Les gammes musicales

Nicolas Minet , IREM&S de Poitiers, professeur au Lycée du Bois d'Amour (Poitiers)

Épisode 1 : Éclairages sur l'enseignement scientifique de première.

Pour défendre la place nécessaire d'un enseignement sensé des sciences au XXIe siècle, on doit s'appuyer sur leur immense rayonnement dans le monde des Hommes. Malgré une participation semble-t-il minoritaire des professeurs de mathématiques pour la rentrée de septembre 2019, le nouvel "enseignement scientifique" de Première générale est important : ce sera le seul (avec peut-être l'option "maths complémentaires" de Terminale) apte à mettre en avant l'interdisciplinarité et à illustrer ce rayonnement des sciences. Certes, les contenus ne sont pas du tout suffisants pour envisager des études supérieures où les mathématiques sont utiles ou indispensables, mais ils le sont pour mettre en lumière la dimension culturelle –souvent moquée, par simple ignorance– des mathématiques.

C'est le cas notamment du thème son et musique, omniprésent dans notre vie et dans celle de nos élèves. La compression et le codage d'un son modélisé par des phénomènes périodiques ne se conçoivent pas sans mathématiques. Même constat pour le paragraphe "la musique ou l'art de faire entendre des nombres" qui demande d'enseigner aux élèves l'évolution des gammes musicales. Nous proposons dans cette rubrique de raconter brièvement cette histoire, ce qui nous amènera à répondre, même partiellement, à ces questions :

- Qu'est-ce qu'une gamme ? Pourquoi ont-elles souvent, en Occident, 5, 7 ou 12 notes ?
- Pourquoi la musique a-t-elle été enseignée comme partie des maths pendant mille ans ?
- En quoi Galilée père et fils ont-ils bouleversé l'histoire des gammes et celle de l'astronomie ?
- Quelle est la logique dans les espacements des cases d'une guitare ?
- Pourquoi les luthiers construisent-ils des ukulélés en appliquant la "règle des 18" ?

Le problème de tout artisan

La forme globale d'un instrument de musique est plus souvent due à des traditions artisanales qu'à des recherches scientifiques d'optimisation du son. Mais dès l'Antiquité grecque s'est posé le problème fondamental du choix d'un ensemble de notes répondant à deux critères :

- *Contrainte pratique, à savoir : combien de notes ?*

Selon l'instrument, cela revient à dire : combien de tuyaux ? De cases ? De trous ?

- *Contrainte esthétique, à savoir : quelles notes ?*

À nouveau, comment choisir : longueurs des tuyaux, largeurs de cases, distance entre les trous ?

Il est assez extraordinaire de constater que des choix ont finalement été privilégiés, et se sont imposés très durablement. On peut l'expliquer par des savoirs scientifiques récents, mais ne commençons pas par la fin, voulez-vous. Bien sûr, il y a de nombreuses variantes selon les lieux et les époques, et rien que pour des instruments à cordes pincées, un tar iranien (une sorte de luth) n'est pas conçu comme, et ne produira pas les mêmes notes, qu'une guitare espagnole. Il sera essentiellement question, dans cette histoire –pardon pour la restriction, par simple ignorance de l'auteur– des gammes qui ont façonné notre musique occidentale.

Et si l'on n'est pas musicien, que peut-on comprendre à tout cela ?

Commençons par régler ce problème ; la bonne nouvelle est que tout va se passer sur le papier, ce qui évitera de pointer d'un doigt railleur ceux d'entre vous qui "n'auraient pas l'oreille musicale" par des écoutes discriminatoires. Il pourrait donc être uniquement question ici de musique théorique, d'une science déductive. Et c'est d'ailleurs en partie ce qui va se passer, car c'est ainsi que ça s'est passé… Pourtant, des renvois seront proposés vers des ressources en ligne afin de permettre quelques écoutes, car il n'est pas concevable d'évoquer au XXI^{e} siècle la musique uniquement à la manière de théoriciens tels Euclide ou Euler, pour ne citer qu'eux.

Qu'est-ce qu'une gamme ?

Voyons, pour démarrer, cet extrait du programme d'enseignement scientifique :

4.2 - La musique ou l'art de faire entendre les nombres
La musique et les mathématiques sont deux langages universels. Les Grecs anciens les ont dotés d'une origine commune puisque la *théorie pythagoricienne des proportions* avait pour but de percer les secrets de l'harmonie musicale. Depuis, les évolutions de la musique et des mathématiques se sont enrichies mutuellement.

Une gamme, probable première "théorisation" de la musique, n'est donc que le choix de nombres (ou proportions) car une **gamme** est une **échelle** de nombres ; la traduction de ces deux mots en anglais se fait d'ailleurs par le seul terme ***scale***. Plus précisément, nous baserons toute notre saga sur les instruments à cordes, en n'acceptant que la longueur d'une corde comme paramètre pour modifier un son. Ceci dit, nous pouvons désormais poser ce qu'est une gamme :

Principe 1 : une **gamme** est une échelle de nombres compris entre l'unité (1) et la moitié (1/2).

