Ru – Bri – COL∟AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

À partir du numéro 56 de Corol'aire*, il y a une quinzaine d'années, Serge Parpay m'a confié la poursuite de cette rubrique. Depuis il a été proposé aux lecteurs plus de 200 problèmes, 221 pour être précis si l'on excepte ceux parus dans la dernière livraison, et la plupart ont trouvé une voire plusieurs solutions. Mais, un peu comme un certain village peuplé d'irréductibles gaulois, certains énoncés résistent encore et toujours. Ils sont une dizaine tout au plus mais sont comme un caillou dans la chaussure. Or la majorité d'entre eux proviennent d'un unique auteur :* ***Jean-Christophe Laugier*** *de Rochefort. Aussi je voudrais faire une dernière tentative pour vous les proposer. Qui relèvera le défi de résoudre au moins l'un d'entre eux ?*

Des problèmes

56-2

1) Soient a, b et c des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$; montrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{41}{42}$.
2) D'une manière plus générale, soient a_1, a_2, …, a_n des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<1$; montrer que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\ldots+\frac{1}{e_n}$, (e_n) étant une suite d'entiers définie par $e_1 = 2$ et $e_{n+1}=e_1+e_2+\ldots+e_n$ pour $n\geq 1$.

74-1

<u>Points sur un demi-cercle</u>

1) Quelle est la probabilité que trois points placés au hasard sur un cercle unité soient situés sur un même demi-cercle de ce cercle ?
2) Plus généralement quelle est la probabilité que n points placés au hasard sur un cercle unité soient situés sur un même arc de mesure α $(0\leq\alpha\leq 2\pi)$ de ce cercle ?
3) Passons à la dimension supérieure. Quelle est la probabilité que 4 points placés au hasard sur une sphère unité soient situés sur un même polygone sphérique convexe de mesure β $(0\leq\beta\leq 4\pi)$ de cette sphère ?

103-4

Etant donné un entier naturel n, on note $f(n)$ le nombre obtenu en déplaçant le premier chiffre de l'écriture décimale de n à la fin. Par exemple, $f(3458) = 4583$. Déterminer tous les entiers tels que :
1) n divise $f(n)$;
2) $f(n)$ divise n.

110-4
On attribue une couleur à chaque arête de K_n (le graphe complet à n sommets, pour n entier au moins égal à 3). Combien de couleurs au minimum doit-on utiliser pour être assuré de l'existence d'un triangle dont les trois arêtes soient de couleurs différentes ?

111-3
Soit a, b des entiers tels que $0 < a < b$; dénombrer les suites finies d'entiers naturels u_1, u_2, ..., u_n de longueur n ($n \geq 3$), strictement croissantes et vérifiant :

$$u_1 = a,\ u_2 = b,\ u_i \leq u_{i-1} + u_{i-2} \text{ pour tout } i \text{ tel que } 3 \leq i \leq n.$$

113-2
Les joueurs A et B posent à tour de rôle une pièce de 1 euro sur une table circulaire. A joue en premier. Une pièce placée ne peut chevaucher une pièce déjà placée et doit reposer entièrement sur la table. Toute pièce placée ne peut ensuite être déplacée. Le dernier joueur à pouvoir placer une pièce est le gagnant. Y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

Des solutions

114-3 *de Jean-Paul Mercier* :

Connaître deux nombres rationnels dont la somme est égale au produit.

Solution de Louis Bailly
N.d.l.r. Louis Bailly revient sur cet énoncé dont une solution a déjà été donnée dans le numéro précédent pour l'étendre jusqu'aux nombres complexes.

