Ru – Bri – COL⌞AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Le problème 112-4 et sa solution par Jacques Chayé dans le numéro 113 de Corol'aire ont fait réagir Jean-Marie Parnaudeau de Poitiers. Voici son courrier fort documenté.

Dans la Ru-BRI-COLLAGE du numéro 113 de Corol'aire, on trouvait la démonstration de la formule de trigonométrie

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)} \quad (1).$$

« *La résolution des triangles est l'application fondamentale de la trigonométrie : c'est même l'étymologie du mot.*»[1]

On peut donc se poser la question de l'utilité d'une telle formule ; était-elle liée à un contexte particulier ou bien était-elle uniquement destinée à compléter un catalogue déjà bien fourni ?

En effet, si dans un triangle on connaît « deux côtés et l'angle compris », alors il est facile, avec des moyens de calculs actuels, de résoudre le triangle à l'aide des égalités $\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}$ connues aussi sous le nom de « loi des sinus ». Mais vous allez dire : quel est le rapport avec la formule (1) ? C'est ce que nous allons tenter d'élucider partiellement.

Avant d'aller plus loin trois remarques.

La première, à l'aide de ces égalités on avait une autre démonstration de l'égalité (1).

De $\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}$, on déduit $\frac{b-c}{\sin(\hat{B})-\sin(\hat{C})}=\frac{b+c}{\sin(\hat{B})+\sin(\hat{C})}$ et donc $\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin(\hat{B})-\sin(\hat{C})}{\sin(\hat{B})+\sin(\hat{C})}$ (2).

On conclut à l'aide des formules

$$\sin(\hat{B})+\sin(\hat{C})=2\sin\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)\cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(\hat{B})-\sin(\hat{C})=2\cos\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)\sin\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right).$$

L'égalité (1) peut s'écrire :

$$\frac{b-c}{b+c}\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)=\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right), \quad \text{soit} \quad \frac{b-c}{b+c}\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)=\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) \quad (3).$$

Cette formule permet, connaissant 2 côtés b et c ainsi qu'un angle $\hat{A}$, de trouver l'angle $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ et donc $\hat{B}$ et $\hat{C}$, puis a par une autre formule. Mais pourquoi une telle formule, alors qu'il est beaucoup plus facile de faire le calcul avec la loi des sinus pour résoudre ce triangle ?

La troisième, c'est qu'au XIX^{e} siècle, même si les règles à calcul existaient, tous les calculs nécessitant une grande précision étaient faits par logarithmes. L'égalité (3) se prête à un calcul par logarithmes, ce qui n'est pas le cas si on utilise la loi des sinus.

Remontons dans le temps, la formule (1) faisait partie des formules qu'un bachelier, il y a plus d'un siècle, devait connaître. Elle figure par exemple dans le Combette[2] de 1896. On trouve cette

formule bien antérieurement, par exemple dans La Caille[3], mais aussi jusque dans les années 1950, par exemple dans le cours de Levallois[4]. Ensuite il semble que cette formule disparaisse des cursus scolaires ou universitaires et d'une certaine façon passe au « musée ». Mais pourquoi donc ?
Dans le Combette déjà cité, la formule (1) apparaît lors de l'étude des cas élémentaires de résolution de triangles, au paragraphe 181. Ce paragraphe traite du cas particulier où l'on connaît les logarithmes de b et de c et l'angle compris. En écrivant $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1-\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}$, en posant $\tan(\varphi)=\frac{c}{b}$, on obtient :

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{1-\tan(\varphi)}{1+\tan(\varphi)}, \qquad \text{soit} \quad \frac{b-c}{b+c}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$$

Dans ce cas la formule (3) s'écrit :

$$\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)=\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right),$$

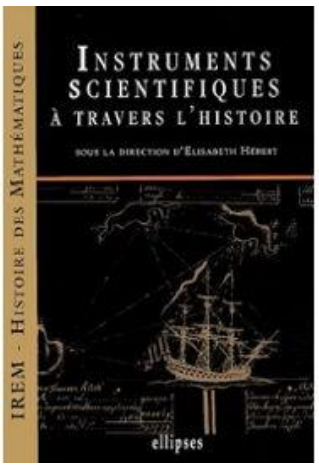
formule calculable par logarithmes (en supposant que $b>c$). Mais alors dans quel cas connaît-on le logarithme de la longueur d'un côté et non sa longueur ?

