des cures thermales. La ville travaille donc à un recensement des possibilités d'hébergement dans la ville et ses alentours. Nous pourrons profiter de ce travail.

Prochaine réunion spéciale JN Jonzac
Dans les locaux de l'IREM&S, sur le site du futuroscope, le 19 février 2020.

Prochaine réunion du comité
D ans les locaux de l'IREM&S, sur le site du futuroscope, le 8 janvier 2020.

Une rencontre fructueuse et prometteuse avec l'IEN de Charente

Le mercredi 4 décembre 2019, une délégation du Comité (Frédéric de Ligt, Corinne Parcelier, Jean-Paul Guichard, Jacqueline Guichard et Pierre-Jean Robin) ont rencontré l'IEN en charge des mathématiques, Mme Anne Philipson, et la PE responsable des référents mathématiques au niveau départemental, Laure Cousin, à Angoulême, suite à la journée de la Régionale, pour pérenniser notre nouvelle relation.

Les échanges ont été riches et les projets envisagés réalistes et intéressants (extension du Rallye, labo de maths associant le premier degré, Journée de la Régionale proposée aux PE par l'intermédiaire du PAF, etc).

Bien évidemment les futurs principaux constructeurs de cette collaboration sont Corinne Parcelier (Cognac) et Frédéric de Ligt (Barbezieux).

Les retours de Madame Philipson sont très encourageants ; de plus elle nous a communiqué, avec leur accord et intérêt, les adresses électroniques de ses pairs dans les trois autres départements.

Il nous faut maintenant définir notre mode d'action en Deux-Sèvres et Charente-Maritime, sachant qu'en Vienne il existe déjà un lien avec le premier degré.

Les gammes musicales

Nicolas Minet , IREM&S de Poitiers, professeur au Lycée du Bois d'Amour (Poitiers)

Épisode 2 : La construction des notes

Résumé de l'épisode précédent (Corol'aire n°117)

Sur cette cithare (en photo), les cordes sont rigoureusement identiques à part leur longueur ; on peut donc se limiter à ce seul paramètre pour décider du nombre de notes de l'instrument (= combien de cordes ?) et de leur distinction (= quelle note = quelle longueur pour chaque corde ?)

La tradition fait remonter à l'École Pythagoricienne l'étude arithmétique des intervalles musicaux ; l'objet est de déterminer des sons consonants rien qu'avec une échelle de nombres calculée à partir de quelques principes posés *a priori*.

Voici les premiers termes de la suite qui définit les longueurs de cordes d'une gamme nommée "gamme de Pythagore" :

$$1 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{8}{9} \rightarrow \frac{16}{27} \rightarrow \frac{64}{81} \rightarrow \frac{128}{243} \rightarrow \frac{512}{729} \rightarrow \frac{2048}{2187} \rightarrow \frac{4096}{6561} \rightarrow \frac{16384}{19683} \rightarrow \frac{32768}{59049} \rightarrow \frac{131072}{177147} \rightarrow \frac{524288}{531441}$$

Rappelons que selon l'un des principes (Corol'aire n°117) chaque terme vaut soit les 2/3 soit les 4/3 du précédent, afin que tous soient compris entre 1 et 1/2 qui correspondent aux notes extrêmes de la gamme.

Calculées en multipliant par 2 les numérateurs et par 3 les dénominateurs, ces fractions sont donc distinctes deux à deux ; or, un nombre infini de notes ne serait pas raisonnable, et il faut choisir un test d'arrêt de la suite. Ecoutons Hippolyte, biographe de Pythagore (– 440 ?) : « Pythagore affirmait que l'Univers chante et qu'il est construit selon les lois de l'Harmonie. Il fut le premier à ramener les mouvements des sept corps célestes au rythme et à l'harmonie musicale. » . Connaissant à l'époque Soleil, Lune et les 5 planètes les plus proches du Soleil, la conclusion est donc guidée pour Pythagore par une recherche d'harmonie universelle : **il y aura 7 notes distinctes dans la gamme puisqu'il y a 7 astres…** Réordonnant les nombres dans l'ordre croissant, voici donc les fractions de la gamme de Pythagore :

C	B	A	G	F	E	D	C
$\frac{1}{2}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{8}{9}$	1

