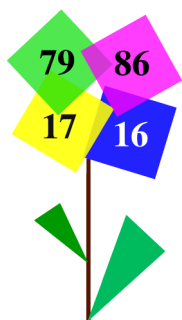




Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



Régionale de
Poitou-Charentes

Corol'aire

Décembre 2018

n°115

Où se cachent les mathématiques ?

Sébastien Dassule-Debertonne

Avant de commencer ce long éditorial, je voudrais vous souhaiter une belle et heureuse année 2019.

J'ai choisi comme titre de cet édito le thème que le comité a choisi pour les Journées Nationales de 2021. Question à double sens, bien entendu, un peu ironique certainement, au goût amer peut-être. Vous y avez certainement compris l'allusion à la volonté de l'association de promouvoir un enseignement qui donne du sens aux mathématiques en les ancrant dans la vie réelle. L'occasion sera belle d'écouter des chercheur.e.s ou des ingénieur.e.s nous parler des mathématiques qu'ils ou elles mettent en œuvre dans leurs pratiques professionnelles. Mais notre malignité nous a obligé à remarquer que ces Journées Nationales suivront la première session du bac réformé et qu'il sera alors bienvenu de faire un premier bilan de cette nouvelle façon d'organiser les enseignements, tant pour les élèves que pour les professeur.e.s. Et de s'interroger sur la place que les mathématiques auront dans l'enseignement au lycée.

D'ailleurs, autant j'ai des doutes sérieux sur la pertinence de l'adéquation entre horaires et programmes pour les élèves, autant je trouve que cette réforme à l'avantage de proposer une remise à niveau en mathématiques pour une grande partie des personnels.

Tout d'abord, et en prévision de la construction des emplois du temps, commençons par un peu de géométrie dans l'espace et de raisonnements. Ruons-nous sur le jeu « Gagne ton papa (ou ta maman) » où le but réside en faire tenir une série de polyminos dans un espace restreint (avec un entraînement intensif pour votre proviseur.e-adjoint.e).

Ensuite, révision sur les fractions tant les contraintes horaires des DGH semblent obliger les équipes à partager (parfois en quart) quelques heures pour assurer un enseignement à peu près cohérent entre l'ambition des programmes et les élèves qui seront dans les groupes. Mais cela oblige à abstraire, ce qui est une autre de nos spécialités.

Et, comme je le lisais récemment dans *Au fil des maths*, abstraire, c'est simplifier, alors simplifions. Pour ne pas rendre l'équation trop difficile à résoudre, oublions que les groupes de spécialités vont être constitués d'élèves aux aspirations très différentes en terme d'orientation et de niveaux

Sommaire

Rallye.....	p.2
Compte rendu du comité.....	p.4
Histoire d'algorithmes.....	p.5
Rubricollage.....	p.8
Une immense tristesse.....	p.15

Suite page 16



Math en jeu – 12 mars 2019

Épreuves d'entraînement

À la suite de l'envoi « papier » des inscriptions dans tous les collèges et lycées de l'académie, vous avez pu télécharger sur notre site les épreuves d'entraînement avec le travail préparatoire des dossiers sur le thème **Math en jeu** de cette année, en vue de l'épreuve finale. La partie « problèmes » de cette épreuve (épreuve d'il y a deux ans) est à faire avant l'épreuve finale pour aider les élèves à s'organiser (répartition des tâches, contrôle des réponses, rédaction...).

Inscriptions

Sur la lettre adressée aux collègues, nous avons donné le 8 février comme date limite des inscriptions. Il s'avère, compte tenu des vacances d'hiver, que cette date est trop tardive du fait que nous devons expédier les épreuves le 11 février, le Rectorat prenant en charge la reprographie le lundi 4 février. Un envoi le 4 mars dans les établissements était trop risqué.

La date limite des inscriptions est donc avancée au 1er février.

Pour l'instant, 36 classes de 6 établissements sont inscrites au Rallye. Nous espérons que la découverte des sujets du thème incitera de nombreuses classes à participer.

Épreuves finales

Elles auront donc lieu sur les six niveaux le 12 mars pendant la semaine des mathématiques. Les compléments aux dossiers sur le thème sont déjà arrêtés. L'équipe du Rallye joue donc maintenant avec les propositions de problèmes : résolutions, modifications, choix... et barème possible.

La remise des prix

Il est prévu que la remise des prix ait lieu le mercredi 5 juin à la Faculté de Sciences Économiques de l'Université de Poitiers.

Une fois n'est pas coutume, nous n'inviterons pas de conférencier ou conférencière. Compte tenu du thème, nous avons l'intention d'essayer une autre formule.

Nous avons en effet envisagé de convier les représentant.es des classes lauréates à une après-midi ludique. Le principe sera de se mesurer au travers de défis que nous leur réserverons à partir des jeux rencontrés dans le Rallye...

Lors de l'envoi du palmarès, chaque niveau connaîtra le jeu choisi pour ces défis.

Les récompenses

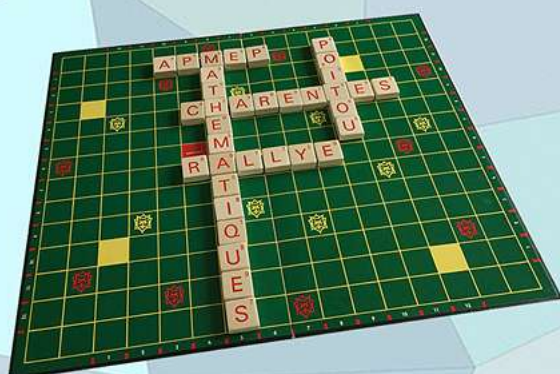
Comme l'an dernier, il y aura des lots individuels pour les élèves et des lots pour les classes, lots en rapport avec les mathématiques.

