Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

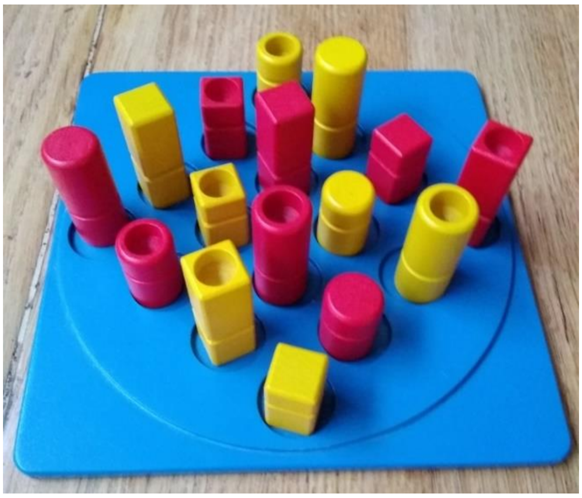
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

118-1 *proposé par Jean Fromentin (Niort)* :

Vous connaissez peut-être le jeu de stratégie « Quarto ». Voici brièvement rappelé ses règles. Sur un plateau carré 4x4, deux joueurs s'affrontent. Chaque pièce possède quatre caractéristiques avec, pour chacune, deux options, haute ou basse, rouge ou jaune, ronde ou carrée, creuse ou pleine. Ces pièces sont donc au nombre de $2^4 = 16$. Le but du jeu est d'être le premier à aligner sur une ligne, une colonne ou une des deux diagonales quatre pièces ayant une caractéristique commune. En manipulant les pièces du jeu on peut faire apparaître des agencements curieux. Ainsi, sur le cliché ci-dessous, vous pouvez observer que les pièces ont été disposées de telle sorte que chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales laissent apparaître deux fois chaque option de chaque caractéristique. La question est maintenant la suivante : combien y a-t-il de telles configurations (aux rotations près du plateau) ?



118-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

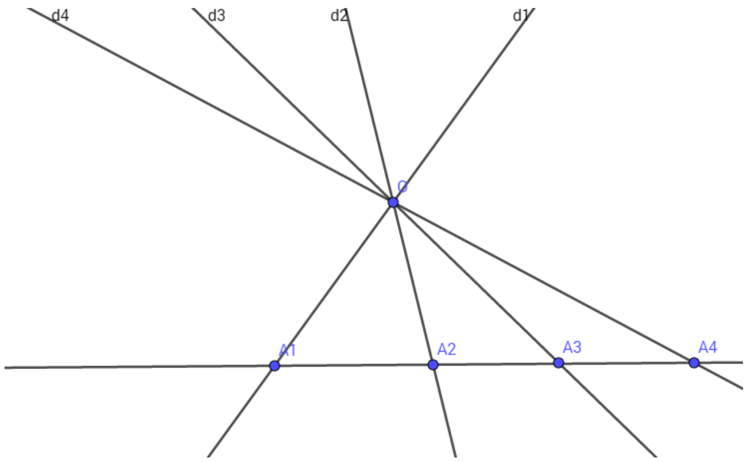
Exprimer en fonction de n la somme des chiffres de l'entier n.

118-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Soit n un entier naturel non nul. Quel est le nombre de solutions de l'équation : $\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (a et b entiers naturels non nuls) ?

Des solutions

67-1 *proposé par Serge Parpay* :



Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont concourantes au point O. Construire une droite d qui coupe ces quatre droites respectivement en A_1, A_2, A_3 et A_4 de telle façon que $A_1A_2 = A_3A_4$.

Solution de Frédéric de Ligt

Je n'ai pas de construction simple à proposer en revanche je vais montrer, un point A1 étant choisi sur la droite d_1, qu'il existe toujours une droite d qui vérifie la relation demandée.
On se place dans un repère orthonormé d'origine O avec d_1 confondu avec l'axe des ordonnées et A1 (0 ; 1). Les droites d_2, d_3 et d_4 sont concourantes en l'origine O. L'équation réduite de d_2 est de la forme $y = a_2x$, celle de d_3 de la forme $y = a_3x$, celle de d_4 de la forme $y = a_4x$ et celle de d de la forme $y = ax + 1$ avec $a < a_2 < a_3 < a_4$.