Objection, votre honneur

Deux points vous heurtent, je l'entends d'ici : d'une part, on voit 8 nombres donc 8 notes, et non 7.. En fait, les deux notes extrêmes ont le même nom (voir [2]) , disons C ou "Do" car elles donnent l'impression sonore d'être identiques quoique l'une est plus aigüe que l'autre (voir [1] ou, mieux, pincez une simple corde, puis pincez-la en plaçant votre doigt au milieu de la corde). Cela explique que les notes extrêmes ont le même nom, et il n'y a donc que 7 notes distinctes. Ensuite, l'une des fractions 512/729 a été modifiée… Pourquoi ? Je ne peux que faire des suppositions : primo, cette fraction 512/729 est la plus complexe de toutes ; deuzio, les fractions 512/729 et 3/4 ont un rôle symétrique : 512/729 vient de se déduire de 128/243 mais elle ne permet pas de déduire 1/2 alors que, *a contrario*, 1/2 vaut les 2/3 de 3/4, et donc 3/4 permet de "retomber" sur 1/2. Donc les deux fractions seraient admissibles, finalement. Tertio, une écoute peut convaincre que 3/4 est plus juste à l'oreille (voir [1]) mais n'est-ce pas une conséquence de notre éducation auditive ?... Et l'une des questions les plus importantes : à quel point la justesse qu'on perçoit d'une note n'est-elle que le fruit de nos habitudes auditives ?

Octave, quinte, quarte, késaco ?

Ces termes très courants en musique peuvent désormais s'expliquer.

- Puisque la 8^e note (en partant de la plus grave) correspond à la **moitié** de longueur de la note initiale, on dira que cette 8^e note est **l'octave** (supérieure) de la note initiale. Ainsi, le second Do est à l'octave du premier ; précisons que ce terme "octave" sera **toujours** conservé pour désigner deux notes qui sont dans le rapport de longueur double (ou moitié), indépendamment du nombre de notes intermédiaires ;

- Puisque la 5^e note (en partant de la plus grave) correspond aux **2/3** de longueur de la note initiale, on dira que cette 5^e note est la **quinte** (supérieure) de la note initiale. Ainsi, Sol (G) est la quinte de Do (C) ;

- Puisque la 4^e note (en partant de la plus grave) correspond aux **3/4** de longueur de la note initiale, on dira que cette 4^e note est la **quarte** (supérieure) de la note initiale. Ainsi, Fa (F) est la quarte de Do (C) ;

Les plus arithméticiens d'entre vous auront deviné qu'on peut qualifier le Do de *quinte inférieure* (ou descendante) de Fa ou de *quarte inférieure* de Sol.

Ces principes théoriques aident dans la pratique à accorder les instruments, telle une cithare (voir [3]).
En effet, la 5^e corde, disons donc "Sol", qui mesure les 2/3 de la corde initiale du "Do" , doit produire toute seule le même son que lorsqu'on pince les 2/3 de la corde "Do". On peut ainsi accorder sa corde de "Sol".

Objection, votre honneur (bis)

7 notes dans la gamme, soit... Mais la raison astronomico-philosophique invoquée par Hippolyte ne peut suffire à l'expliquer, tout de même. En effet, elle ne suffit pas, elle coïncide... Observons quelles fractions de la gamme de Pythagore sont, dans leur ordre d'apparition lors de l'algorithme de calcul, les plus proches des notes extrêmes 1/2 et 1 : nous trouvons 128/243 (à 2 centièmes près) puis 2048/2187 (à 6 centièmes près) et enfin 524288/531441 (à 2 centièmes près). Ainsi, **on peut choisir de "boucler la boucle" au bout de 5, 7 et 12 itérations pour des raisons de meilleure approximation de nombre.**

Voila pourquoi on rencontre souvent des gammes à 5 notes (dites *pentatoniques*), 7 notes (*dites diatoniques*) ou 12 notes (dites *chromatiques*) que ce soit dans notre musique occidentale ou plus loin dans le monde. On pourrait associer ces nombres aux 5 touches noires, 7 blanches et donc 12 bicolores qu'on trouve sur un piano entre deux "Do" à l'octave l'une de l'autre ; on confondrait ainsi les notes d'un piano avec les notes de la gamme de Pythagore. Nous verrons à l'épisode suivant pourquoi ce n'est pas juste, mais l'image visuelle est bonne cependant.