Nous espérons que les épreuves du Rallye et la remise des prix seront une vraie fête des mathématiques.

Rallye Mathématique APMEP de Poitou-Charentes



MATH EN JEU



12 mars 2019

Semaine Nationale des Mathématiques

Jouons ensemble
aux mathématiques



APMEP - IREM Téléport 2
Bât H3 SP2MI Futuroscope
Bd M. et P. Curie, TSA 61 125
86073 POITIERS Cedex 9
<http://apmep.poitiers.free.fr>
apmep.poitiers@free.fr
05 49 45 38 77

Compte-rendu du comité du 26 septembre 2018

Élection du bureau

Le bureau est reconduit à l'unanimité :
Président : Sébastien Dassule-Debertonne
Vice-Président : Philippe Rogeon
Vice-Président en charge de l'organisation des Journées 2021 : Nicolas Minet
Trésorier : Jean-Marie Parnaudeau
Trésorier adjoint : Jacques Germain
Secrétaire : Corinne Parcelier

Réforme du lycée

Voir l'édito.

Journées Nationales

Une première réunion de présentation-mise en place s'est déroulée le 28 novembre.
Les commissions sont en cours de création. Au niveau de la logistique, il faut trouver un système pour mutualiser/partager/échanger des documents. Avec l'expo en route, le rallye..., les drop-boxes sont insuffisantes.
Les réunions à distance pourront aisément être mises en place grâce à la plate-forme Via.
La commission informatique sera chargée entre autre de la gestion du site ainsi que de la trésorerie en ligne.
Les contacts pris tant pour la trésorerie que pour la logistique seront poursuivis.

Journée de la Régionale

Nous souhaitons l'organiser l'année prochaine en Charente. L'objectif est de tourner sur l'académie et d'avoir la possibilité de faire venir des professeur.e.s des écoles. Au vu de la configuration géographique, il est difficile de trouver un point de chute vraiment central et accessible. Nous évoquons Angoulême, Corinne se charge de prendre des contacts au lycée Charles Coulomb, Marguerite de Valois ou au lycée de l'image et du son.

Visibilité de l'association

Le premier article d'une (nous espérons) longue série est paru dans le numéro 426 du magazine *7 à Poitiers* (page 24, voir ci-contre). L'objectif est de nous faire connaître du grand public et des décideurs en vue des JN 2021

Exposition 2020

La rencontre avec l'Espace Mendes France aura certainement lieu en mars.

Conférences en partenariat avec l'EMF

L'EMF nous a sollicités pour une conférence grand public lors de la semaine des maths en mars prochain. Nous avons proposé et contacté Mickael Launay.

De même, nous l'avons dirigé vers Jean-Francis Dupoirier pour une intervention le dimanche 10 mars à 16h30 suite à la projection du film un monde en plis : code origami.

Nous comptons nous présenter comme partenaire de ces événements.

Rallye

Les épreuves d'entraînement sont en ligne depuis mercredi 5 décembre. Les inscriptions sont lancées. Il ne sera plus accepté d'établir de convention pour des établissements tatillons. Le bulletin de commande doit suffire à la gestion des inscriptions.

La remise des prix se déroulera à Poitiers.

Côté finances, les AMOPA ont été relancées. Une audience a été demandée aux conseils départementaux.

Nous sollicitons comme chaque année la MAIF, la MGEN et la CASDEN.

Nous expérimenterons une classe virtuelle mercredi 19 décembre pour travailler sur les problèmes de l'épreuve finale.

La prochaine réunion en présentiel aura lieu le mercredi 9 janvier.

L'ordre du jour étant épuisé à 17 h 30, nous avons eu le plaisir d'accueillir Cécile Cheminard et sa petite Sofia qui a été très sage toute la réunion !



A vos maths

Toutes les quatre semaines, le 7 vous propose, en partenariat avec l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (Apmep), un jeu qui met vos méninges à rude épreuve.

La cafetière et les tasses

La cafetière et 6 tasses coûtent ensemble 60€.
La cafetière coûte 30€ de plus que les tasses.

Quel est le prix de la cafetière ?

Retrouvez la solution à ce jeu sur le7.info (rubrique dépêches) dès mercredi.

Histoire d'algorithmes

Thierry Chevalarias, Frédéric De Ligt, Jean-Paul Guichard, IREM de Poitiers

Épisode 5 : L'algorithmique à Alexandrie : Théon

Dans son *Almageste*, Ptolémée a souvent besoin de connaître le côté d'un carré d'aire donné, et donne à chaque fois, sans explication, une valeur approchée très précise du résultat. Dans son *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée* (appelé aussi *Syntaxe mathématique* ou *Almageste*), Théon d'Alexandrie explicite alors un algorithme pour ce calcul (qui pour nous est un calcul de la racine carrée). Il décrit son algorithme sur un exemple qui se trouve dans l'*Almageste* : la valeur du côté d'un carré d'aire 4500, que Ptolémée affirme être à très peu près égal à $67 \frac{4}{60} \frac{55}{3600}$ ($67^\circ 4' 55''$ en écriture sexagésimale). La structure du texte de Théon est la même que chez Héron : énoncé, démonstration, algorithme de calcul.

