Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l' Enseignement
Public

*Régionale de
Poitou-Charentes*

Corol'aire

Mars 2019 n°116

Cap au Sud

Sébastien Dassule-Debertonne

Le monde associatif, même lorsque l'objet est professionnel, n'existe que par les bénévoles qui le font vivre. Embarqués dans un navire, nous essayons de construire des projets auxquels nous croyons, dont nous pensons qu'ils peuvent convenir au désir des adhérents (et des non adhérents parfois) et, bien sûr, qui correspondent aux valeurs que nous défendons.
À certains moments, le voyage est pareil à une croisière calme, agréable, intéressante. La Régionale de Poitou-Charentes que j'ai découverte il y a six ans a l'art de créer ces occasions. Son rallye, ses expos, ses journées de la Régionale sont apprécié.es et reconnu.es.
À d'autres moments, lorsque les équipes s'épuisent un peu, la traversée se fait en mer agitée. Et nous venons de vivre un tel instant. J'en ai été le déclencheur, et j'en suis désolé. Cependant, il est vrai que cette Régionale, l'une des plus active de l'APMEP, est animée par une équipe finalement restreinte qui a mesuré la fatigue à l'heure de se lancer dans l'organisation des Journées Nationales de 2021

Heureusement, il restait de l'envie et du dynamisme. Une correction de cap et fini Poitiers, bonjour Jonzac (en Charente). Les premiers contacts sont enthousiastes et l'idée… originale. Pas de doute, c'est la bonne option. Une petite chose, seulement, plus on est de bras, moins la manœuvre est difficile et plus tout le monde s'amuse. Alors, si l'envie vous en dit, n'hésitez pas à embarquer avec le comité d'organisation de ces Journées, pour une toute petite collaboration ou pour une plus importante à votre convenance.
À tout dire, il ne reste que trois fois rien à préparer (organiser les lieux, rechercher des financements, dégoter des conférenciers, motiver les troupes, préparer les valisettes, accueillir les congressistes, installer les exposants…), donc vous ne risquez pas grand-chose à vous dire, chiche, j'y vais.
Et puis, c'est promis, pas de corvée de repas le jour J, il paraît que le chef est au top. Je suis sûr maintenant que vous ne résistez plus, rejoignez-nous !

Sommaire

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Groupe Rallye

Les épreuves du Rallye se sont donc déroulées normalement le 12 mars. Ce sont 308 classes dans 44 collèges et 12 lycées qui ont concouru, soit près de 8000 élèves.

Malgré la baisse du nombre de classes (-64), particulièrement en 3^{e} et en 2nde, nous avons été submergés par les dossiers ! Les créations de jeux mathématiques par les 6^{e} et 5^{e} ont occasionné des envois volumineux malgré les consignes. Nous les avons acceptées — il est inconcevable que nous ne prenions pas en compte le travail des élèves — mais nous en tiendrons compte dans le barème pour ne pas pénaliser ceux qui se sont imposé de respecter les consignes d'envoi.

Les équipes se sont donc lancées dans les corrections. Le palmarès sera envoyé fin avril - début mai pour la remise des prix qui aura lieu le 5 juin à Poitiers.

Comme l'année dernière, des lots individuels « surprises », en lien avec les mathématiques, seront offerts aux élèves des classes lauréates.

Il n'y aura toujours pas de classement général, mais l'attribution de flocons (de 1 à 5) en fonction des résultats des classes. Les coordonnateurs recevront en temps voulu tous les documents (palmarès, flocons, diplômes) et les informations concernant la remise des prix.

Le prochain Corol'aire rendra compte des résultats et des réalisations des classes.