Cycle, spirale, comma et loup

On l'a dit, la suite des fractions évoquée en début d'épisode est faite de nombres deux à deux distincts, d'où l'image de spirale pour illustrer la progression sans fin de cette suite ; or, le choix de s'arrêter pour des raisons de bonne approximation au bout de 5, 7 ou 12 itérations conduit à boucler la boucle, d'où l'image de *cycle*. On parle donc soit de **cycle** soit de **spirale des quintes** dans le sens où on a déjà défini ce terme : chaque fraction est la quinte de la précédente car elle en vaut les 2/3, à une octave près.

La *quinte du loup* est une expression employée pour désigner un intervalle particulièrement "faux" : la dernière fraction 524288/531441 de la gamme de Pythagore n'est pas exactement 1, donc sa quinte (qui correspond à ses 2/3) n'est pas exactement 2/3. La différence à l'oreille entre les notes correspondant à ces deux quintes est audible : un phénomène physique particulier se produit lorsque deux sons très proches sont émis simultanément : c'est une vibration particulière appelée *battement*. Sans en donner d'explication physique, on associait à la Renaissance cette sensation, provoquée par l'écoute de cette quinte particulière, au hurlement d'un *loup*. (n'exagérons rien…)

Teaser pour la suite

Ne confondons d'ailleurs pas Saint Thomas de Conac, en Charente Maritime, où le loup gris a été vu mi novembre 2019, avec Saint Thomas d'Aquin, pour qui au XII^{e} la musique servait essentiellement à chanter les louanges du Créateur.

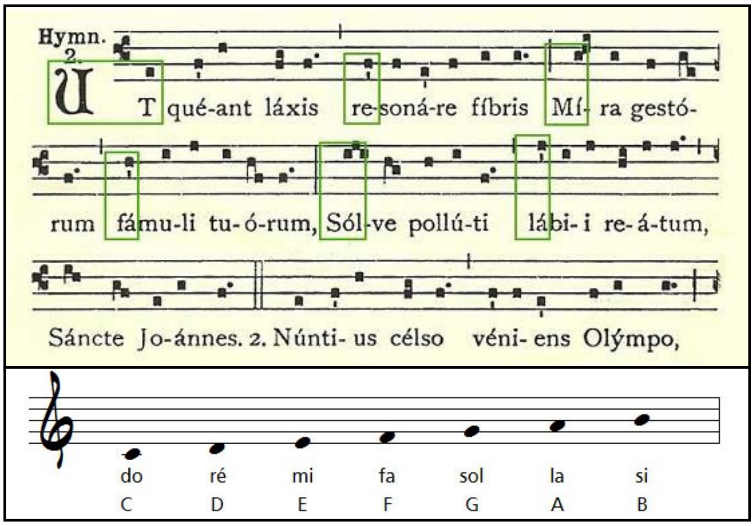
Nous évoquerons dans l'épisode 4 de notre série les divers usages de la musique, art et science, la musique ayant eu un grand statut philosophique et théologique jusqu'à la Renaissance. La gamme de Pythagore n'a pas été remise en question avant cette époque. (voir [5] si vous voulez rire) Nous verrons auparavant dans l'épisode 3 à venir que ce sont des raisons musicales qui ont conduit à l'abandon de la gamme de Pythagore, et nous expliquerons en quoi elle diffère de la gamme également tempérée, actuellement utilisée dans nos instruments usuels : pianos, guitares et autres instruments à notes prédéterminées (clarinette, saxophone,…)

[1] Feuille à problème de l'IREM de Lyon, **7 notes dans la gamme, toujours ? Pourquoi ?**

https://urlz.fr/6tE5

[2] **Le nom des notes**

http://choeurslava.free.fr



On attribue à Guido d'Arezzo (vers 1030) l'idée de mettre en musique l'hymne à St Jean Baptiste en plaçant 6 notes (de la plus grave à la plus aigüe) sur les syllabes initiales de certains mots. La note "Si" viendra ultérieurement de la contraction de Sancte Ioannes, et ce n'est qu'au XVII^{e} s. que "Do" remplacera "Ut", un terme toujours usité.