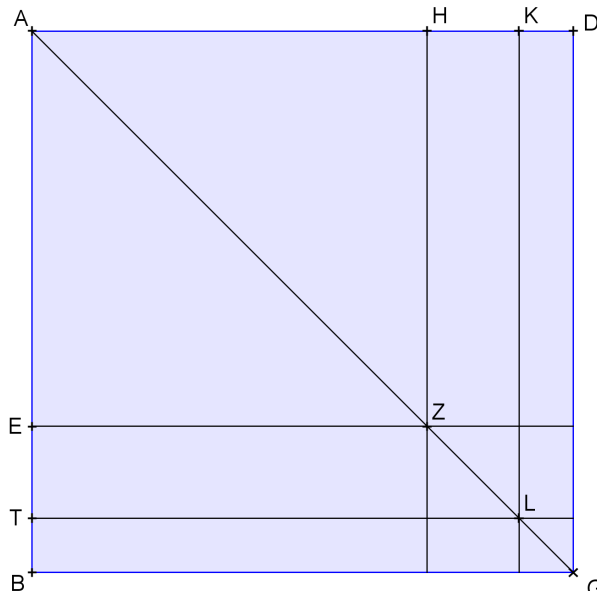
6) Carré : côté (Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit par l'Abbé Halma, Paris, 1821 p. 184-186. On en trouvera une autre traduction dans *Histoire d'algorithmes*, la meilleure étant celle de l'édition de 2010).

On cherchera comment, étant donnée, l'aire d'un carré dont le côté n'est pas d'une longueur déterminée, nous calculerons ce côté approximativement.

Suivant le quatrième théorème du second livre des éléments, le carré d'une droite entière, quelle qu'elle soit, est égal, à la somme des carrés des segments de cette droite, et au double du rectangle des segments. En effet, ayant un nombre carré donné, tel que 144, dont le côté rationnel soit la droite AB, prenant 100 qui est le plus grand carré inférieur contenu dans ce nombre, et dont le côté est 10, et faisant AG égale à 10, doublons ce nombre ci, parce que le rectangle des segments est pris deux fois ; divisons le reste 44 par le produit 20, reste 4 qui est le carré de GB, dont la longueur est 2. Or AG était 10, donc la droite entière est longue de 12. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Mais, pour rendre cette démonstration de la distinction des parties d'un tout, plus sensible, par son application à quelque nombre contenu dans la composition (de Ptolémée), nous l'avons appliquée au nombre 4500 dont il a fait le côté de $67^\circ 4' 55''$. Supposons ABGD l'aire du carré, seule rationnelle, et qu'il s'agisse d'en calculer le côté approximativement.

Puisque le carré le plus proche 4500, ayant un côté rationnel, est 4489, carré du côté 67, ôtons le carré AZ, ou 4489, dont le côté est 67, du carré ABGD, le gnomon BZD vaudra donc les 11 parties restantes. Réduisons-les en primes, nous en aurons 660. Ensuite doublons EZ = 67, parce que EZ est multiplié deux fois, prenons ZH comme prolongeant EZ, et divisons les 660 primes par 134. Cette division donne 4 primes, et nous avons ainsi chacune des droites ET, HK. En complétant les parallélogrammes TZ, ZK, nous aurons



536 pour les deux, ou 268 pour chacun. Puis réduisant les 124 primes restantes en 7440 secondes, nous en retrancherons le parallélogramme de complément $ZL = 16$ secondes, de manière qu'en ajoutant le gnomon au premier carré AZ, nous ayons le carré AL fait sur le côté $67' 4''$, de $4497' 56'' 16'''$. Enfin le gnomon restant BL LD est de $2' 3'' 44'''$, c'est-à-dire de 7424 secondes. Doublant donc encore TL, comme étant prolongée par LK, et divisant ces 7424 secondes par $134' 8''$, il viendra 55 secondes à peu près au quotient, pour la valeur de chacune des droites TB et KD. Complétant les parallélogrammes BL, LD, nous les aurons de 7377 secondes et 20 tierces, et chacun de $3688'' 40'''$; mais il reste encore $46'' 40'''$ qui font à peu près le carré LG, dont le côté est $55''$. Ainsi, le côté du carré ABGD, 4500, se trouve être à peu près de $67' 4'' 55'''$.

En général, si nous cherchons le côté du carré (la racine carrée de quelque nombre), nous prenons d'abord le côté (racine) du nombre carré le plus approchant. Ensuite, le doublant, et divisant par ce double, le reste du nombre donné réduit en primes, nous ôtons du quotient, le carré ; puis réduisant encore le reste en secondes, et le divisant par le double des unités et des primes, nous aurons à peu près le nombre cherché, qui exprime le côté de l'espace carré.

Quelques remarques :

i. Les dénominations

Le nom du carré ou du parallélogramme est celui d'une de ses diagonales : AZ, BZ...

Le gnomon est l'équerre qui reste quand on enlève un carré d'un carré : il est formé de deux rectangles à angle droit, et d'un carré. Par exemple :

$$\text{gnomon BZD} = \text{carré AG} - \text{carré AZ},$$

$$\text{donc gnomon BZD} = \text{rectangle BZ} + \text{rectangle} + \text{carré ZG}.$$

ii. L'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

On peut remarquer que l'algorithme de Théon repose sur une réécriture de cette identité sous la forme $(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$ qu'on peut lire comme la division euclidienne de $(a+b)^2 - a^2$ (le gnomon) par $2a$, b étant le quotient et b^2 le reste. C'est une bonne illustration de l'utilité de cette identité.

