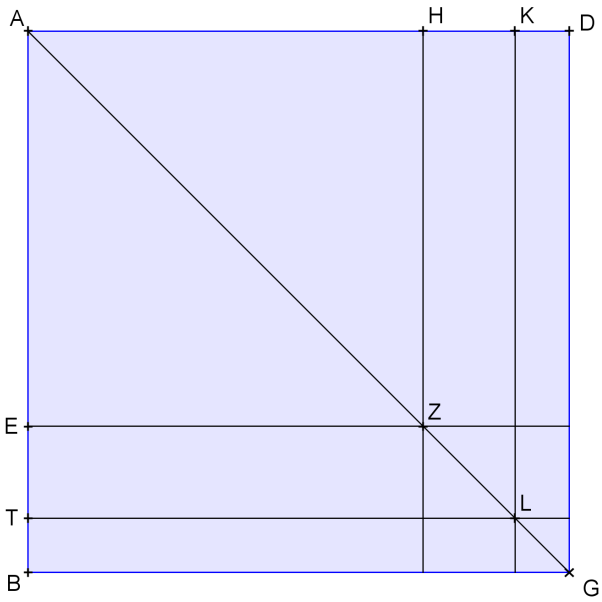
Thierry Chevalarias, Frédéric De Ligt, Jean-Paul Guichard , IREM de Poitiers

Épisode 5 : L'algorithmique à Alexandrie : Théon

Dans son Almageste, Ptolémée a souvent besoin de connaitre le côté d'un carré d'aire donné, et donne à chaque fois, sans explication, une valeur approchée très précise du résultat. Dans son *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée* (appelé aussi *Syntaxe mathématique* ou *Almageste*), Théon d'Alexandrie explicite alors un algorithme pour ce calcul (qui pour nous est un calcul de la racine carrée). Il décrit son algorithme sur un exemple qui se trouve dans l'*Almageste* : la valeur du côté d'un carré d'aire 4500, que Ptolémée affirme être à très peu près égal à 67 4/60 55/3600 (67 4' 55''en écriture sexagésimale). La structure du texte de Théon est la même que chez Héron : énoncé, démonstration, algorithme de calcul.

6) Carré : côté (Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit par l'Abbé Halma, Paris, 1821 p. 184-186. On en trouvera une autre traduction dans Histoire d'algorithmes, la meilleure étant celle de l'édition de 2010).

> *On cherchera comment, étant donnée, l'aire d'un carré dont le côté n'est pas d'une longueur déterminée, nous calculerons ce côté approximativement.*
>
> Suivant le quatrième théorème du second livre des éléments, le carré d'une droite entière, quelle qu'elle soit, est égal, à la somme des carrés des segments de cette droite, et au double du rectangle des segments. En effet, ayant un nombre carré donné, tel que 144, dont le côté rationnel soit la droite AB, prenant 100 qui est le plus grand carré inférieur contenu dans ce nombre, et dont le côté est 10, et faisant AG égale à 10, doublons ce nombre ci, parce que le rectangle des segments est pris deux fois ; divisons le reste 44 par le produit 20, reste 4 qui est le carré de GB, dont la longueur est 2. Or AG était 10, donc la droite entière est longue de 12. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.
>
> Mais, pour rendre cette démonstration de la distinction des parties d'un tout, plus sensible, par son application à quelque nombre contenu dans la composition (de Ptolémée), nous l'avons appliquée au nombre 4500 dont il a fait le côté de 67 4' 55''. Supposons ABGD l'aire du carré, seule rationnelle, et qu'il s'agisse d'en calculer le côté approximativement.
>
> Puisque le carré le plus proche 4500, ayant un côté rationnel, est 4489, carré du côté 67, ôtons le carré AZ, ou 4489, dont le côté est 67, du carré ABGD, le gnomon BZD vaudra donc les 11 parties restantes. Réduisons-les en primes, nous en aurons 660. Ensuite doublons EZ = 67, parce que EZ est multiplié deux fois, prenons ZH comme prolongeant EZ, et divisons les 660 primes par 134. Cette division donne 4 primes, et nous avons ainsi chacune des droites ET, HK. En complétant les parallélogrammes TZ, ZK, nous aurons