La notation anglo-saxonne des notes : https://cnpmusic.com

[3] Vidéo You Tube "Comprendre les Diapasons : la gamme de Pythagore" **Comment accorder la cithare ?**

[4] Site web Faits divers "Gammes et Tempéraments" **Pour entendre un battement** https://www.physinfo.org/chroniques/arithmetique.html aller au paragraphe "Entre justesse et transposition"

[5] Vidéo YouTube de la série Kaamelott (Alexandre Astier) Voir l'extraordinaire épisode **La quinte juste**

Une nouvelle expo : *Maths et mesure*

Après *Comment tu comptes*, *Maths et Courbes*, *Maths & Puzzles* voici ***Maths et Mesure*** la nouvelle exposition conçue par notre Régionale et l'IREM&S de Poitiers avec la collaboration de l'AGEEM et du groupe Maths 86 de l'École élémentaire, et réalisée par l'Espace Mendès France.

Que trouvera-t-on dans cette exposition ?

On ne voit bien souvent dans les mathématiques que leur aspect formel, et l'on oublie qu'elles ont été et sont un fabuleux outil pour l'exploration et la maîtrise du monde dans lequel nous vivons. Pour sensibiliser les différents publics auxquels s'adresse l'exposition, **des enfants de maternelle aux lycéens**, des étudiants au grand public, nous avons choisi un thème accessible à tous et très présent dans notre vie : celui de la mesure, décliné en six pôles. Et nous avons conçu, pour chaque pôle, de **nombreuses expériences et manipulations** : des mathématiques à voir et à toucher.

Notre monde, c'est d'abord la **planète Terre**. Comment les hommes ont-ils pu connaître sa **forme** et mesurer ses dimensions ? Comment **se repérer** sur la Terre ? Comment dresser des **cartes** de notre planète ? Telles sont les questions abordées par le premier pôle.

La maîtrise de notre monde commence par celle de la notion de **longueur** qui est abordée dans le pôle 2. On pourra expérimenter avec **son corps** ou avec un robot pour comprendre comment les hommes ont élaboré leurs mesures et leurs **unités**, et pourquoi, en France, à la Révolution, ils ont voulu doter le Monde d'une mesure universelle : **le mètre**. Mesurer des distances inaccessibles, des lignes courbes ou brisées autant de problèmes qui irriguent toutes les mathématiques.

La mesure des surfaces, qui est à l'origine de la géométrie, est le thème du pôle suivant : **surfaces planes** des terrains, objet de l'arpentage, mais aussi **surfaces courbes** des divers objets qui nous entourent, avec une insistance particulière sur **la sphère**, la forme de notre planète. On y découvrira des méthodes variées, **des découpages** au calcul infinitésimal, et divers moyens d'établir des formules.

Ensuite, le pôle 4 nous éclaire sur la façon dont on peut mesurer **les volumes**, du transvasement, avec de **nombreuses expériences** à faire, au calcul intégral. Comprendre les liens entre les différentes unités, et comment peuvent s'élaborer les formules de calcul est un des enjeux du pôle. Les **objets du quotidien** y sont très présents. On y découvrira aussi l'exploitation forestière et le fret maritime.

Avec le pôle 5, nous partons à la découverte **du ciel et des étoiles**. Tout d'abord ce sont la Lune et le Soleil qui ont permis aux hommes de mesurer **le temps** : années, mois, semaines… Mais l'homme a voulu aussi mesurer **distances lointaines** et dimensions inaccessibles : distances Terre-Lune, Terre Soleil, distances entre les étoiles, dimensions du système solaire autant de sujets rendus accessibles à partir **de défis et expériences**.

La propension des hommes à vouloir tout mesurer, de **ses chances** à gagner au jeu, jusqu'à la pauvreté ou au **bonheur** des états, permettrait d'explorer encore de nombreux sujets sur le thème de la mesure, impliquant d'autres domaines des mathématiques. Nous avons voulu nous limiter à des sujets de base qui peuvent fournir aux enseignants de la matière pour **donner du sens** et de l'intérêt aux mathématiques, et montrer au public comment les mathématiques ont façonné leur environnement quotidien. Mais pour ouvrir la réflexion sur ce vaste champ de la mesure, et sur la part qu'y prennent les mathématiques, nous terminons l'exposition par un sixième pôle consacré à la mesure du **climat**.

Cette exposition insiste sur le rôle des grandeurs géométriques vues en maternelle et enseignées à l'école primaire, et montre l'importance de leur mesure dans la construction des nombres fractionnaires et décimaux. Des professeures de maternelle et de primaire ont été associées à la supervision des expériences et des manipulations, pour que des jeunes, et même des très petits puissent tirer le meilleur parti de leur visite de cette exposition.