En termes actuels, ce que cherche Théon c'est x tel que $x^2 = A$ (A entier), A n'étant pas un carré parfait. Il prend, certainement dans une table, un carré parfait a^2 (a entier) qui approche A , et cherche b (fraction sexagésimale d'un entier pour lui, fraction décimale pour nous actuellement) tel que $a + b$ approche x . Donc $(a+b)^2$, a^2 et a étant donnés, la division euclidienne donne b et b^2 .

Quand A est un carré parfait (144), Théon montre que sa méthode marche : il faut jouer le jeu et faire comme si on ne savait pas que 144 était le carré de 12. Peut-être Théon a-t-il choisi 100 et pas 121 comme carré parfait plus petit que 144, considérant que l'on n'a alors pas besoin de chercher dans une table qui donnerait immédiatement la solution pour 144.

Quand A n'est pas un carré parfait (4500) la division donne une valeur de b (largeur du gnomon) un peu plus petite que la valeur non rationnelle manquante, qui permet de construire un nouveau gnomon d'aire plus petite, et de réitérer l'opération jusqu'à l'approximation désirée.

iii. La numération sexagésimale

Si l'on veut faire et vérifier les calculs de Théon à la main en base soixante, cela amène à faire du développement et du calcul sur les fractions.

Par exemple : aire du rectangle TZ = $67 \times 4/60$, aire du carré AL = $(67 + 4/60)^2$, aire du carré ZL = $(67/60)^2$, $2 \times TL = 2 \times (67 + 4/60)$, aire du rectangle BL = $(67 + 4/60) \times 4/3660$, aire du dernier carré = $(67 + 4/60 + 55/3600)^2$, et le reste de sa différence avec 4500 qui donne la précision sur l'aire pour un côté de 67 4' 55" (moins d'un dix millième).

iv. En numération décimale

La reprise de l'algorithme de Théon fait travailler quotient et division euclidienne.

Références

CHABERT Jean-Luc et alii, *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin, 1994. Nouvelle édition, revue et augmentée, Belin, 2010.

THÉON d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit par l'Abbé Halma, Paris, 1821

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

115-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :*

D'une théière cylindrique et d'une théière sphérique de même volume, quelle est celle dont la surface extérieure est la plus petite (donc susceptible de mieux conserver la chaleur) ?

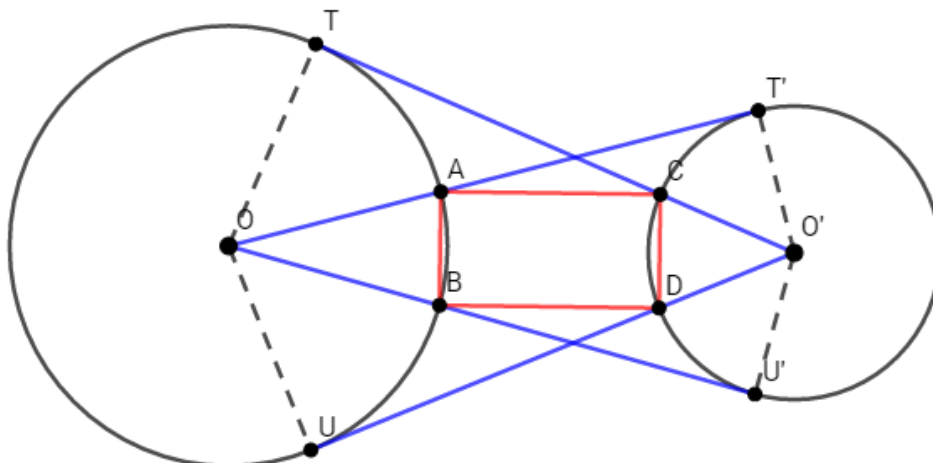


115-2 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :*

Soient deux cercles C_1 et C_2 , extérieurs l'un à l'autre, de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' .

Du point O' , on mène les tangentes $(O'T)$ et $(O'U)$ au cercle C_1 . Du point O , on mène les tangentes (OT') et (OU') au cercle C_2 . Les droites (OT') et (OU') coupent C_1 en A et B respectivement. Les droites $(O'T)$ et $(O'U)$ coupent C_2 en C et D respectivement.

Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle.



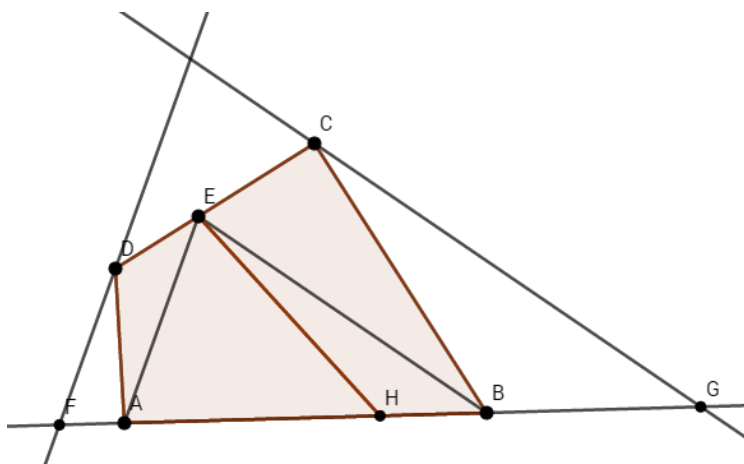
115-3 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Trouver toutes les fonctions $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les deux inégalités :
 $f(x) \geq x + 1$, et $f(x + y) \geq f(x) \cdot f(y)$.