Compte-rendu du comité du 6 mars 2019

Journée de la Régionale
Contact est pris avec le lycée Charles-Coulomb d'Angoulême qui a accepté d'accueillir la Régionale le mercredi 9 octobre 2019. Comme d'habitude, pour les actifs, il faudra une double inscription au PAF et auprès de la Régionale. Cyrille Kirch gérera cette seconde partie.
Nous décidons de contacter l'IEN de Charente Jean-Marc Lapègue afin de construire les interventions dédiées aux professeurs des écoles.
Pour ce qui concerne les ateliers, nous décidons de consulter les collègues via le lien :
http://limesurvey.lycee-alienor.fr/index.php/557689/lang-fr

Organisation de la Régionale
L'association se trouve dans une situation délicate : la démission de Sébastien Dassule-Debertonne a révélé la fragilité de notre équilibre. Les personnes « actives » impliquées à l'APMEP sont déjà très impliquées ailleurs.
Les conséquences de la mise en place de la réforme du lycée n'ont pas été mesurées. Dans ces conditions, Nicolas Minet ne souhaite pas prendre en charge l'organisation des Journées Nationales de 2021.
Le problème de la charge du président est évoqué : il est souhaitable que l'organisation des activités de l'association soient entièrement déléguée : rallye, journée de la régionale, expo....
Nous procédons alors à l'élection d'un nouveau bureau :
Président : Frédéric de Ligt
Vice-président.es : Corinne Parcelier, Philippe Rogeon
Secrétaire : Pierre-Jean Robin
Trésorier : Jean-Marie Parnaudeau
Trésorier adjoint : Jacques Germain

Il faut cependant trouver un.e responsable pour la coordination des journées nationales.
Face au manque de forces vives, afin de ne pas remettre en cause les Journées Nationales, nous décidons :
· d'alléger le rallye maths 2019-2020 :
· de ne pas organiser la journée de la Régionale en 2020 et 2021.
Les Journées Nationales sont maintenues sous réserve de trouver un.e coordinateur.trice.

Rallye mathématique
Voir le compte rendu en page 3.

Journées Nationales
Une réunion spécifique à ce propos s'est tenue le 27 mars. Les lignes ci-dessous sont le bilan de cette réunion.
Frédéric de Ligt a pris des contact pour organiser les Journées Nationales à Jonzac. Cela fait suite aux constats du 6 mars sur les forces vives de la Régionales. Le comité a acté cette décision.

Le travail est lancé pour les supports de communication (en particulier l'affiche).

De même, le travail de recherche des conférenciers est lancé, par le biais du comité scientifique.

JOURNÉES NATIONALES

2021

JONZAC

Où se cachent les mathématiques ?

Histoire d'algorithmes

Thierry Chevalarias, Frédéric De Ligt, Jean-Paul Guichard , IREM de Poitiers

Épisode 6 : L'algorithmique en Chine ancienne

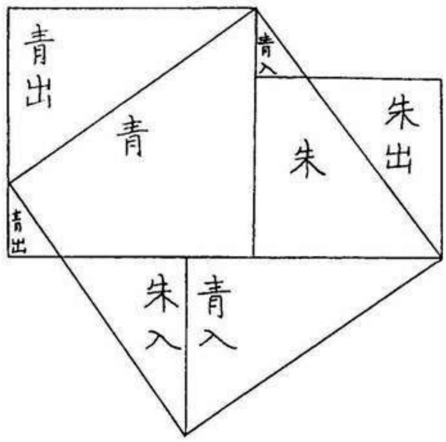
Voici quelques exemples de problèmes tirés des *Neufs Chapitres* dont le nom complet est *Les Neufs Chapitres sur les procédures mathématiques*. De façon anachronique nous pourrions dire : *Les Neufs Chapitres sur les algorithmes mathématiques*. Tous les problèmes des *Neufs Chapitres* concernent des grandeurs. Leur présentation est standardisée sous la forme : énoncé, réponse, procédure. L'énoncé commence toujours par : *supposons que* ; ce qui montre que l'on pourrait avoir d'autres données numériques et donc que le problème a un caractère de généralité. Les procédures sont parfois instanciées, parfois partiellement instanciées, parfois générales ne faisant aucune références aux données du problème. Comme nous l'avons dit en introduction, on trouve des démonstrations de ces procédures dans les écrits des commentateurs, ainsi que des indices de leur mise en œuvre

1) Longueur et triangle rectangle : hypoténuse (IX.1 Base (gou) et hauteur (gu))

On pourra comparer avec le même problème vu chez Héron d'Alexandrie (I. 2).

