Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

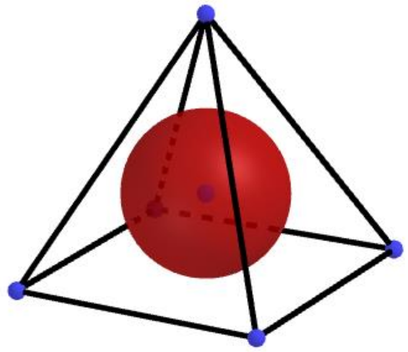
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

117-1 *proposé par Jean-Christophe Berthonnaud (Angoulême)* :

Dans une pyramide régulière à base carrée, dont le côté vaut la hauteur, on inscrit une sphère. Quelle relation entre le côté de la base et le rayon de la sphère ?



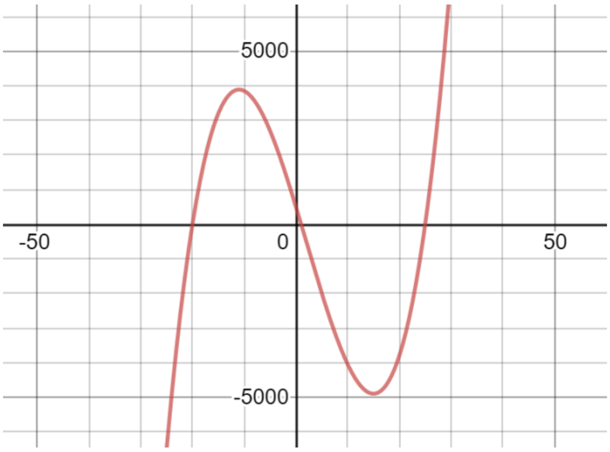
117-2 *proposé par Dominique Gaud (Migné-Auxances)* :

Il fut un temps où les litres de lait étaient conditionnés dans des berlingots (tétraèdres réguliers) obtenus en pinçant l'aire latérale d'un cylindre en haut et en bas perpendiculairement.
Quelles doivent être les dimensions du rectangle constituant l'aire latérale pour obtenir un litre ?

117-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Résoudre l'équation $(a-b)^2 = a+b$ avec a et b entiers, $a > b > 0$.

117-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

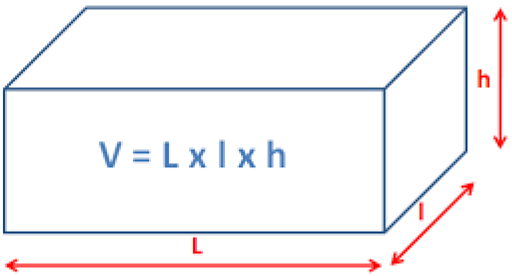


Le polynôme $Q(X) = X^3 - 6X^2 - 495X + 500 = (X+20)(X-1)(X-25)$ a ses coefficients entiers et ses trois racines entières et distinctes.
Son polynôme dérivé $Q'(X) = 3X^2 - 12X - 495 = 3(X-15)(X+11)$ a aussi ses deux racines entières et distinctes.
Le polynôme $Q''(X) = 6X - 12 = 6(X-2)$ admet aussi une racine entière.
Voilà un polynôme bien pratique à exploiter avec les élèves de STMG. Il y a bien d'autres polynômes de degré 3 de la sorte. Je vous laisse le plaisir de les chercher.
Et en montant d'un degré supplémentaire ? Pouvez-vous exhiber un polynôme P(X) de degré 4, à coefficient entiers, possédant quatre racines entières distinctes, dont les polynômes dérivés P'(X), P''(X) et $P^{(3)}$(X) possèdent aussi des racines entières ?

Des solutions

106-4 *de Frédéric de Ligt* :

Montrer qu'il existe une infinité de boîtes parallélépipédiques à côtés rationnels (exprimés en m), dont le volume vaut 48 m^3 et dont la longueur totale des arêtes vaut 48 m.



Solution de l'auteur
Pour établir cette propriété il « suffit » de prouver qu'il existe une infinité de couples de rationnels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 9x + 9 \\ 3x - 6 < y < -3x + 6 \end{cases}$$

En effet, soit (x,y) une solution du système précédent, on pose :