Cette exposition sera visible **du 30 janvier 2020 au 30 janvier 2021** à l'Espace Mendès France, puis sera disponible à la location dans les établissements ou dans tout autre lieu.

N'hésitez pas à emmener vos élèves voir cette exposition (nous avons beaucoup pensé à eux !) et surtout réservez ! Des documents pédagogiques seront mis en ligne sur le site de l'Espace Mendès France afin de préparer votre visite mais aussi de la prolonger par des travaux en classe.

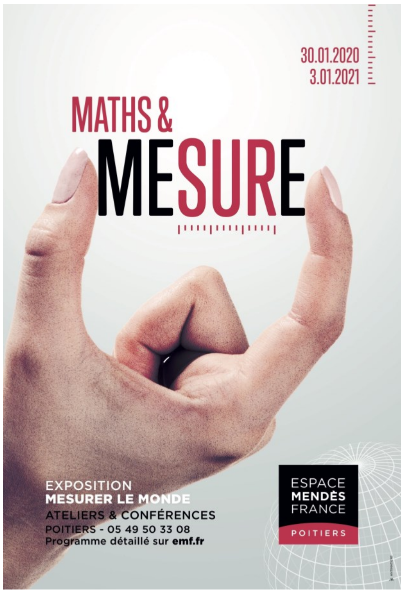
Nous remercions tous les enseignants qui ont conçu cette exposition en y consacrant beaucoup d'énergie et de temps pour populariser les mathématiques.

Informations, contact et réservations

Site de l'Espace Mendès France : https://emf.fr

Réservation et renseignements : 05 49 50 33 08 ou via la page contact du site

INAUGURATION DE L'EXPOSITION *MATHS ET MESURE*



Espace Mendès France, Poitiers

Mercredi 29 janvier 2020, 18 h 30

Suivie d'une conférence de Jean-Pierre Maillard

MESURER LA DISTANCE DES ÉTOILES :
DE L'ANTIQUITÉ AU XXI^{e} SIÈCLE

Les savants grecs appliquant les bases de la géométrie qu'ils ont inventée estiment le diamètre de la Terre, la distance de la Lune et du Soleil et donnent la première description du cosmos (IVe s. av. J.-C.) avec la Terre en son centre. Il faudra attendre vingt siècles pour que ce modèle soit remis en question par la mesure de la distance vraie des planètes puis des étoiles, tout en utilisant les mêmes principes mais aidé par les lunettes astronomiques puis les télescopes. Cette recherche se poursuit activement de nos jours avec les moyens d'observation moderne et permet de décrire de plus en plus précisément la structure de l'Univers dans son immensité.

Jean Pierre Maillard est astrophysicien à l'Institut d'astrophysique de Paris (IAP-CNRS-SU), directeur de recherche émérite au CNRS. Il a consacré une grande partie de sa carrière à la conception et à la mise en œuvre d'instruments dédiés à l'observation du ciel en spectroscopie.

Ru – Bri – COL⅃ AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

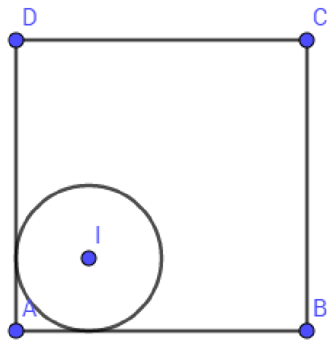
Des problèmes

119-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Comment coincer la bulle ?

Dans le carré ABCD, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r ($0 < r <$ AB/2) est tangent aux côtés [AB] et [AD] du carré.

Construire un cercle situé dans le carré et tangent à $\mathcal{C}$, à [AB] et [BC].



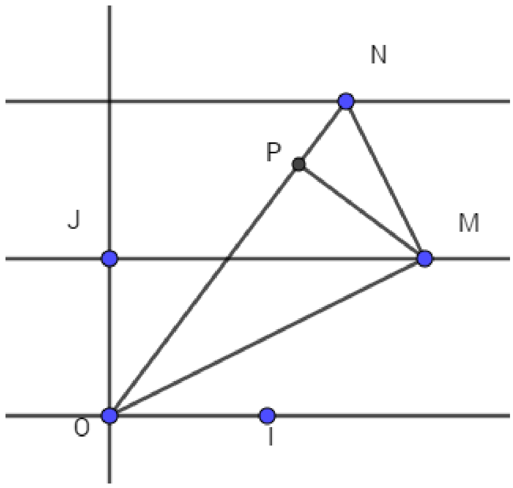
119-2 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Strophoïde droite

Soient D_1 la droite d'équation y = 1 et D_2 la droite d'équation y = 2 par rapport à un repère orthonormé (O, I, J). M est un point variable de D_1 et N un point variable de D_2. P est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OMN.