> Supposons que la base soit de 3 chi et la hauteur de 4 chi. On demande combien fait l'hypoténuse.
>
> **Réponse :** 5 chi.
>
> **Procédure :** base et hauteur étant chacune multipliée par elle-même, on somme (les résultats) et on divise ceci par extraction de la racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse.

Commentaire de Liu Hui



« La base multipliée par elle-même fait un carré rouge, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui rentre se compense l'un l'autre, que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, du fait que l'on garde ceux qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse. »

La figure de départ est le triangle rectangle *vertical*. A vous de colorier les deux carrés, et de repérer les pièces des carrés rouge et bleu qui restent et celles qui sortent pour entrer, par translation, dans la surface du carré de l'hypoténuse.

2) Longueurs et triangle rectangle : équation (IX.6 Base (gou) et hauteur (gu))

> Supposons que l'on ait un étang carré de 1 zhang de côté, au centre duquel pousse un roseau qui dépasse de 1 chi de l'eau. Quand on tire le roseau vers la rive, il arrive juste au bord. On demande combien valent respectivement la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.
>
> **Réponse :** la profondeur de l'eau vaut 1 zhang 2 chi, la longueur du roseau 1 zhang 3 chi.
>
> **Procédure :** *la moitié du côté de l'étang carré étant multipliée par elle-même, on en soustrait ce qui dépasse de l'eau, 1 chi, multiplié par lui-même. On divise le reste par le double de ce qui dépasse de l'eau, ce qui donne comme résultat la profondeur de l'eau. En ajoutant la quantité qui dépasse de l'eau, on obtient la longueur du roseau.*

Indications sur les unités de longueur en Chine : 1 zhang = 10 chi, 1 chi = 10 cun.

3) Aire d'un rectangle : produit de fractions (I.19 Champ rectangulaire)

> Supposons qu'on ait un champ de 4/7 de bu de largeur et de 3/5 de bu de longueur. On demande combien fait le champ.

Réponse : 12/35 de bu.

Procédure : *les dénominateurs multipliés l'un par l'autre font le diviseur ; les numérateurs multipliés l'un par l'autre font le dividende. On effectue la division du dividende par le diviseur.*

4) Fraction d'un volume : proportionnalité (II.1 Petit mil et grains décortiqués)

Supposons qu'on ait un dou de petit mil. Si on veut en faire du grain grossièrement décortiqué, on demande combien on en obtient.

Réponse : cela fait 6 sheng de grain grossièrement décortiqué.

Procédure : *si ayant du petit mil, on cherche du grain grossièrement décortiqué, on multiplie ceci par 3, et on divise par 5.*

Indications sur les unités de contenance en Chine : 1 dou = 10 sheng.

5) Partage équitable de prix : proportionnalité (III. 3 Parts pondérées en fonction des degrés)

Supposons qu'alors que Jia possède 560 sapèques, Yi 350 sapèques et Bing 180 sapèques, les trois personnes, passant ensemble une douane, paient en tout une taxe douanière de 100 sapèques. Si elles veulent payer en pondérant en fonction des quantités (SHU) de sapèques, on demande combien chacune.

Réponse : Jia paie 51 sapèques 41/109 de sapèque ; Yi paie 32 sapèques 12/109 sapèque ; Bing paie 16 sapèques 56/109 de sapèque.

Procédure : *on place respectivement les quantités (Shu) de sapèques pour faire la rangée des coefficients de la pondération en fonction des degrés. Et on somme en auxiliaire, ce qui fait le diviseur. On multiplie par les 100 sapèques les coefficients que l'on avait avant qu'ils ne soient sommés, ce qui fait respectivement les dividendes. Effectuer les divisions des dividendes par le diviseur donne les résultats en sapèques.*

Les analyses de Karine Chemla pour la Chine font voir aussi que la recherche de procédures très générales et la démonstration de la validité des algorithmes [*Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes*], ne sont pas que des préoccupations de l'algorithmique actuelle.

Références

CHEMLA Karine, Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes, dans *La mathématique, I Les lieux et les temps*, dir. Claudio Bartocci et Piergiorgio Odifreddi, CNRS Editions, 2009.

CHEMLA Karine, GUO Shuchun, *Les neuf chapitres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, Paris, 2005.