$$a=\frac{6}{3-x}\ ;\ b=\frac{6-3x+y}{3-x}\ ;\ c=\frac{6-3x-y}{3-x}.$$

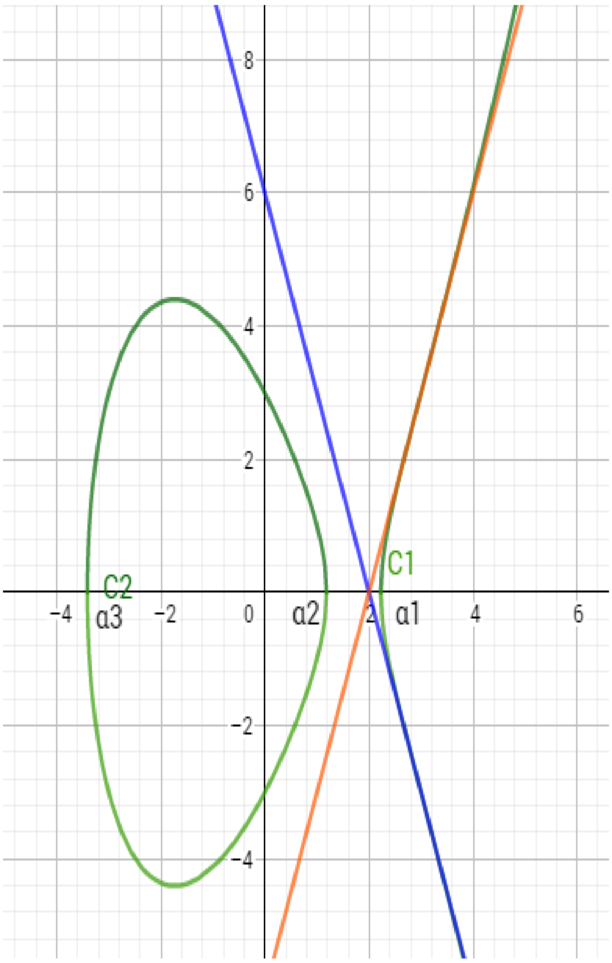
Les rationnels strictement positifs *a*, *b* et *c* vérifient :

$$a+b+c=\frac{6}{3-x}+\frac{6-3x+y}{3-x}+\frac{6-3x-y}{3-x}=\frac{18-6x}{3-x}=6$$

$$abc=\frac{6}{3-x}\times\frac{6-3x+y}{3-x}\times\frac{6-3x-y}{3-x}=\frac{6[(6-3x)^2-y^2]}{(3-x)^3}=\frac{6[(6-3x)^2-(x^3-9x+9)]}{(3-x)^3}=\frac{6(-x^3+9x^2-27x+27)}{(3-x)^3}=6$$

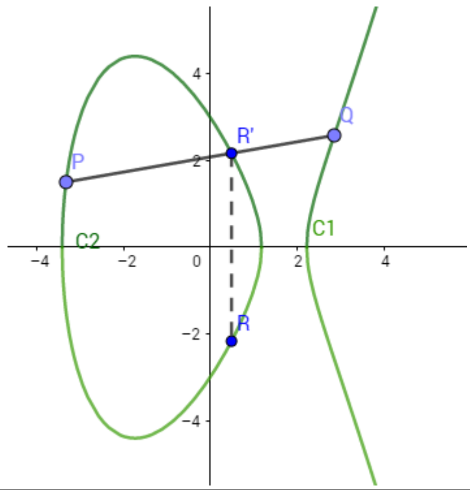
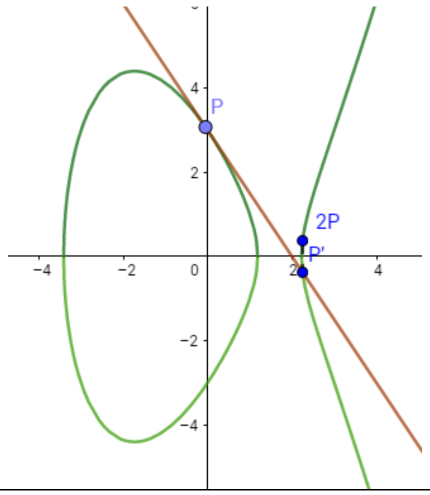
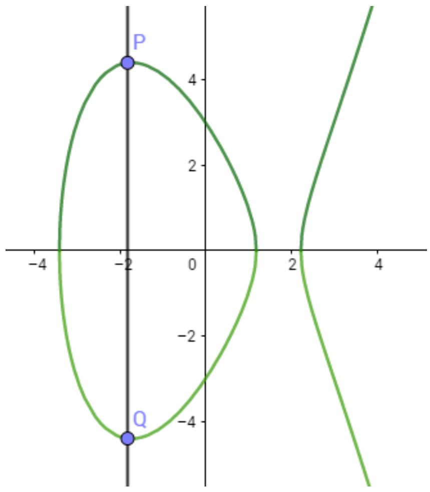
On pose ensuite A = 2*a* ; B = 2*b* ; C = 2*c* et on a bien ABC = 48 et 4(A+B+C) = 48.
À chaque couple solution du système est associé de façon unique un triplet de rationnels positifs (A, B, C).
Graphiquement on a la situation suivante :

d1 : $y=-3x+6$
d2 : $y=3x-6$
C : $y^2=x^3-9x+9$
$C=$ C1 $\cup$ C2
$\alpha1\approx 2{,}2266$
$\alpha2\approx 1{,}1847$
$\alpha3\approx -3{,}411$



Il s'agit de montrer que la courbe fermée C2 contient une infinité de points birationnels.