115-4 proposé par Dominique Gaud (Migné-Auxances) :

Partage d'un quadrilatère convexe en deux parties de même aire

On prend E sur le côté [CD]. On mène la parallèle à (EA) passant par D qui coupe (AB) en F et la parallèle à (EB) passant par C qui coupe (AB) en G. H est alors le milieu de [FG]. Le segment [EH] partage le quadrilatère ABCD en deux parties de même aire.



Y a-t-il des restrictions sur la position du point E sur [CD] et/ou sur les angles du quadrilatère convexe ?

Justifier alors l'exactitude de cette construction.

Des solutions

108-3 de Jean-Christophe Laugier :

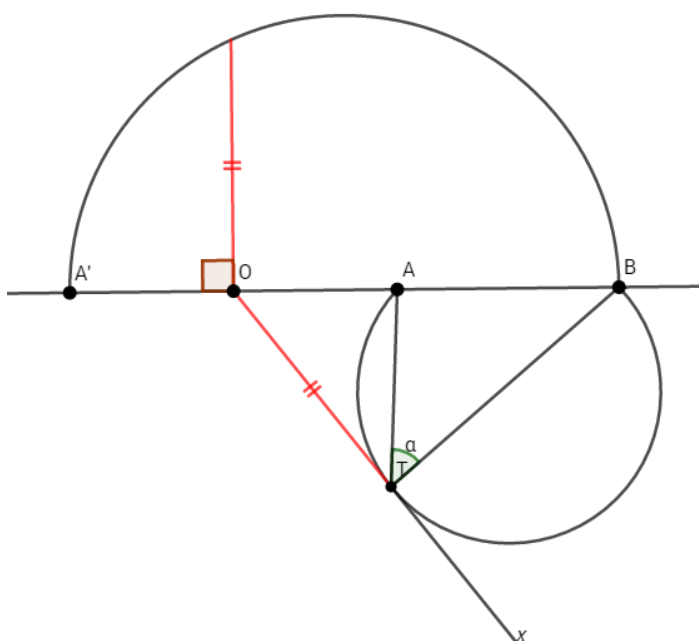
En quel point de [Ox) doit se placer le tireur T pour voir le but [AB] sous un angle $\widehat{ATB}$ maximal ?

Solution de Frédéric de Ligt

L'ensemble des points M d'où l'on voit le segment [AB] sous un angle α est un arc de cercle d'extrémités A et B. Le rayon de cet arc est d'autant plus petit que l'angle α est grand. Pour obtenir un angle α maximum il faut trouver le plus petit arc de cercle d'extrémités A et B coupant la demi-droite [Ox). Il s'agit de l'arc de cercle tangent à [Ox) d'extrémités A et B. Si on note T le point de contact entre cet arc de cercle et la demi-droite [Ox), T est alors le point cherché.

On sait depuis Euclide qu'alors $OT^2 = OA \cdot OB$ et donc que OT est la moyenne géométrique des longueurs OA et OB.

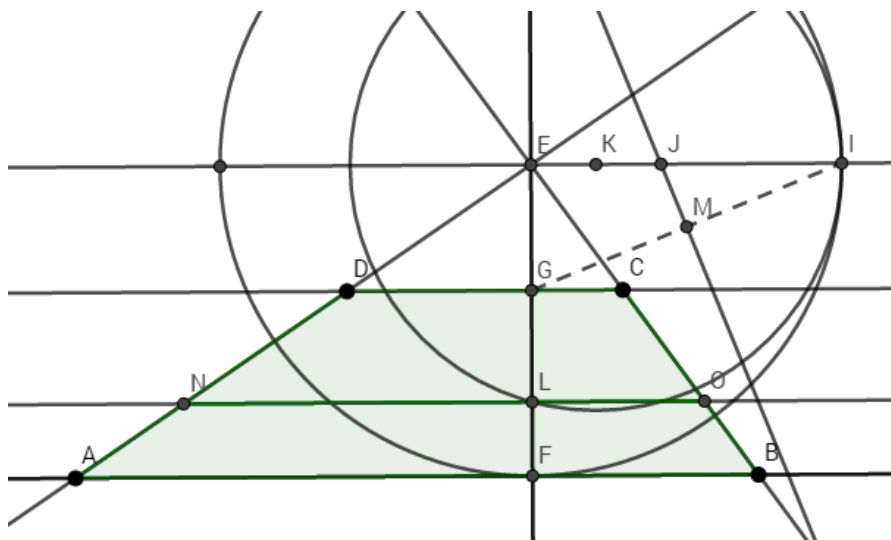
D'où une construction possible de ce point T.



112-2 proposé par Dominique Gaud :

Voici une méthode pour partager un trapèze en deux parties égales.

ABCD est un trapèze dont les côtés non parallèles se coupent en E. Le cercle de centre E et de rayon EF (F pied de la hauteur du triangle ABE issue du sommet E) coupe la parallèle à (AB) passant par E en I. On note G l'intersection de la hauteur [EF] avec la droite (CD). La médiatrice de [GI] coupe la droite (EI) en J. On note K le milieu de [EJ]. Le cercle de centre K et de rayon KI coupe [EF] en L. On trace la parallèle aux bases passant par L et on a deux trapèzes de même aire. Pourquoi ?



Solution de Frédéric de Ligt

On prouve tout d'abord que la construction proposée entraîne que EL est la moyenne quadratique de EF et EG.

On note M le milieu de [GI]. Les triangles rectangles EGI et MJ I sont semblables ; aux côtés [EI], [GI] et [EG] correspondent respectivement [MI], [JI] et [MJ].