1) Soient b et c deux nombres non nuls :

$$S = \frac{b+c}{b} + \frac{b+c}{c} = \frac{c(b+c)+b(b+c)}{bc} = \frac{b^2+c^2+2bc}{bc} = \frac{(b+c)^2}{bc},$$

$$P = \frac{b+c}{b} \times \frac{b+c}{c} = \frac{(b+c)^2}{bc}.$$

Donc $S = P$.
2) Réciproquement, soient x et y non nuls tels que $x+y=xy$ (1). On a donc que $x \neq 1$ et on peut alors écrire $x = 1 + \frac{c}{b} = \frac{b+c}{b}$ avec $bc \neq 0$. L'égalité (1) prend la forme $\frac{b+c}{b} y = \frac{b+c}{b} + y$ puis en isolant y dans cette dernière égalité on obtient : $y = \frac{b+c}{c}$.
En conclusion, l'ensemble des couples de nombres non nuls dont la somme est égale au produit est l'ensemble des couples $(\frac{b+c}{b}, \frac{b+c}{c})$ avec b et c réels ou complexes non nuls.

115-1 *de Jacques Chayé :*
D'une théière cylindrique et d'une théière sphérique de même volume, quelle est celle dont la surface extérieure est la plus petite (donc susceptible de mieux conserver la chaleur) ?

Solution de l'auteur

Considérons un cylindre de volume V donné, de hauteur h et de rayon r à la base. On a $V=\pi r^2 h$.

Soit A_1 l'aire de la surface extérieure de ce cylindre (comprenant la surface latérale, celle de la base et celle du couvercle) :

$$A_1 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = f(r).$$

Dérivons :

$$f'(r) = \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2V + 4\pi r^3}{r^2}.$$

La dérivée s'annule et change de signe pour $2V = 4\pi r^3$ c'est-à-dire $2\pi r^2 h = 4\pi r^3$ soit $h = 2r$.

Vu le sens de variation de la fonction cube, la fonction f passe par un minimum pour $h = 2r$.

Donc, un cylindre de volume donné a une aire extérieure totale minimale quand sa hauteur est égale à son diamètre de base. Dans ce cas son aire vérifie :

$$A_1 = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \text{ alors que } V = 2\pi r^3.$$

Considérons maintenant une sphère de rayon R et de même volume V. Son aire est $A_2 = 4\pi R^2$.

On a :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi r^3 \text{ donc } r = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} R.$$

Par suite :

$$A_1 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} R^2 = 4\pi R^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}} A_2 \approx 1{,}145 A_2.$$

Conclusion pratique : une théière, assimilée à une sphère, présente une surface extérieure moins importante qu'une théière de forme cylindrique de même volume.

115-3 *de Frédéric de Ligt* :

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux inégalités :

$f(x) \geq x + 1$ et $f(x+y) \geq f(x).f(y)$.

Solution de Pierre et Jean-Matthieu Bernat

1. On a $f(0) \geq 1$ et $f(0) \geq f(0)^2$ d'où $f(0) \leq 1$ par suite $f(0) = 1$.
2. D'autre part $f(x) \geq f(x/2)^2 \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. f est croissante, en effet soit $h > 0$ alors
$$f(x+h) - f(x) \geq f(x)f(h) - f(x) = f(x)(f(h) - 1) \geq hf(x) \geq 0.$$
4. f est continue. Soit x, $h \in \mathrm{P}$, $|h| \leq 1$ alors $f(x+h) - f(x) \geq hf(x)$ (*) et on a aussi :
$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = f(x+h) - f(x+h-h) &\leq f(x+h) - f(x+h)f(-h) \\ &\leq f(x+h)(1 - f(-h)) \\ &\leq h\, f(x+h) \quad (**) \\ &\leq hf(x+1) \end{aligned}$$
   Ainsi $hf(x) \leq f(x+h) - f(x) \leq hf(x+1)$.
   On en déduit facilement que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$ ainsi f est continue.
5. Enfin f est dérivable et $f' = f$ ce qui permet de conclure : la seule solution est $f(x) = \exp(x)$.
   Pour $h > 0$ on a par (*) et (**) : $f(x+h) \geq (f(x+h) - f(x))/h \geq f(x)$.
   Par suite $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (f(x+h) - f(x))/h = f(x)$.
   Pour $h < 0$, on obtient $f(x+h) \leq (f(x+h) - f(x))/h \leq f(x)$ ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} (f(x+h) - f(x))/h = f(x)$.