A_2 appartient à d et d_2, ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{a_2\text{-}a};\frac{a_2}{a_2\text{-}a}\right)$; A_3 appartient à d et d_3, ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{a_3\text{-}a};\frac{a_3}{a_3\text{-}a}\right)$; A_4 appartient à d et d_4, ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{a_4\text{-}a};\frac{a_4}{a_4\text{-}a}\right)$.
On exprime maintenant les longueurs $A_1A_2^2$ et $A_3A_4^2$.

$$A_1A_2^{\ 2}=\left(0-\frac{1}{a_2\text{-}a}\right)^2+\left(1\text{-}\frac{a_2}{a_2\text{-}a}\right)^2=\frac{1+a^2}{(a_2\text{-}a)^2}\quad\text{et}\quad A_3A_4^{\ 2}=\left(\frac{1}{a_3\text{-}a}-\frac{1}{a_4\text{-}a}\right)^2+\left(\frac{a_3}{a_3\text{-}a}\text{-}\frac{a_4}{a_4\text{-}a}\right)^2=\frac{(a_4\text{-}a_3)^2(1+a^2)}{(a_3\text{-}a)^2(a_4\text{-}a)^2}.$$

L'égalité $A_1A_2^2 = A_3A_4^2$ se traduit par $\frac{1}{(a_2\text{-}a)^2}=\frac{(a_4\text{-}a_3)^2}{(a_3\text{-}a)^2(a_4\text{-}a)^2}$ ou encore, compte tenu de l'ordre des coefficients directeurs, $\frac{1}{(a_2\text{-}a)}=\frac{(a_3\text{-}a_4)}{(a_3\text{-}a)(a_4\text{-}a)}$.
Le coefficient directeur a vérifie l'équation du second degré :

$$a^2 \text{ -}2a_4a - a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4 = 0.$$

Le discriminant réduit vaut alors :

$$a_4^2 - (a_2 + a_3)a_4 + a_2a_3 = (a_4 - a_3)(a_4 \text{ -}a_2)$$

Ce discriminant réduit est strictement positif car $a_4 < a_3$. L'équation admet donc deux solutions. $a_4 \pm \sqrt{(a_4\text{-}a_3)(a_4\text{-}a_2)}$.
Comme on cherche une valeur de a plus petite que a_4 on retient $a= a_4 - \sqrt{(a_4\text{-}a_3)(a_4\text{-}a_2)}$.

117-2 *proposé par Dominique Gaud* :

Il fut un temps où les litres de lait étaient conditionnés dans des berlingots (tétraèdres réguliers) obtenus en pinçant l'aire latérale d'un cylindre en haut et en bas perpendiculairement.
Quelles doivent être les dimensions du rectangle constituant l'aire latérale pour obtenir un litre ?

Solution de Frédéric de Ligt

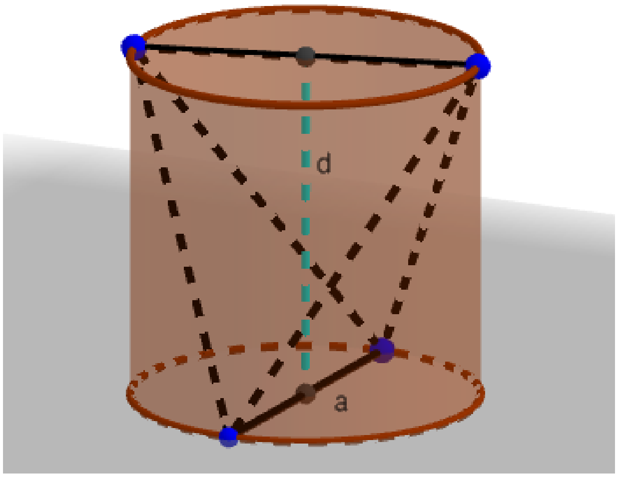
On peut partir de l'expression qui donne le volume V d'un tétraèdre régulier en fonction de la longueur de son arête a. V = $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

Pour contenir 1 L l'arête du tétraèdre doit donc mesurer a $= \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}}$ dm.

La longueur du rectangle nécessaire, qui est égale au périmètre du disque associé au cylindre, est le double de l'arête du tétraèdre, soit 2a = $2\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \approx 4,08\,\text{dm}$.

A l'aide du théorème de Pythagore dans le tétraèdre régulier on trouve l'expression de la distance d qui sépare les milieux de deux arêtes opposées : $\frac{\sqrt{2}}{2}$a, et cette distance d correspond à la hauteur du cylindre. La largeur du rectangle associé est donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \approx 1,44\,\text{dm}$.

Pour info. Pour des raisons de simplicité de calcul le volume de 1 L a été préféré, cependant les berlingots de lait classiques avaient une contenance de 200 mL ce qui pouvait être obtenu à partir d'un rectangle 23,9 cm sur 8,4 cm.



117-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :

Résoudre l'équation $(a - b)^2 = a + b$ avec a et b entiers, a > b > 0.

Solution de Frédéric de Ligt

On pose X = a – b > 0 et donc a + b = X + 2b. L'équation s'écrit maintenant $X^2 = X + 2b$, ou encore (X – 1)X/2 = b avec X > 1 puisque b > 0.
Et alors a = X + b = X + X(X – 1)/2 = X(X + 1)/2

On reconnaît dans b et a les expressions de nombres triangulaires successifs.
Si on note $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ le nième nombre triangulaire pour n ≥ 1 alors l'ensemble des solutions (a ; b) de l'équation proposée est l'ensemble des couples $(\Delta_{n+1}\ ;\ \Delta_n)$ avec n ≥ 1.