En guise de conclusion

Les exemples que nous avons pris dans trois civilisations anciennes (Égypte, Grèce, Chine) montrent l'importance qu'y occupait la pensée algorithmique dans le corpus mathématique. Cet éclairage historique sur le traitement algorithmique des mathématiques, peut nous amener à envisager que la pensée algorithmique, omniprésente dans le monde d'aujourd'hui, pourrait avoir une plus grande place dans le traitement des problèmes et techniques mathématiques que nous enseignons.

Semaine nationale des Mathématiques

Jean Fromentin

Une école au top !

Alors que la tension monte dans les collèges et les lycées participant au Rallye Mathématique de Poitou-Charentes, l'exposition Comment tu comptes de notre Régionale est demandée par l'école Louis Aragon de Niort, la plus importante école du secteur de mon ex-collège ! L'école se prépare à faire, de la Semaine Nationale des mathématiques, un événement exceptionnel.

Chargé de transporter et de présenter le matériel de la Régionale, c'est avec plaisir que je retrouve l'ambiance des liaisons « École – Collège » de mon temps.

Monsieur Séguelas, directeur de l'école, me fait découvrir l'organisation de la semaine : deux ateliers par jour et par élève (des ateliers tournants), un « Café des parents » avec une rencontre autour des jeux, une conférence : « Histoire des nombres » pour les CM2, et bien sûr l'exposition prêtée par la Régionale augmentée du matériel de l'expo Cube et des puzzles classiques d'une exposition que j'avais réalisée au collège, au temps des PAE (Projets d'Actions Éducatives).

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
8h35	Classe	Classe	Classe	Classe	Classe
M1 9h	Ateliers - SDM 19 Rotation n°1	Ateliers - SDM 19 Rotation n°3	Rencontre jeux 9h - 10h	Ateliers - SDM 19 Rotation n°5	Ateliers - SDM 19 Rotation n°7
R 10h			Récréation 10h		
M2 10h15	Classe	Classe	Défi maths 11h15 - 11h45	Classe	Classe
S1 13h35	Classe	Classe		Classe	Classe ou conférence CM2
R 14h50					
S2 15h	Ateliers - SDM 19 Rotation n°2	Ateliers - SDM 19 Rotation n°4		Ateliers - SDM 19 Rotation n°6	Ateliers - SDM 19 Rotation n°8

C'est donc une semaine intense en mathématiques qui s'annonce pour les écoliers.

Lundi 11 mars, en compagnie de Monsieur Gay, Inspecteur chargé des mathématiques, et de moi-même, Monsieur Séguelas lance cette Semaine Nationale des Mathématiques devant tous les élèves du cycle 3 rassemblés sous le préau fermé avec les enseignants et les accompagnants.

L’exposition *Comment tu comptes*

Les panneaux choisis (certains sont d’un niveau trop élevé pour des écoliers) sont accrochés en permanence sous le préau. Le matériel correspondant sera proposé « sous surveillance » dans le cadre des ateliers.

Les ateliers

En cycle 1, quatre ateliers : Arts visuels, EPS, Arts culinaires et Jeux. Pour les arts culinaires, une fois la pâte faite, les élèves feront des carrés, des triangles, des ronds et des étoiles à l’emporte pièce.


Arts visuels et mathématiques

EPS et mathématiques


Arts culinaires et mathématiques


Jeux et mathématiques

En cycle 2, huit ateliers : Tice (ordinateurs), Tice (tablettes), Arts visuels, EPS, Escape game, Rallye, Espace et Tangram.

En cycle 3, huit ateliers : Tice (ordinateurs), Tice (tablettes), Arts visuels, EPS, Escape game, Anglais, Codage et Jeux.

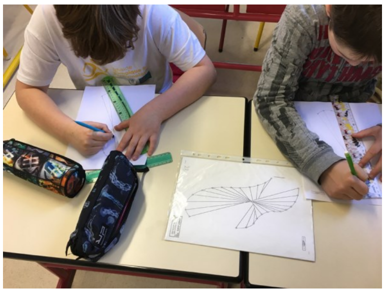
Tice et mathématiques (tablettes)

Tice et mathématiques (ordinateurs)

Jeux et mathématiques

Sur la photo ci-dessus, M. Gay, IEN chargé des mathématiques, à gauche et M. Séguelas, directeur de l'école, à droite, félicitent deux élèves pour leur réussite.