On observe que EI = EF et que $MI = \frac{1}{2}GI = \frac{1}{2}\sqrt{EG^2 + EI^2}$ d'où une expression du coefficient de réduction :

$$\frac{\sqrt{EG^2 + EF^2}}{2EF}.$$

Par conséquent

$$JI = \frac{\sqrt{EG^2 + EF^2}}{2EF} GI = \frac{EG^2 + EF^2}{2EF}.$$

On a donc :

$$EL^2 = KL^2 - EK^2 = KI^2 - EK^2 = \left(\frac{EF - JI}{2} + JI\right)^2 - \left(\frac{EF - JI}{2}\right)^2 = (EF - JI) \times JI + JI^2 = EF \times JI = \frac{EG^2 + EF^2}{2}.$$

On a montré que EL est la moyenne quadratique de EF et EG.

On montre maintenant que pour obtenir un partage de ABCD en deux trapèzes de même aire la parallèle cherchée doit passer par le point L.

On suppose que la droite (NO) est parallèle aux bases [AB] et [DC] et partage ABCD en deux trapèzes NOCD et ABON dont les aires sont égales. Le point L est défini comme l'intersection de (NO) avec (EF).

On a l'égalité

$$(DC + NO) \times GL = (NO + AB) \times LF,$$

d'où

$$\frac{GL}{LF} = \frac{NO+AB}{DC+NO}.$$

D'après la propriété de Thalès on a les égalités : $\frac{DC}{NO} = \frac{EG}{EL}$ (1) ; $\frac{NO}{AB} = \frac{EL}{EF}$ (2) ; $\frac{DC}{AB} = \frac{EG}{EF}$ (3).

On tire de (2) et (3) que

$$\frac{DC+NO}{AB} = \frac{EL+EG}{EF},$$

et de (1) et (3) que

$$\frac{NO+AB}{DC} = \frac{EF+EL}{EG}.$$

On peut donc écrire que

$$\frac{GL}{LF} = \frac{(EF+EL) \times DC}{EG} \times \frac{EF}{AB \times (EL+EG)},$$

mais comme d'après (3) on a

$$\frac{DC}{EG} \times \frac{EF}{AB} = 1,$$

on simplifie cette égalité en

$$\frac{GL}{LF} = \frac{EF+EL}{EL+EG}.$$

Par ailleurs $GL = EL - EG$ et $LF = EF - EL$ et donc

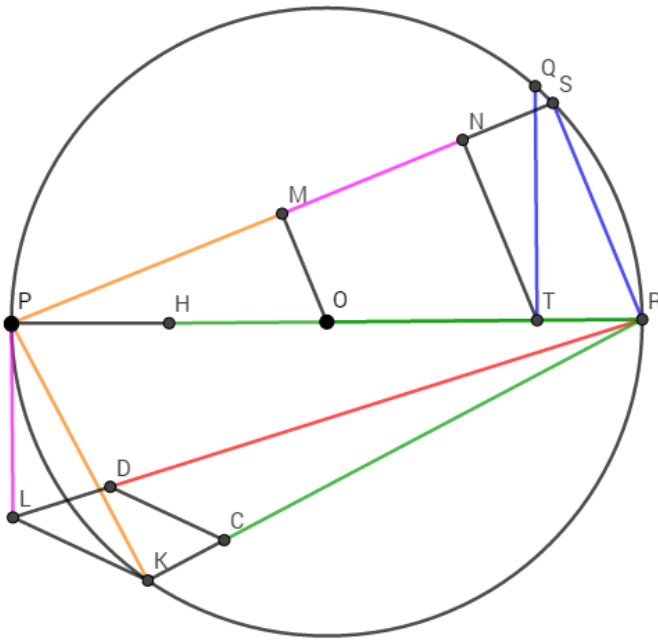
$$\frac{GL}{LF} = \frac{EL-EG}{EF-EL}.$$

Finalement on parvient à

$$\frac{EF+EL}{EL+EG} = \frac{EL-EG}{EF-EL},$$

et on a bien que

$$EL^2 = \frac{EG^2 + EF^2}{2}.$$



- Le cercle X a pour rayon r et pour centre O .
- $[PR]$ est un de ses diamètres.
- H est le milieu du segment $[PO]$.
- T est le point du segment $[OR]$ tel que $TR = OR/3$.
- La perpendiculaire à $[PR]$ en T coupe le cercle X en deux points et on note Q l'un de ces deux points.
- On place sur le demi-cercle contenant le point Q le point S tel que $QT = RS$.
- On place sur le segment $[PS]$ les points M et N tels que les droites (RS) , (TN) et (OM) soient parallèles.
- On place sur le demi-cercle ne contenant pas Q le point K tel que $PK = PM$.
- On trace la demi-droite d'origine P et perpendiculaire au diamètre $[PR]$ dans le demi-plan limité par (PR) et ne contenant pas Q .
- On place sur cette demi-droite le point L tel que $PL = MN$.
- On trace les segments $[RL]$, $[RK]$ et $[KL]$.
- On place sur le segment $[RK]$ le point C tel que $RC = RH$.
- On place sur le segment $[RL]$ le point D tel que les droites (CD) et (KL) soient parallèles.

Montrer que le carré de côté $[RD]$ a alors une aire égale à $\frac{355}{113}r^2$.

