Ru – Bri – COL AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

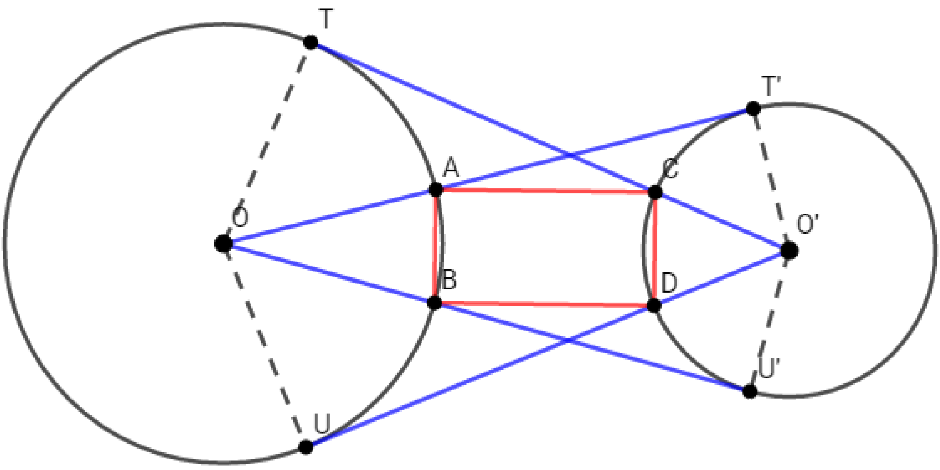
Des problèmes

115-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

D'une théière cylindrique et d'une théière sphérique de même volume, quelle est celle dont la surface extérieure est la plus petite (donc susceptible de mieux conserver la chaleur) ?

115-2 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Soient deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, extérieurs l'un à l'autre, de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R'.
Du point O', on mène les tangentes (O'T) et (O'U) au cercle $\mathcal{C}_1$. Du point O, on mène les tangentes (OT') et (OU') au cercle $\mathcal{C}_2$. Les droites (OT') et (OU') coupent $\mathcal{C}_1$ en A et B respectivement. Les droites (O'T) et (O'U) coupent $\mathcal{C}_2$ en C et D respectivement.
Montrer que le quadrilatère ABDC est un rectangle.



115-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

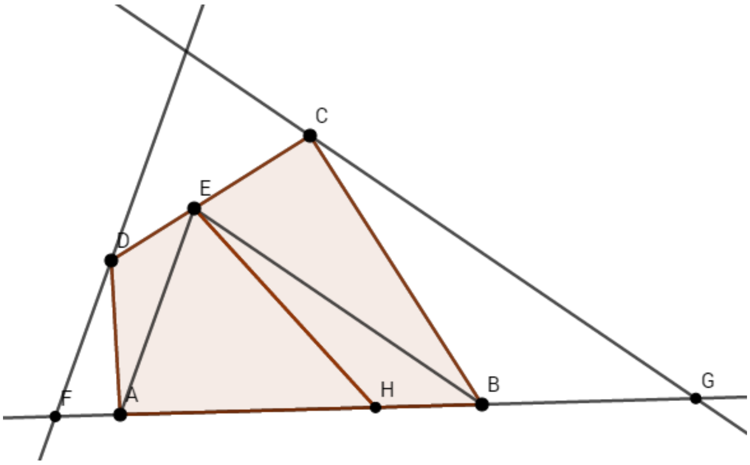
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant les deux inégalités :

$$f(x) \geq x+1, \quad et \quad f(x+y) \geq f(x).f(y).$$

115-4 *proposé par Dominique Gaud (Migné-Auxances)* :

Partage d'un quadrilatère convexe en deux parties de même aire

On prend E sur le côté [CD]. On mène la parallèle à (EA) passant par D qui coupe (AB) en F et la parallèle à (EB) passant par C qui coupe (AB) en G. H est alors le milieu de [FG]. Le segment [EH] partage le quadrilatère ABCD en deux parties de même aire.