Tangram et mathématiques



Codage et mathématiques

Anglais et mathématiques

Un temps fort

Mercredi 13 mars, le préau est rempli de tables ! Une « rencontre Jeux » est organisée pour l'ensemble des élèves des cycles 2 et 3.

Le cycle 3 ouvre les festivités à 9 h avec une gigantesque bataille navale. Les élèves, deux par deux et face à face, tentent de découvrir les emplacements des trois bateaux de leur adversaire. Ce ne sont pas les canons qui sont assourdissants mais les ordres lancés pour atteindre les A3, B2 ou C5 !

Une bataille navale au cycle 3

Deux bateaux de 3 cases et un de 2 cases à détecter !

Les élèves du cycle 2 prennent le relai à 10 h 45. C'est un loto, là aussi gigantesque ! Pas tout à fait un loto mathématique où le nombre 15 serait annoncé par 3 x 5 ou 8 + 7 ; l'animateur doit passer par 3 et 5 pour les plus petits après avoir annoncé 35.

Un loto au cycle 2

Toujours pas de ligne remplie !

Art et mathématiques

Je ne terminerai pas ce reportage sans présenter les deux œuvres collectives ci-dessous ; c'est BEAU !

Je crois que les élèves se souviendront longtemps de cette semaine d'activités mathématiques.

Ru – Bri – COL∟AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

À partir du numéro 56 de Corol'aire*, il y a une quinzaine d'années, Serge Parpay m'a confié la poursuite de cette rubrique. Depuis il a été proposé aux lecteurs plus de 200 problèmes, 221 pour être précis si l'on excepte ceux parus dans la dernière livraison, et la plupart ont trouvé une voire plusieurs solutions. Mais, un peu comme un certain village peuplé d'irréductibles gaulois, certains énoncés résistent encore et toujours. Ils sont une dizaine tout au plus mais sont comme un caillou dans la chaussure. Or la majorité d'entre eux proviennent d'un unique auteur :* ***Jean-Christophe Laugier*** *de Rochefort. Aussi je voudrais faire une dernière tentative pour vous les proposer. Qui relèvera le défi de résoudre au moins l'un d'entre eux ?*

Des problèmes

56-2

1) Soient a, b et c des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$; montrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{41}{42}$.

2) D'une manière plus générale, soient a_1, a_2, …, a_n des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<1$; montrer que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\ldots+\frac{1}{e_n}$, (e_n) étant une suite d'entiers définie par $e_1 = 2$ et $e_{n+1}=e_1+e_2+\ldots+e_n$ pour $n\geq 1$.

74-1

<u>Points sur un demi-cercle</u>

1) Quelle est la probabilité que trois points placés au hasard sur un cercle unité soient situés sur un même demi-cercle de ce cercle ?

2) Plus généralement quelle est la probabilité que n points placés au hasard sur un cercle unité soient situés sur un même arc de mesure α $(0\leq\alpha\leq 2\pi)$ de ce cercle ?

3) Passons à la dimension supérieure. Quelle est la probabilité que 4 points placés au hasard sur une sphère unité soient situés sur un même polygone sphérique convexe de mesure β $(0\leq\beta\leq 4\pi)$ de cette sphère ?

103-4

Etant donné un entier naturel n, on note $f(n)$ le nombre obtenu en déplaçant le premier chiffre de l'écriture décimale de n à la fin. Par exemple, $f(3458)=4583$. Déterminer tous les entiers tels que :

1) n divise $f(n)$;

2) $f(n)$ divise n.

110-4
On attribue une couleur à chaque arête de K_n (le graphe complet à n sommets, pour n entier au moins égal à 3). Combien de couleurs au minimum doit-on utiliser pour être assuré de l'existence d'un triangle dont les trois arêtes soient de couleurs différentes ?