Solution de l'auteur

$$RS^2 = \frac{5}{36}d^2,$$

où d est le diamètre du cercle. Par conséquent

$$PS^2 = \frac{31}{36}d^2.$$

Mais PL et PK sont égaux à MN et PM respectivement. C'est pourquoi

$$PK^2 = \frac{31}{144}d^2 \text{ et } PL^2 = \frac{31}{324}d^2.$$

Donc

$$RK^2 = PR^2 - PK^2 = \frac{113}{144}d^2,$$

et

$$RL^2 = PR^2 + PL^2 = \frac{355}{324}d^2.$$

Mais

$$\frac{RK}{RL} = \frac{RC}{RD} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{113}{355}}$$

et

$$RC = \frac{3}{4}d.$$

D'où

$$RD = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{355}{113}} \approx \frac{d}{2} \sqrt{\pi}.$$

Note : Si l'aire du disque est de 140 000 miles carrés, alors RD excède la longueur réelle du côté d'environ un pouce.

N.d.l.r. Source : Squaring the circle, Journal of the Indian Mathematical Society, V, 1913, 132.

114-1 proposé par Jacques Chayé :

Soit (S_n) la suite numérique vérifiant

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 2 + 3$$

$$S_3 = 4 + 5 + 6$$

$$S_4 = 7 + 8 + 9 + 10$$

$$S_5 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

etc.

Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?

Solution de Philippe Rogeon

On peut remarquer que S_n est la somme de n entiers consécutifs, dont le plus grand est :

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La justification se fait par une récurrence simple :

- c'est vrai pour $n = 1$
- si c'est vrai au rang n , alors le plus grand entier dans la somme S_{n+1} est :

$$t_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = t_{n+1}$$

ce qui prouve l'hypothèse.

S_n est donc la somme des entiers de $t_{n-1} + 1$ (le successeur du plus grand terme de la somme S_{n-1}) à t_n . On a ainsi :

$$S_n = \sum_{j=t_{n-1}+1}^{t_n} j = \sum_{k=1}^n (t_{n-1} + k) = n \times t_{n-1} + \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3 + n}{2}.$$

Autre solution de Walter Mesnier

J'ai cherché S_n comme somme de n termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme u_n et de dernier terme $u_n + (n - 1)$: $S_n = \frac{u_n + u_n + (n-1)}{2} \times n$.

Reste à déterminer u_n en fonction de n . On observe les premiers termes 1, 2, 4, 7, 11, ...

La suite vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + n$ avec $u_1 = 1$. De là on déduit (par sommation télescopique ou par récurrence) que $u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\text{Par suite } S_n = \frac{2u_n + (n-1)}{2} \times n = \frac{(2 + n^2 - n) + (n-1)}{2} \times n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

N.d.l.r. L'auteur de l'énoncé propose une généralisation avec $S_1 = 1$; $S_2 = (1 + r) + (1 + 2r)$; $S_3 = (1 + 3r) + (1 + 4r) + (1 + 5r)$; etc. On obtient alors $S_n = n(rn^2 - r + 2)/2$ et dans le cas où $r = 2$ on a alors que $S_n = n^3$.

114-3 *proposé par Jean-Paul Mercier :*

Connaître deux nombres rationnels dont la somme est égale au produit.

Solution de Walter Mesnier

Premièrement, pour b et c entiers non nuls, $\frac{b+c}{b}$ et $\frac{b+c}{c}$ sont deux rationnels dont la somme égale le produit.

En effet :

$$P = \frac{b+c}{b} \times \frac{b+c}{c} = \frac{(b+c)^2}{bc},$$

et

$$S = \frac{b+c}{b} + \frac{b+c}{c} = \frac{(b+c)^2}{bc}.$$

Réciproquement, si x et y sont deux rationnels tels que $xy = x + y$ alors (il est clair que x est différent de 1) on peut écrire

$$y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Puisque x est rationnel différent de 1, on pose $x = 1 + \frac{c}{b}$ avec b et c entiers non nuls premiers entre eux. Alors $y = 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{b}{c}$. On peut donc bien écrire x et y sous la forme $\frac{b+c}{b}$ et $\frac{b+c}{c}$.

En conclusion l'ensemble des rationnels dont la somme égale au produit est l'ensemble des couples $\frac{b+c}{b}$ et $\frac{b+c}{c}$ avec b et c entiers non nuls.

Une immense tristesse



Frédéric, lors de sa conférence en 2009

Nous avons appris, avec stupéfaction et une immense tristesse, le décès de Frédéric Testard, Maître de Conférence en mathématiques à l'Université de La Rochelle.

Malgré un traitement prometteur, la maladie l'a emporté le 13 décembre dernier à 57 ans.

Frédéric a beaucoup donné à notre Régionale. Son érudition, sa pédagogie, sa simplicité faisait de lui un conférencier hors pair, très sollicité par notre Régionale pour aborder les sujets qui lui tenaient à cœur : des sujets parfois complexes mais qui suscitaient notre curiosité et notre désir de savoir.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Frédéric TESTARD
Maître de Conférence à l'Université de La Rochelle.

Assemblée Générale de la Régionale de Poitou-Charentes.
Tous les professeurs de mathématiques sont cordialement invités.
Rapport d'activité
Rapport financier
Le point sur les actions en cours : programmes, évènements...

Plongements et coloriages des graphes
La démonstration «rapide» d'un théorème de la théorie des graphes pour les centres de pédagogie conduit à la construction de «graphes récurrents» et de leurs propriétés : «topologiques», «géométriques», «algébriques»...
à des graphes non planaires géométriques dans des cas plus compliqués.

Mercredi 14 décembre ANGOULÊME
Lycée de l'Image et du Son
14h30

A.P.M.E.P. - I.R.E.M. Faculté des Sciences, 41, Avenue du Recteur Pons, 79022 PORTIERES Cedex.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Conférence de **Frédéric TESTARD**
Maître de Conférence à l'Université de La Rochelle.