Principe 2 : une corde de longueur unité (1) est choisie ; la note correspondante, nommée **fondamentale** ou **note initiale**, sera la plus grave de la gamme ; une corde de longueur moitié (1/2) est choisie ; la note correspondante, nommée **note finale**, sera la plus aigüe de la gamme.

Il faut donc que les non-musiciens admettent ici un point essentiel : deux cordes dont le rapport de longueur est 2 donnent la même impression sonore, comme une sorte de superposition parfaite. Ainsi, il n'est pas utile de chercher des longueurs de cordes hors de l'intervalle [½ ; 1] car on retrouvera les mêmes impressions. Promis, il n'y aura pas d'autre injonctions de la sorte… Voir [1] pour se convaincre (ou pas) de cette soi-disant "impression sonore d'harmonie".

Conséquence vertigineuse de ces deux principes : il y a une infinité de gammes possibles puisqu'il s'agit de choisir librement des nombres dans un intervalle de réels ! Commençons par celle, ancienne et célèbre, qui est au programme de l'enseignement scientifique.

Comment est construite la gamme de Pythagore ?

> *"Nous ne disposons pas de trace écrite des théories construites et enseignées par Pythagore au VI^{e} siècle avant notre ère. Pourtant quelques anecdotes ont traversé les siècles et ont été transmises comme autant d'illustrations des principes mathématiques développés par le savant de Samos. Parmi celles-ci, il en est une qui concerne la musique, ou plus exactement la théorie des consonances […] La légende des marteaux de Pythagore apparaît pour la première fois, en l'état actuel des con-*

*naissances, chez Nicomaque de Gerase (II*e *s.) dans* Harmonices manuale. *Ce manuscrit a été découvert à la fin du XV*e *siècle."*

F.Baskevitch (2008), *Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie*

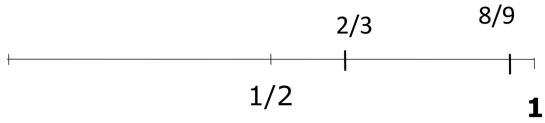
Vous trouverez page 18 un extrait de cette fameuse "légende de la forge" selon laquelle Pythagore aurait découvert fortuitement que les marteaux d'un forgeron rendaient des sons harmonieux entre eux, deux par deux, avec des masses dans des rapports simples 9/8, 4/3 , 3/2, ou 2/1. Ces nombres rationnels, seul type de nombres admis des Pythagoriciens, ont permis de créer la gamme qui porte son nom, selon le troisième principe que voici :

Principe 3 : chaque nombre de la gamme de Pythagore se déduit du nombre précédent en commençant par l'unité, et en le multipliant par 2/3. Deux cas sont alors possibles :

- soit le résultat est compris entre l'unité 1 et la moitié 1/2, et il est alors conservé ;
- soit le résultat n'est pas compris entre l'unité 1 et la moitié 1/2 et, pour le devenir, il est alors remplacé par son double.

Ainsi, inspiré par la légende de la forge, Pythagore aurait utilisé le principe suivant : la corde de longueur 2/3 sonne harmonieusement avec la corde de longueur unité. Il n'est pas question de discuter ceci désormais, puisque c'est un choix (arbitraire) permettant de calculer ensuite logiquement d'autres notes. Réitérerons désormais : puisque la corde de longueur 2/3 vibre en harmonie avec la corde de départ, une corde de longueur " les 2/3 des 2/3" vibrera en harmonie avec la corde de longueur 2/3 (transitivité quand tu nous tiens…). On obtient ainsi une corde de longueur 4/9. Mais comme 4/9 n'est pas compris entre l'unité et la moitié, on applique complètement le principe 3 en doublant la longueur 4/9. On obtient donc une corde de longueur 8/9. Voici donc une nouvelle note pour enrichir notre gamme.

Et ainsi de suite…



C'est donc bien de mathématique qu'il est question, puisque la gamme de Pythagore se créée désormais de proche en proche, selon ces 3 principes, de manière purement logique. Les professeurs de mathématiques sont donc largement légitimes à l'enseigner ! Pardon, je m'égare…

Cahier de vacances

Exercice 1 : vérifiez que cette suite de nombres définit bien les premiers pas de la gamme de Pythagore :

$$1 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{8}{9} \rightarrow \frac{16}{27} \rightarrow \frac{64}{81} \rightarrow \frac{128}{243} \rightarrow \frac{512}{729} \rightarrow \frac{2048}{2187} \rightarrow \frac{4096}{6561} \rightarrow \frac{16384}{19683} \rightarrow \frac{32768}{59049} \rightarrow \frac{131072}{177147}$$

Cela nous donne donc une quantité de notes possibles, chacune définie par ces longueurs de cordes.

Exercice 2 : mais quand donc s'arrête cette suite de notes ? Car il faudra bien un jour revenir à la construction de l'instrument à cordes, et arrêter un nombre de notes…

Vous pouvez envoyer vos réponses au siège de la Régionale APMEP sur papier libre, par pigeon voyageur, ou tout engin de communication homologué par le ministère. Passez un bel été musical en attendant.

[1] : https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao (video "science étonnante : musique et maths #41" de 2 min 10 à 4 min 50)