111-3
Soit a, b des entiers tels que $0 < a < b$; dénombrer les suites finies d'entiers naturels u_1, u_2, ..., u_n de longueur n ($n \geq 3$), strictement croissantes et vérifiant :

$$u_1 = a,\ u_2 = b,\ u_i \leq u_{i-1} + u_{i-2} \text{ pour tout } i \text{ tel que } 3 \leq i \leq n.$$

113-2
Les joueurs A et B posent à tour de rôle une pièce de 1 euro sur une table circulaire. A joue en premier. Une pièce placée ne peut chevaucher une pièce déjà placée et doit reposer entièrement sur la table. Toute pièce placée ne peut ensuite être déplacée. Le dernier joueur à pouvoir placer une pièce est le gagnant. Y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

Des solutions

114-3 *de Jean-Paul Mercier* :

Connaître deux nombres rationnels dont la somme est égale au produit.

Solution de Louis Bailly
N.d.l.r. Louis Bailly revient sur cet énoncé dont une solution a déjà été donnée dans le numéro précédent pour l'étendre jusqu'aux nombres complexes.

1) Soient b et c deux nombres non nuls :

$$S = \frac{b+c}{b} + \frac{b+c}{c} = \frac{c(b+c)+b(b+c)}{bc} = \frac{b^2+c^2+2bc}{bc} = \frac{(b+c)^2}{bc},$$

$$P = \frac{b+c}{b} \times \frac{b+c}{c} = \frac{(b+c)^2}{bc}.$$

Donc $S = P$.
2) Réciproquement, soient x et y non nuls tels que $x+y=xy$ (1). On a donc que $x \neq 1$ et on peut alors écrire $x = 1+\frac{c}{b} = \frac{b+c}{b}$ avec $bc \neq 0$. L'égalité (1) prend la forme $\frac{b+c}{b}y = \frac{b+c}{b} + y$ puis en isolant y dans cette dernière égalité on obtient : $y = \frac{b+c}{c}$.
En conclusion, l'ensemble des couples de nombres non nuls dont la somme est égale au produit est l'ensemble des couples $(\frac{b+c}{b}, \frac{b+c}{c})$ avec b et c réels ou complexes non nuls.

115-1 *de Jacques Chayé :*
D'une théière cylindrique et d'une théière sphérique de même volume, quelle est celle dont la surface extérieure est la plus petite (donc susceptible de mieux conserver la chaleur) ?

Solution de l'auteur

Considérons un cylindre de volume V donné, de hauteur h et de rayon r à la base. On a $V=\pi r^2 h$.

Soit A_1 l'aire de la surface extérieure de ce cylindre (comprenant la surface latérale, celle de la base et celle du couvercle) :

$$A_1 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = f(r).$$

Dérivons :

$$f'(r) = \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2V+4\pi r^3}{r^2}.$$

La dérivée s'annule et change de signe pour $2V = 4\pi r^3$ c'est-à-dire $2\pi r^2 h = 4\pi r^3$ soit $h = 2r$.

Vu le sens de variation de la fonction cube, la fonction f passe par un minimum pour $h=2r$.

Donc, un cylindre de volume donné a une aire extérieure totale minimale quand sa hauteur est égale à son diamètre de base. Dans ce cas son aire vérifie :

$$A_1 = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \text{ alors que } V = 2\pi r^3.$$

Considérons maintenant une sphère de rayon R et de même volume V. Son aire est $A_2 = 4\pi R^2$. On a :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi r^3 \text{ donc } r = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} R.$$

Par suite :

$$A_1 = 6\pi r^2 = 6\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} R^2 = 4\pi R^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}} A_2 \approx 1{,}145 A_2.$$

<u>Conclusion pratique</u> : une théière, assimilée à une sphère, présente une surface extérieure moins importante qu'une théière de forme cylindrique de même volume.

115-3 *de Frédéric de Ligt* :

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux inégalités :

$f(x) \geq x+1$ et $f(x+y) \geq f(x).f(y)$.