Y a-t-il des restrictions sur la position du point E sur [CD] et/ou sur les angles du quadrilatère convexe ?

Justifier alors l'exactitude de cette construction.

Des solutions

108-3 *de Jean-Christophe Laugier* :

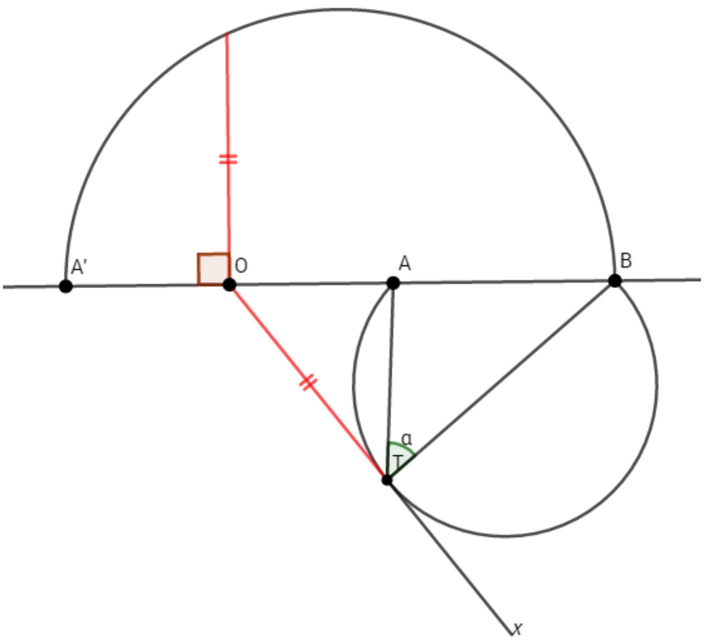
En quel point de $[Ox)$ doit se placer le tireur T pour voir le but $[AB]$ sous un angle $\widehat{ATB}$ maximal ?

Solution de Frédéric de Ligt

L'ensemble des points M d'où l'on voit le segment [AB] sous un angle α est un arc de cercle d'extrémités A et B. Le rayon de cet arc est d'autant plus petit que l'angle α est grand. Pour obtenir un angle α maximum il faut trouver le plus petit arc de cercle d'extrémités A et B coupant la demi-droite [Ox). Il s'agit de l'arc de cercle tangent à [Ox) d'extrémités A et B. Si on note T le point de contact entre cet arc de cercle et la demi-droite [Ox), T est alors le point cherché.

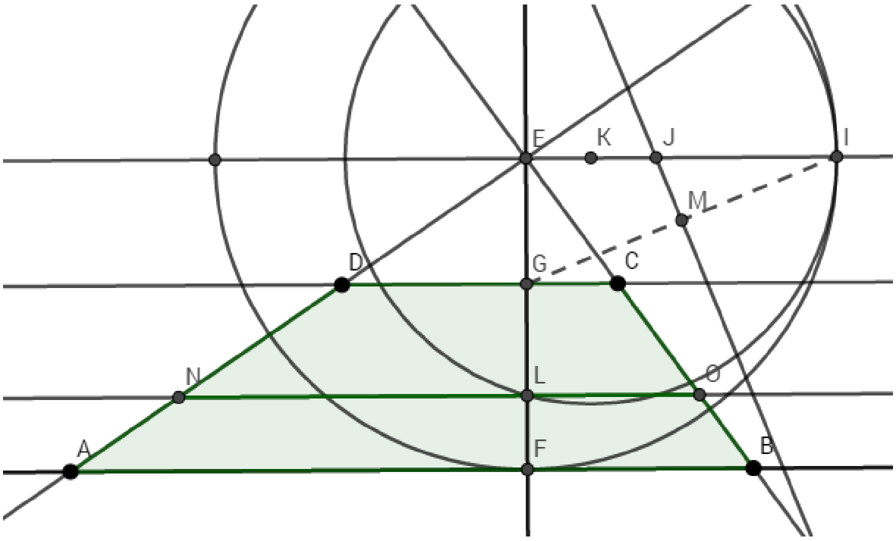
On sait depuis Euclide qu'alors $OT^2 = OA.OB$ et donc que OT est la moyenne géométrique des longueurs OA et OB.