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MO})$ est l'angle droit direct.

Quel est l'ensemble décrit par P quand M décrit D_1 ?



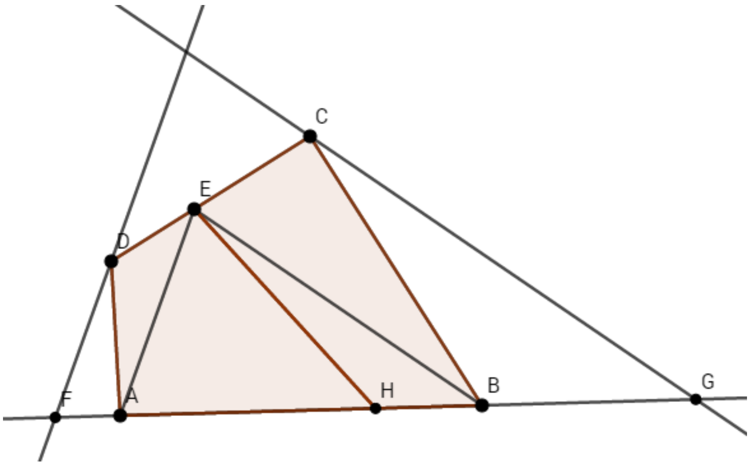
119-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $\left\lfloor \sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n-1} \right\rfloor$ où $\lfloor \ \rfloor$ désigne la partie entière du nombre.

115-4 *proposé par Dominique Gaud* :

Partage d'un quadrilatère convexe en deux parties de même aire

On prend E sur le côté [CD]. On mène la parallèle à (EA) passant par D qui coupe (AB) en F et la parallèle à (EB) passant par C qui coupe (AB) en G. H est alors le milieu de [FG]. Le segment [EH] partage le quadrilatère ABCD en deux parties de même aire.



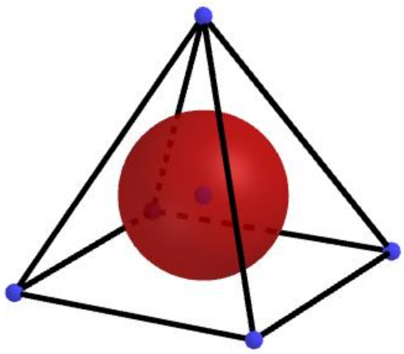
Y a-t-il des restrictions sur la position du point E sur [CD] et/ou sur les angles du quadrilatère convexe ?
Justifier alors l'exactitude de cette construction

Solution de Frédéric de Ligt

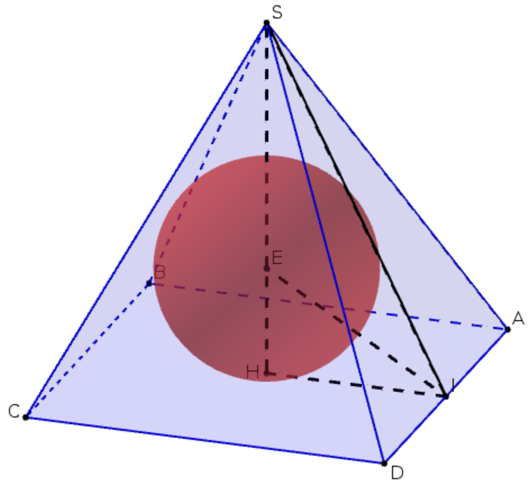
Avec Geogebra on constate que la construction partage le quadrilatère en deux parties de même aire seulement si le point H tombe entre A et B.
On se place désormais dans ce cas favorable.
La construction est alors valide y compris quand le point E est confondu avec les sommets C ou D.
Les triangles EBC et EBG ont la même base [EB] et même hauteur puisque leur troisième sommet est situé sur une droite parallèle à la base. Aire(EBC) = Aire(EBG). De même Aire(EDA) = Aire(EAF).
Aire(ABCD) = Aire(EDA) + Aire(EAH) + Aire(EHB) + Aire(EBC) = Aire(EAF) + Aire(EAH) + Aire(EHB) + Aire(EBG) = Aire(EFG).
On sait qu'un triangle est partagé en deux triangles d'aires égales par n'importe laquelle de ses médianes. Comme H est le milieu du côté [FG], le triangle EFG est partagé en 2 triangles de même aire par le segment [EH]. Par conséquent le segment [EH] partage aussi le quadrilatère ABCD en deux quadrilatères de même aire.