536 pour les deux, ou 268 pour chacun. Puis réduisant les 124 primes restantes en 7440 secondes, nous en retrancherons le parallélogramme de complément ZL = 16 secondes, de manière qu'en ajoutant le gnomon au premier carré AZ, nous ayons le carré AL fait sur le côté 67 4', de 4497 56' 16". Enfin le gnomon restant BL LD est de 2 3' 44", c'est-à-dire de 7424 secondes. Doublant donc encore TL, comme étant prolongée par LK, et divisant ces 7424 secondes par 134 8', il viendra 55 secondes à peu près au quotient, pour la valeur de chacune des droites TB et KD. Complétant les parallélogrammes BL, LD, nous les aurons de 7377 secondes et 20 tierces, et chacun de 3688"40'" ; mais il reste encore 46" 40"' qui font à peu près le carré LG, dont le côté est 55". Ainsi, le côté du carré ABGD, 4500, se trouve être à peu prés de 67 4' 55''.

En général, si nous cherchons le côté du carré (la racine carrée de quelque nombre), nous prenons d'abord le côté (racine) du nombre carré le plus approchant. Ensuite, le doublant, et divisant par ce double, le reste du nombre donné réduit en primes, nous ôtons. du quotient, le carré ; puis réduisant encore le reste en secondes, et le divisant par le double des unités et des primes, nous aurons à peu prés le nombre cherché, qui exprime le côté de l'espace carré.

Quelques remarques :

i. Les dénominations

Le nom du carré ou du parallélogramme est celui d'une de ses diagonales : AZ, BZ…

Le gnomon est l'équerre qui reste quand on enlève un carré d'un carré : il est formé de deux rectangles à angle droit, et d'un carré. Par exemple :

gnomon BZD = carré AG – carré AZ,

donc gnomon BZD = rectangle BZ + rectangle + carré ZG.

ii. L'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

On peut remarquer que l'algorithme de Théon repose sur une réécriture de cette identité sous la forme $(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$ qu'on peut lire comme la division euclidienne de $(a+b)^2 - a^2$ (le gnomon) par 2a, b étant le quotient et b^2 le reste. C'est une bonne illustration de l'utilité de cette identité.

En termes actuels, ce que cherche Théon c'est x tel que $x^2 = A$ (A entier), A n'étant pas un carré parfait. Il prend, certainement dans une table, un carré parfait a^2 (a entier) qui approche A, et cherche b (fraction sexagésimale d'un entier pour lui, fraction décimale pour nous actuellement) tel que a + b approche x. Donc $(a+b)^2$, a^2 et a étant donnés, la division euclidienne donne b et b^2.

Quand A est un carré parfait (144), Théon montre que sa méthode marche : il faut jouer le jeu et faire comme si on ne savait pas que 144 était le carré de 12. Peut-être Théon a-t-il choisi 100 et pas 121 comme carré parfait plus petit que 144, considérant que l'on n'a alors pas besoin de chercher dans une table qui donnerait immédiatement la solution pour 144.

Quand A n'est pas un carré parfait (4500) la division donne une valeur de b (largeur du gnomon) un peu plus petite que la valeur non rationnelle manquante, qui permet de construire un nouveau gnomon d'aire plus petite, et de réitérer l'opération jusqu'à l'approximation désirée.

iii. La numération sexagésimale

Si l'on veut faire et vérifier les calculs de Théon à la main en base soixante, cela amène à faire du développement et du calcul sur les fractions.

Par exemple : aire du rectangle TZ = 67 x 4/60, aire du carré AL = $(67 + 4/60)^2$, aire du carré ZL = $(67/60)^2$, 2 x TL = 2 x (67 + 4/60), aire du rectangle BL = (67 + 4/60) x 4/3660, aire du dernier carré = $(67 + 4/60 + 55/3600)^2$, et le reste de sa différence avec 4500 qui donne la précision sur l'aire pour un côté de 67 4' 55" (moins d'un dix millième).

iv. En numération décimale

La reprise de l'algorithme de Théon fait travailler quotient et division euclidienne.

Références

CHABERT Jean-Luc et alii, *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin, 1994. Nouvelle édition, revue et augmentée, Belin, 2010.

THÉON d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit par l'Abbé Halma, Paris, 1821