D'où une construction possible de ce point T.



112-2 *proposé par Dominique Gaud* :

Voici une méthode pour partager un trapèze en deux parties égales.
ABCD est un trapèze dont les côtés non parallèles se coupent en E. Le cercle de centre E et de rayon EF (F pied de la hauteur du triangle ABE issue du sommet E) coupe la parallèle à (AB) passant par E en I. On note G l'intersection de la hauteur [EF] avec la droite (CD). La médiatrice de [GI] coupe la droite (EI) en J. On note K le milieu de [EJ]. Le cercle de centre K et de rayon KI coupe [EF] en L. On trace la parallèle aux bases passant par L et on a deux trapèzes de même aire. Pourquoi ?



Solution de Frédéric de Ligt

On prouve tout d'abord que la construction proposée entraîne que EL est la moyenne quadratique de EF et EG.
On note M le milieu de [GI]. Les triangles rectangles EGI et MJI sont semblables ; aux côtés [EI], [GI] et [EG] correspondent respectivement [MI], [JI] et [MJ].
On observe que EI = EF et que MI = $\frac{1}{2}\text{GI} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{EG}^2+\text{EI}^2}$ d'où une expression du coefficient de réduction :

$$\frac{\sqrt{\text{EG}^2+\text{EF}^2}}{2\text{EF}}.$$

Par conséquent

$$\text{JI} = \frac{\sqrt{\text{EG}^2+\text{EF}^2}}{2\text{EF}}\text{GI} = \frac{\text{EG}^2+\text{EF}^2}{2\text{EF}}.$$

On a donc :

$$\text{EL}^2=\text{KL}^2\text{-EK}^2=\text{KI}^2\text{-EK}^2=(\frac{\text{EF-JI}}{2}+\text{JI})^2\text{-}(\frac{\text{EF-JI}}{2})^2 = (\text{EF-JI})\times\text{JI}+\text{JI}^2=\text{EF}\times\text{JI}=\frac{\text{EG}^2+\text{EF}^2}{2}.$$

On a montré que EL est la moyenne quadratique de EF et EG.

On montre maintenant que pour obtenir un partage de ABCD en deux trapèzes de même aire la parallèle cherchée doit passer par le point L.
On suppose que la droite (NO) est parallèle aux bases [AB] et [DC] et partage ABCD en deux trapèzes NOCD et ABON dont les aires sont égales. Le point L est défini comme l'intersection de (NO) avec (EF).

On a l'égalité

$$(DC + NO) \times GL = (NO + AB) \times LF,$$

d'où

$$\frac{GL}{LF}=\frac{NO+AB}{DC+NO}.$$

D'après la propriété de Thalès on a les égalités : $\frac{DC}{NO}=\frac{EG}{EL}$ (1) ; $\frac{NO}{AB}=\frac{EL}{EF}$ (2) ; $\frac{DC}{AB}=\frac{EG}{EF}$ (3).