117-1 *proposé par Jean-Christophe Berthonnaud* :

Dans une pyramide régulière à base carrée, dont le côté vaut la hauteur, on inscrit une sphère. Quelle relation entre le côté de la base et le rayon de la sphère ?



Solution de Frédéric de Ligt



On a : SH = 2IH = a, donc $\tan\hat{I}=\frac{a}{a/2}=2=\frac{2\tan\hat{I}/2}{1-\tan^2\hat{I}/2}$.

D'où l'équation vérifiée par $\tan\hat{I}/2$:
$\tan^2\hat{I}/2+\tan\hat{I}/2-1=0$ dont la solution positive, la seule correspondant au problème posé, vaut $\tan\hat{I}/2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Par ailleurs $\tan\hat{I}/2=\frac{r}{a/2}$ où r désigne le rayon de la sphère inscrite dans la pyramide.
En rapprochant ces deux expressions de $\tan\hat{I}/2$ on obtient finalement $r=\frac{a}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{a}{2\varphi}$ où φ désigne le nombre d'or.

117-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :

Résoudre l'équation $(a - b)^2 = a + b$ avec a et b entiers, a > b > 0.

Solution de Hugues Biratelle

Une solution de l'équation est un couple (a, b) de deux nombres entiers naturels non nuls tels que $a > b$.
Puisque $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$, on a que $(a - b)^2 = a + b$ équivaut à $(a + b)^2 - 4ab = a + b$ ou encore à $(a + b)(a + b - 1) = 4ab$.
Posant $n = a + b$, on cherche a et b de somme $a + b = n$ et de produit $ab = n(n - 1)/4$. On se place dans **R**.
Si a et b existent, alors les solutions de l'équation du second degré en x : $x^2 - nx + n(n - 1)/4 = 0$.
Or le discriminant qui vaut $n^2 - n(n - 1) = n$ est supérieur ou égal à 3 car $a > b > 0$ et donc b vaut au moins 1 et a au moins 2. On en déduit que l'équation admet des solutions dans **R**.
Celles-ci sont :

$a = \frac{n+\sqrt{n}}{2}$ et $b = \frac{n-\sqrt{n}}{2}$ avec $n \geq 3$.

Recherche des solutions entières

S'il en existe alors $\sqrt{n}$ est un entier et donc n est un carré parfait :
$n = N^2$ avec $n \geq 4$ et donc $N \geq 2$.

Cela donne $a = \frac{N^2+N}{2}=\frac{N(N+1)}{2}$ et $b = \frac{N^2-N}{2}=\frac{N(N-1)}{2}$.

Réciproquement ces réels conviennent. En effet a est un entier car N ou $N + 1$ est pair, de même N ou $N - 1$ est pair ; $a - b = N \geq 2$ entraine $a > b$; $(a - b)^2 = N^2$ et $a + b = N^2$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des couples $(a, b) = \left(\frac{N(N+1)}{2}, \frac{N(N-1)}{2}\right)$ où N est un entier supérieur ou égal à 2.

Il y a une infinité de tels couples. Voici ceux que l'on obtient pour N = 2, 3, 4 et 5 respectivement : (3, 1), (6, 3), (10, 6) et (15, 10).

Autre méthode
On pose $N = a - b$.
Alors $N^2 = a + b$. Comme $a > b > 0$, on a $a > b \geq 1$ puis $N^2 = a + b > 2b \geq 2$.
Si (a, b) est solution de l'équation alors il est solution du système :

$$\begin{cases} a+b=N^2 \\ a-b=N \end{cases}$$

Puisque 1 × (-1) – 1 × 1 = -2 est non nul, ce système admet une seule solution et c'est le couple (a, b) tel que $a = \dfrac{\begin{vmatrix} N^2 & 1 \\ N & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-N^2-N}{-2} = \dfrac{N(N+1)}{2}$ et $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & N^2 \\ 1 & N \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{N-N^2}{-2} = \dfrac{N(N-1)}{2}$.
La partie réciproque et la conclusion sont ensuite identiques à la méthode précédente.