On va noter $C(\mathbf{Q})$ l'ensemble des points birationnels de la courbe elliptique *C*.
On sait qu'il est possible de définir une addition géométrique $\oplus$ sur $C(\mathbf{Q})$ en lui adjoignant un point à l'infini ∞, qui jouera le rôle de l'élément neutre, de telle sorte que $(C(\mathbf{Q})\cup\infty,\oplus)$ ait une structure de groupe abélien. En particulier si P et Q sont des points de $C(\mathbf{Q})\cup\infty$ alors P$\oplus$Q est aussi un point de $C(\mathbf{Q})\cup\infty$.
On rappelle brièvement la construction de la somme de deux points dans le cas de figure étudié.

		
$P \oplus Q = R$	$P \oplus P = 2P$	$P \oplus -P = \infty$ en posant $Q = -P$

L'ordre d'un point P de $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \cup \infty, \oplus)$ est la plus petite valeur entière n telle que $\underbrace{P \oplus \ldots \oplus P}_{n \text{ termes}} = \infty$.

On va montrer qu'il existe un point P de C2(**Q**) d'ordre infini et tel que pour toutes les valeurs positives de l'entier n on a $\underbrace{P \oplus \ldots \oplus P}_{n \text{ termes}} \in C2(\mathbb{Q})$.

Soit P(0 ; 3) un point de C2(**Q**), la tangente en P à la courbe a pour équation réduite $y = -1,5x + 3$. Pour obtenir les coordonnées du point 2P, on résout le système :

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 9x + 9 \\ y = -(-1,5x + 3) \end{cases}$$

Les valeurs possibles pour x sont 0 et 2,25.
La première valeur est l'abscisse du point P et la seconde correspond à l'abscisse du point 2P, l'ordonnée de 2P vaut alors -(-1,5x2,25 + 3) = 0,375. On a finalement 2P(2,225 ; 0,375) qui appartient à C1.
Les cordonnées de 3P s'obtiennent en écrivant que 3P = P⊕2P puis en résolvant le système

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 9x + 9 \\ y = -(\dfrac{0,375 - 3}{2,25 - 0}x + 3) = \dfrac{7}{6}x - 3 \end{cases}$$

Les valeurs possibles de x sont 0, 2,25 et $\dfrac{-8}{9}$. L'abscisse de 3P est donc $\dfrac{-8}{9}$ et son ordonnée vaut alors $\dfrac{7}{6} \times \dfrac{-8}{9} - 3 = \dfrac{-109}{27}$. 3P$(\dfrac{-8}{9}$; $\dfrac{-109}{27})$ est un point de C2, ses coordonnées sont rationnelles mais ne sont pas entières.

Pour information les valeurs associées sont A $= \dfrac{108}{35}$, B= $\dfrac{50}{21}$ et C $= \dfrac{98}{15}$.

On a bien ABC =4(A+B+C) = 48.
Je vais maintenant utiliser une partie des conclusions d'un théorème qui va permettre d'aboutir, il s'agit du théorème de Nagell-Lutz (1935-1937). On peut en trouver une démonstration accessible, en anglais malheureusement, à l'adresse :

math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Galperin.pdf.

Les points de $\mathcal{C}$ (Q) qui sont d'ordre fini ont obligatoirement leurs coordonnées entières.
Comme 3P a des coordonnées non entières, 3P est donc d'ordre infini.

Notons pour plus de clarté M = 3P. Les points *n*M, *n* entier non nul, sont donc **tous distincts** et appartiennent alternativement à C2(**Q**) et C1(**Q**) selon la parité de *n*. En conséquence les points (2*k*+1)M, *k* entier, appartiennent tous à C2(**Q**). Ce qui permet de conclure.

Remarque
Comme la suite de points ((2*k*+1)P), *k* entier, contient la suite de points ((2*k*+1)M), *k* entier, et que les points (2*k*+1)P appartiennent tous à C2(**Q**), on obtient ainsi trois fois plus de points qui conviennent.

115-2 *de Jacques Chayé* :

Soient deux cercles Γ et Γ', extérieurs l'un à l'autre, de centres respectifs O et O', de rayons respectifs R et R'.
Du point O', on mène les tangentes (O'T) et (O'U) au cercle Γ.
Du point O, on mène les tangentes (OT') et (OU') au cercle Γ'.
(OT') et (OU') coupent Γ en A et B respectivement.
(O'T) et ((O'U) coupent Γ' en C et D respectivement.
Montrer que le quadrilatère ABDC est un rectangle.

Solution de l'auteur
La droite (OO') est un axe de symétrie pour la figure ; il s'ensuit que (AB) et (CD) sont perpendiculaires à (OO') et que H et K, les milieux respectifs de [AB] et [CD] appartiennent à (OO').
Les triangles rectangles OAH et OO'T' sont semblables, de même que les triangles O'CK et OO'T. Cela permet d'écrire :

$$\frac{AH}{OA}=\frac{O'T'}{OO'} \text{ et } \frac{CK}{O'C}=\frac{OT}{OO'}.$$

Donc, AH × OO' = OA × O'T' = R × R' et CK × OO' = O'C × OT = R × R'.
Il s'ensuit que AH = CK et par suite AB = CD. Le quadrilatère ABDC est donc un rectangle.