Assemblée Générale de la Régionale de Poitou-Charentes.
Tous les professeurs de mathématiques sont cordialement invités.
Rapport d'activité
Rapport financier
Élection du nouveau Comité
Projet pour 2002

La fourmi et le rapporteur
CM2

Une approche d'une autre géométrie
L'association connaît des temps de moments d'activités et de temps de réflexion dans le développement de contenus mathématiques, en particulier la notion de la relation entre l'espace et le plan. Ces thèmes nous conduisent à nous poser des questions et nous interroger sur les liens qui nous unissent à l'histoire de la géométrie.

Mercredi 12 décembre à 14h30
Lycée de la Venise Verte à Niorx

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Conférence de **Frédéric TESTARD**
Maître de Conférence à l'Université de La Rochelle.

De FERMAT à WILES
350 ans de mathématiques

Mercredi 10 juin à 15h
si Filles Sciences et Technologies
Bâtiment Pascal
Salle 231
LA ROCHELLE

APMEP

Corol'aire

CONFÉRENCE : **L'aile du papillon**
Par Frédéric Testard

La Régionale Poitou-Charentes de l'APMEP vous propose

Le mercredi 6 avril 2016
à 14 h 30
Faculté des Sciences de La Rochelle
Bâtiment Pascal Salle 022

La conférence de F. Testard : **« L'aile du papillon »**
Une description de phénomènes chaotiques.
De la transformation du boulangier à la suite logistique avec quelques considérations sur les contraintes posées par l'écriture en base 2.

Renseignements : apmep.poitou@free.fr

APMEP - 18, rue de la République - 79000 La Rochelle - 02 47 71 11 11
Bâtiment Pascal - 79000 La Rochelle - 02 47 71 11 11

À l'occasion de nos Assemblées générales, Frédéric nous engageait, le 14 décembre 1994, dans des **Plongements et coloriages de graphes** et, le 12 décembre 2001, c'est **La fourmi et le rapporteur** qui nous engageaient dans une autre géométrie. Le 10 juin 2009, Frédéric nous faisait voyager dans le temps, **De Fermat à Wiles**, et **L'aile du papillon** nous emportait, le 6 avril 2016, vers des phénomènes chaotiques.



À l'occasion de la remise des prix du Rallye à La Rochelle le 23 mai 2012, Frédéric accueillait les classes lauréates dans l'amphi et servait le goûter aux élèves à la fin de la cérémonie.



Nous prenons part à la peine de son épouse et de ses deux enfants, et nous avons une pensée pour son cousin Jean-Pierre Sicre que certains d'entre nous ont bien connu et qui fut président de notre Régionale.

très hétérogènes. Et que cette double hétérogénéité nécessite, de leur accorder du temps... Mais cela est trop compliqué ; un groupe égale 4h, ça c'est simple. Oublions aussi que les élèves, comme la société, changent, que leurs habitudes de travail ne sont plus les mêmes, que leur vécu n'est plus le même. Le programme restera lourd comme un repas de Noël. Alors, pour éviter l'indigestion, simplifions. Et survolons.

Trêve de plaisanterie, je crains que chaque discipline, en particulier les mathématiques, ne voit les défauts qu'on lui reproche (réels ou supposés) accrus par ces conditions.

Et dans quelques années, on s'agacera (encore) que les mathématiques aient une image élitiste, au contenu hors-sol et qu'elles ne permettent pas de :

- *contribuer à faire de chaque élève une personne lucide, consciente de ce qu'elle est, de ce qu'est le monde et de ce qu'est sa relation au monde ;*
- *contribuer à faire de chaque élève un citoyen ou une citoyenne responsable, qui connaît les conséquences de ses actions sur le monde et dispose des outils nécessaires pour les contrôler ;*
- *contribuer au développement en chaque élève d'un esprit rationnel, autonome et éclairé, capable d'exercer une analyse critique face aux fausses informations et aux rumeurs.¹*

Ce sont ces trois paragraphes qui m'ont été opposés pour justifier de l'absurdité de la présence des mathématiques dans l'enseignement scientifique du tronc commun de première.

Cet esprit, la diminution mécanique des volumes horaires en première et en terminale, ainsi que la contrainte de devoir accepter d'autres enseignements que les enseignements de mathématiques (comme SNT) inquiètent le comité de la Régionale. Déjà les discussions font apparaître chez certain.e.s collègues des questions sur le sens de notre métier et de l'anxiété en prévision de la prochaine rentrée.

Rapidement, la Régionale vous proposera de faire une remontée des conditions de mise en place de cette réforme du lycée du point de vue des mathématiques. Étant entendu que, comme vous, nous n'avons aucune visibilité sur les classes de terminales ni sur les orientations post-bac, ce qui risque de modifier ces conditions dans les années à venir. Il ne s'agira donc que d'un bilan d'étape. Le bilan réel, nous ne pourrons le tirer qu'en 2021, au cours des Journées Nationales.

1. Les paragraphes en italique sont issus du préambule du programme d'Enseignement Scientifique.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : <http://apmep.poitiers.free.fr/>

Mél. apmep.poitiers@free.fr

Tél. 06.09.99.30.82

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication

S. Dassule-Debertonne

Éditeur

APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

Comité de rédaction

F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne,
J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.

Siège Social

IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125, 86073 Poitiers Cedex 9

Imprimerie

IREM de Poitiers. Adresse ci-contre.

Dépôt légal

Janvier 2019