Solution de Pierre et Jean-Matthieu Bernat

1. On a $f(0) \geq 1$ et $f(0) \geq f(0)^2$ d'où $f(0) \leq 1$ par suite $f(0) = 1$.
2. D'autre part $f(x) \geq f(x/2)^2 \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. f est croissante, en effet soit $h > 0$ alors
$$f(x+h) - f(x) \geq f(x)f(h) - f(x) = f(x)(f(h)-1) \geq hf(x) \geq 0.$$
4. f est continue. Soit x, $h \in$ P, $|h| \leq 1$ alors $f(x+h) - f(x) \geq hf(x)$ (*) et on a aussi :
$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = f(x+h) - f(x+h-h) &\leq f(x+h) - f(x+h)f(-h) \\ &\leq f(x+h)(1-f(-h)) \\ &\leq h\, f(x+h) \quad (**) \\ &\leq hf(x+1) \end{aligned}$$
Ainsi $hf(x) \leq f(x+h) - f(x) \leq hf(x+1)$.
On en déduit facilement que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$ ainsi f est continue.
5. Enfin f est dérivable et $f' = f$ ce qui permet de conclure : la seule solution est $f(x) = \exp(x)$.
Pour $h > 0$ on a par (*) et (**) : $f(x+h) \geq (f(x+h) - f(x))/h \geq f(x)$.
Par suite $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (f(x+h) - f(x))/h = f(x)$.
Pour $h < 0$, on obtient $f(x+h) \leq (f(x+h) - f(x))/h \leq f(x)$ ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} (f(x+h) - f(x))/h = f(x)$.

Nicolas Minet

Manifeste pour des programmes de mathématiques de seconde enfin reliés à la "vraie vie"

Les 2/3 des lycéens français suivront à la rentrée 2019 les programme de mathématiques de seconde générale et technologique dont le projet est paru en octobre 2018. Toute la société a droit aux réponses à ces interrogations, déclinables pour toutes les disciplines :

- Comment éviter la déconnexion entre les questions de société et des programmes qui peuvent sembler insensés (c'est-à-dire sans aucun sens) hormis pour un expert ?
- Quel est le projet de formation pour un élève en fin de scolarité obligatoire ?
- Quelles sont les questions du monde où les mathématiques sont irremplaçables, éclairent notre vision des choses, et peuvent redonner une légitimité à l'enseignement de cette discipline ?

Soyons clairs : il ne s'agit pas ici de vendre une vision de l'utilité des mathématiques, du style "les pourcentages servent tous les jours". L'essence des mathématiques, ce sont les objets abstraits. Encore faut-il savoir pourquoi les hommes les ont créés et en créent encore. C'est l'enjeu.

À quoi servent les mathématiques ? Deux questions en une

Cette interrogation fréquente est en fait double : primo, *à quoi servent objectivement les mathématiques ?*, secundo, *à quoi cela sert-il de les enseigner, et à qui ?*

Réponses faciles à la première : sans les maths, notre monde serait différent. Mieux ou pire, allez savoir. Mais différent. D'abord, nous n'aurions pas ces objets techniques : GPS, ordinateurs, satellites, etc. Plus étonnant, voici des œuvres qu'on associe volontiers à un cadre artistique mais pas scientifique :

- pianos ou guitares basés sur des gammes qui sont définies avec des nombres ;
- mosaïques de l'Alhambra de Grenade, exemples esthétiques de pavages ;
- Parthénon d'Athènes ou Burj Khalifa de Dubaï, reposant sur la géométrie, qui sert à mesurer et construire ;
- tableaux de Raphaël, basés sur les règles de la perspective.

Enfin, Pythagore, Galilée et Wigner nous ont crié que les mathématiques nous parlent :

- du monde physique : quelle sera la date de la prochaine éclipse de lune ? Quelle température fera-t-il demain à l'ambassade d'Istanbul ?...
- du monde des hommes : combien serons-nous en 2050 ? Quelles sont nos chances de gagner aux jeux de la FdJ ? Combien vaut le seuil de pauvreté en France ?

Le bon sens voudrait qu'on réponde à la seconde question comme à la première : enseignons au niveau où c'est possible les mathématiques utiles pour comprendre les sujets cités ci-dessus, en lien avec d'autres matières (histoire-géo, Physique, SES,...). Notons que les programmes de maths-sciences du bac pro sont un peu rédigés en ce sens.