On tire de (2) et (3) que

$$\frac{DC+NO}{AB}=\frac{EL+EG}{EF},$$

et de (1) et (3) que

$$\frac{NO+AB}{DC}=\frac{EF+EL}{EG}.$$

On peut donc écrire que

$$\frac{GL}{LF}=\frac{(EF+EL)\times DC}{EG}\times\frac{EF}{AB\times(EL+EG)},$$

mais comme d'après (3) on a

$$\frac{DC}{EG}\times\frac{EF}{AB}=1,$$

on simplifie cette égalité en

$$\frac{GL}{LF}=\frac{EF+EL}{EL+EG}.$$

Par ailleurs GL = EL – EG et LF = EF – EL et donc

$$\frac{GL}{LF}=\frac{EL-EG}{EF-EL}.$$

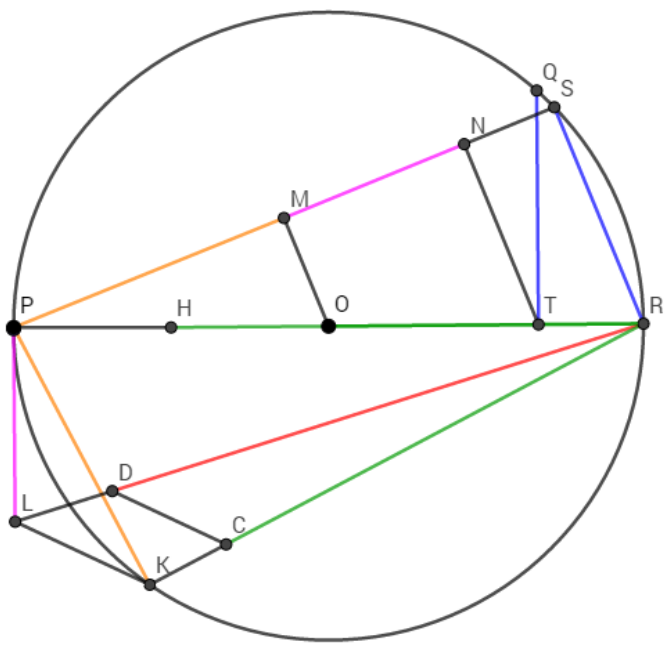
Finalement on parvient à

$$\frac{EF+EL}{EL+EG}=\frac{EL-EG}{EF-EL},$$

et on a bien que

$$EL^2=\frac{EG^2+EF^2}{2}.$$

113-1 *proposé par Srinivasa Ramanujan* :



- Le cercle $\mathcal{X}$ a pour rayon r et pour centre O.
- [PR] est un de ses diamètres.
- H est le milieu du segment [PO].
- T est le point du segment [OR] tel que TR = OR/3.
- La perpendiculaire à [PR] en T coupe le cercle $\mathcal{X}$ en deux points et on note Q l'un de ces deux points.
- On place sur le demi-cercle contenant le point Q le point S tel que QT = RS.
- On place sur le segment [PS] les points M et N tels que les droites (RS), (TN) et (OM) soient parallèles.
- On place sur le demi-cercle ne contenant pas Q le point K tel que PK = PM.
- On trace la demi-droite d'origine P et perpendiculaire au diamètre [PR] dans le demi-plan limité par (PR) et ne contenant pas Q.
- On place sur cette demi-droite le point L tel que PL = MN.
- On trace les segments [RL], [RK] et [KL].
- On place sur le segment [RK] le point C tel que RC = RH.
- On place sur le segment [RL] le point D tel que les droites (CD) et (KL) soient parallèles.

Montrer que le carré de côté [RD] a alors une aire égale à $\frac{355}{113}r^2$.

Solution de l'auteur

$$RS^2 = \frac{5}{36}d^2 \ ,$$

où d est le diamètre du cercle. Par conséquent

$$PS^2 = \frac{31}{36}d^2 .$$

Mais PL et PK sont égaux à MN et PM respectivement. C'est pourquoi

$$PK^2 = \frac{31}{144}d^2 \text{ et } PL^2 = \frac{31}{324}d^2 .$$

Donc

$$RK^2 = PR^2 - PK^2 = \frac{113}{144}d^2 ,$$

et

$$RL^2 = PR^2 + PL^2 = \frac{355}{324}d^2 .$$

Mais

$$\frac{\mathrm{RK}}{\mathrm{RL}}=\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{RD}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}}$$

et

$$\mathrm{RC}=\frac{3}{4}\mathrm{d}\,.$$

D'où

$$\mathrm{RD}=\frac{\mathrm{d}}{2}\sqrt{\frac{355}{113}}\approx\frac{\mathrm{d}}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Note : Si l'aire du disque est de 140 000 miles carrés, alors RD excède la longueur réelle du côté d'environ un pouce.