118-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Exprimer en fonction de n la somme des chiffres de l'entier n.

Solution de l'auteur

De façon un peu abrupte cela donne $n - 9\sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lfloor \dfrac{n}{10^i} \right\rfloor$ où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière du nombre et log le logarithme décimal.
Pour mieux comprendre l'origine de cette formule on va montrer comment est ainsi obtenue la somme des chiffres de 2019.
2019 = 9 + 2010= 9 + 9 × 201 + 201
= 9 + 9 × 201 + 1 + 200 = 9 + 9 × 201 + 1 + 9 × 20 + 20
= 9 + 9 × 201 + 1 + 9 × 20 + 9 × 2 + 2.
Et donc 2019 – (9 × 201 + 9 × 20 + 9 × 2) = 9 + 1 + 2 = 12.
Enfin si $10^\alpha \leq n < 10^{\alpha+1}$ alors $\alpha \leq \log n < \alpha + 1$ et donc $\lfloor \log n \rfloor = \alpha$. On a en particulier que $\left\lfloor \dfrac{n}{10^\alpha} \right\rfloor$ donne le chiffre situé à gauche dans l'écriture décimale de n.

Réseau Social

La Régionale de Poitou-Charentes a rejoint Twitter à l'occasion de la Journée Régionale du 9 octobre dernier.

Vous pouvez nous suivre en vous abonnant à notre compte @apmeppoitiers

La Régionale rejoint ainsi la famille des comptes de l'APMEP :

- L'APMEP nationale : @Apmep_Nat
- La Régionale d'Île de France : @APMEP_IDF
- La Régionale de Grenoble : @ApmepGrenoble
- La Régionale de la Réunion : @Apmep_Run
- La Régionale de Toulouse : @ApmepToulouse
- La Régionale Nord-Pas de Calais : @apmep5962

Humour

Les concepteurs de l'expo Maths et Mesure, ivres de travail, ont parfois déliré dans leurs idées.

Ainsi ont-ils créé ce mini-stère des mathématiques !

Nul doute qu'un vrai ministère serait bien utile en ces temps de réforme.

Et plus spécifiquement en mathématiques ?
Les causes sont les mêmes que pour l'ensemble de la profession mais avec une intensité plus grande.

Quelques pistes d'explication :
Avec des élèves plus difficiles à cadrer, une discipline exigeante comme les mathématiques est plus compliquée à enseigner.
Un certifié gagne au bout de 5 ans d'ancienneté 1684 € net (le SMIC est à 1200 €), dans le même temps un étudiant sortant d'un master de mathématiques a 9 chances sur 10 d'obtenir un CDI comme cadre dans les 18 mois suivant sa sortie d'étude, avec un salaire net au bout de 30 mois en moyenne de 2350 € (Le Monde)
Ces éléments peuvent légitiment faire douter un étudiant en mathématiques de s'engager dans la voie de l'enseignement.

Oui mais il y a des atouts à faire valoir : le contact avec la jeunesse, le plaisir et la nécessité de la transmission, une stimulation intellectuelle incessante, une relative liberté pour mener son enseignement, une gestion du temps de travail en dehors des cours assez souple, et puis aussi, ce n'est pas négligeable, un emploi stable, des vacances pour travailler à son rythme, pour profiter des enfants si on en a, pour se cultiver (mais ça coûte !), pour se reposer (c'est gratuit), pour voyager (là, ça coûte cher !) et puis aussi une espérance de vie au-dessus de la moyenne avec une pension de retraite convenable.

J'espère que la réforme des retraites en cours, si elle se concrétise, ne se traduira pas à terme pour les enseignants par un niveau de pension inférieur à celui qui est servi actuellement aux retraités ; sinon la crise du recrutement des enseignants de mathématiques deviendra certainement critique. Quel jeune étudiant scientifique, avec toutes les hésitations qui le retiennent déjà, voudrait finalement embrasser notre profession avec de telles perspectives de sortie ?

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication
F. de Ligt
Comité de rédaction
F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne,
J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.
Imprimerie
IREM de Poitiers. Adresse ci-dessus.

Éditeur
APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège Social
Voir adresse ci-dessus
Dépôt légal
Décembre 2019