Entre la société et les programmes de mathématiques, un vide étanche

Depuis des décennies, les programmes de mathématiques du secondaire en France ont brisé les liens interdisciplinaires. Pourtant, les actuels programmes (2009) avaient l'intention de " conforter l'acquisition par l'élève d'une culture mathématique nécessaire à la vie en en société et à la compréhension du monde". **Or les liens entre mathématiques et "vraie vie" se résument à des phrases fourre-tout** telles « Les situations proposées dans [des fonctions] sont issues de [...] biologie, économie, physique, actualité etc. » . Aux professeurs de débusquer avec talent ces situations.

Pour 2019, les projets perpétuent une tradition : transmettre des objets culturels pour amoureux des maths. Or, qui sait pourquoi on étudie une fonction paire ? Le déterminant de deux vecteurs ? Un tableau de signes ? Les professeurs ne seront pas forcément très à l'aise pour répondre... Pourquoi un tel écart entre la vraie vie et les programmes ?

Le triple écueil des programmes scolaires : arrogance, croyance, déviance.

La mathématique est parfois une discipline de sélection ou élément de reproduction d'une élite scolaire. C'est l'arrogance. En l'an 2000, voici l'ouverture des programmes : "L'utilité et la pérennité des mathématiques n'est pas à prouver." Il fallait oser.

Elle forme l'esprit, dit-on. C'est la croyance. Bien sûr qu'elle forme au raisonnement scientifique, mais en quoi résoudre des équations fera-t-il de vous un citoyen plus rationnel ? Est-ce la même logique ?

Elle perd son sens quand elle justifie sa place par sa beauté ou son inutilité. C'est la déviance. Allez expliquer à 35 élèves qu'ils sont là pour comprendre la beauté de l'art mathématique. Comme leur enseigner le solfège sans jamais leur faire écouter de musique.

Le projet pour 2019 mise sur l'abstraction et les techniques gratuites pour réussir le pari de l'affectif, en voulant permettre ainsi à l'élève de "développer son goût des mathématiques », « d'en apprécier les démarches ». Termes subjectifs, qu'on contredit aussitôt : parions que ce goût ne se développera pas s'il n'était pas déjà présent !

Pourquoi retrouve-t-au lycée des contenus enseignés auparavant au collège ?

Depuis 20 ans, bien des notions ont glissé de la 3ème vers la seconde. Les nouvelles structures du collège et la disparition des horaires "plancher" ont contribué à une baisse du temps d'enseignement. Du coup, en "refusant la baisse de niveau", l'inflation des contenus au lycée était prévisible, et avec elle la mise à l'écart de la partie du public scolaire qui ne maîtrise pas les attendus de fin de cycle 4 et qui fera peu de sciences dans ses études ou sa vie professionnelle.

Programmes excessifs et inadaptés à une seconde indifférenciée … Que faire ?

Résumons : tout programme scolaire devrait justifier son contenu. Si une notion donnée n'a pas clairement une raison d'être, alors il faut l'éliminer sans scrupule du programme !

Quant au défi de l'hétérogénéité, pourquoi pas un programme différencié avec une base (un socle commun ?) pour tous les élèves et, sur les mêmes sujets, des approfondissements pour ceux envisageant la spécialité de première générale ?

La critique est facile. Mais aligner des techniques mathématiques l'était aussi

Un pari dangereux se joue : celui du rejet ou de l'acceptation des mathématiques. Concevoir un programme scolaire reliant les contenus choisis aux questions de la société ayant un caractère scientifique est un travail exigeant qui reste à faire. Peut-être n'est-il pas possible de rédiger des programmes en phase avec une société qui n'a pas de projet collectif clair. Mais peut-être ce projet collectif pourrait-il émerger des programmes scolaires.

Dans ce manifeste, « vraie vie » recouvre les informations et savoirs rencontrés par les Hommes dans leur monde professionnel, leurs activités personnelles, ou les médias.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06.09.99.30.82

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication F. de Ligt
Comité de rédaction F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne, J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.
Imprimerie IREM de Poitiers. Adresse ci-dessus.
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège Social Voir adresse ci-dessus
Dépôt légal Mars 2019