N.d.l.r. Source : Squaring the circle, Journal of the Indian Mathematical Society, V, 1913, 132.

114-1 *proposé par Jacques Chayé* :

Soit (S_n) la suite numérique vérifiant
$S_1 = 1$
$S_2 = 2 + 3$
$S_3 = 4 + 5 + 6$
$S_4 = 7 + 8 + 9 + 10$
$S_5 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15$
etc.
Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?

Solution de Philippe Rogeon

On peut remarquer que S_n est la somme de n entiers consécutifs, dont le plus grand est :

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La justification se fait par une récurrence simple :

- c'est vrai pour $n = 1$
- si c'est vrai au rang n, alors le plus grand entier dans la somme S_{n+1} est :

$$t_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = t_{n+1}$$

ce qui prouve l'hypothèse.

S_n est donc la somme des entiers de $t_{n-1}+1$ (le successeur du plus grand terme de la somme S_{n-1}) à t_n. On a ainsi :

$$S_n = \sum_{j=t_{n-1}+1}^{t_n} j = \sum_{k=1}^{n}(t_{n-1}+k) = n\times t_{n-1} + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3+n}{2}\,.$$

Autre solution de Walter Mesnier

J'ai cherché S_n comme somme de n termes d'une suite arithmétique de raison 1et de premier terme u_n et de dernier terme $u_n + (n - 1)$: $S_n = \frac{u_n + u_n + (n-1)}{2} \times n$.

Reste à déterminer u_n en fonction de n. On observe les premiers termes 1, 2, 4, 7, 11, …

La suite vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + n$ avec $u_1 = 1$. De là on déduit (par sommation télescopique ou par récurrence) que $u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Par suite $S_n = \frac{2u_n + (n-1)}{2} \times n = \frac{(2 + n^2 - n) + (n-1)}{2} \times n = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

N.d.l.r. L'auteur de l'énoncé propose une généralisation avec $S_1 = 1$; $S_2 = (1+ r) + (1 +2r)$; $S_3 = (1 + 3r) + (1+ 4r) + (1 + 5r)$; etc. On obtient alors $S_n = n(rn^2 - r + 2)/2$ et dans le cas où $r = 2$ on a alors que $S_n = n^3$.

114-3 *proposé par Jean-Paul Mercier* :

Connaître deux nombres rationnels dont la somme est égale au produit.

Solution de Walter Mesnier

Premièrement, pour b et c entiers non nuls, $\frac{b+c}{b}$ et $\frac{b+c}{c}$ sont deux rationnels dont la somme égale le produit.

En effet :

$$P = \frac{b+c}{b} \times \frac{b+c}{c} = \frac{(b+c)^2}{bc},$$

et

$$S = \frac{b+c}{b} + \frac{b+c}{c} = \frac{(b+c)^2}{bc}.$$

Réciproquement, si x et y sont deux rationnels tels que $xy = x + y$ alors (il est clair que x est différent de 1) on peut écrire

$$y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Puisque x est rationnel différent de 1, on pose $x = 1 + \frac{c}{b}$ avec b et c entiers non nuls premiers entre eux. Alors $y = 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{b}{c}$. On peut donc bien écrire x et y sous la forme $\frac{b+c}{b}$ et $\frac{b+c}{c}$.

En conclusion l'ensemble des rationnels dont la somme égale au produit est l'ensemble des couples $\frac{b+c}{b}$ et $\frac{b+c}{c}$ avec b et c entiers non nuls.