Probablement, et c'est une hypothèse, dans le cas de chaînes de triangles, comme par exemple pour le calcul du méridien, où seuls les angles étaient mesurés[5]. Travailler avec le logarithme des côtés permettait probablement de réduire les erreurs de calculs.

Enfin terminons par une référence à l'ouvrage de Baillerge[6], dans lequel on trouve, d'une part une démonstration géométrique des formules (1) et (2) et d'autre part un exemple de calcul.
Les machines à calculer, les ordinateurs et leurs programmes dédiés ont rendus désuète cette formule, merci à Ru-BRI-COLLAGE de l'avoir remise en lumière.

Question non résolue, j'ai lu plusieurs fois que les tables de logarithmes de tangentes étaient plus précises que les tables de logarithmes de sinus. Pourquoi ? Ce qui pourrait être aussi une explication à l'utilisation de cette formule.

1. *Instruments scientifiques à travers l'histoire* sous la direction d'Elisabeth Hébert, Ellipses
2. *Cours de trigonométrie à l'usage des candidats au baccalauréat*, Ed Félix Alcan, deuxième édition, 1896
3. *Leçons élémentaires de mathématiques* de Mr l'abbé de La Caille, 1784
4. *Topométrie générale*, tome 2, cours du CNAM, 1946
5. Un côté, nommé base, était mesuré avec beaucoup de précaution, et une base à la fin de la chaîne afin d'évaluer l'erreur.
6. *Nouveau traité de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*, 1866



Des problèmes

114-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Soit (S_n) la suite numérique vérifiant
$S_1 = 1$
$S_2 = 2 + 3$
$S_3 = 4 + 5 + 6$
$S_4 = 7 + 8 + 9 + 10$
$S_5 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15$
etc.
Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?

114-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Sur un échiquier infini un roi entame une marche au hasard. Quelle est la probabilité qu'il repasse au moins une fois sur sa case de départ en un temps fini ?

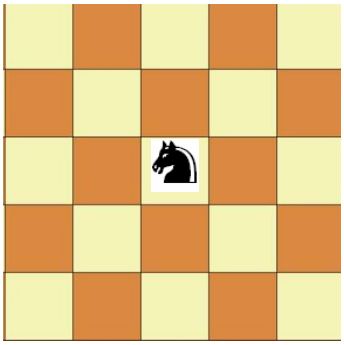
114-3 *proposé par Jean-Paul Mercier (Nouaille-Maupertuis)* :

Connaître deux nombres rationnels dont la somme est égale au produit.

Des solutions

113-3 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Il s'agit de déterminer l'existence d'un parcours rentrant du cavalier sur un petit échiquier 5x5, c'est-à-dire de savoir si le cavalier peut visiter les 25 cases une seule fois chacune et terminer à un saut de sa case de départ.



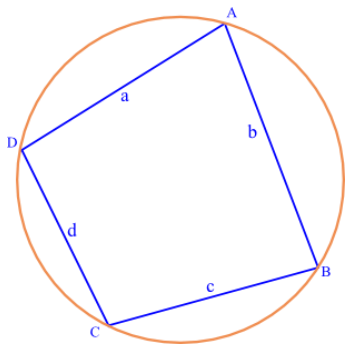
Solution de l'auteur

Il faut d'abord remarquer que le cavalier se pose alternativement sur des cases de couleurs différentes. Par ailleurs sur le diagramme présenté ci-dessus il y a 13 cases blanches et 12 cases noires. Le cavalier va donc effectuer 24 sauts pour visiter une seule fois chaque case. Se trouvant au départ sur une case blanche, après 24 sauts il se retrouvera encore sur une case blanche et ne pourra donc être à un saut de sa case blanche de départ. Bien sûr le même raisonnement reste applicable s'il y a 13 cases noires et 12 cases blanches ou si le cavalier est placé au départ sur une case noire.

112-1 *proposé par Georges Guenim* :
La formule de Brahmagupta donnant l'aire d'un quadrilatère inscriptible est très facile à établir avec la trigonométrie, mais comment la démontrer sans ?

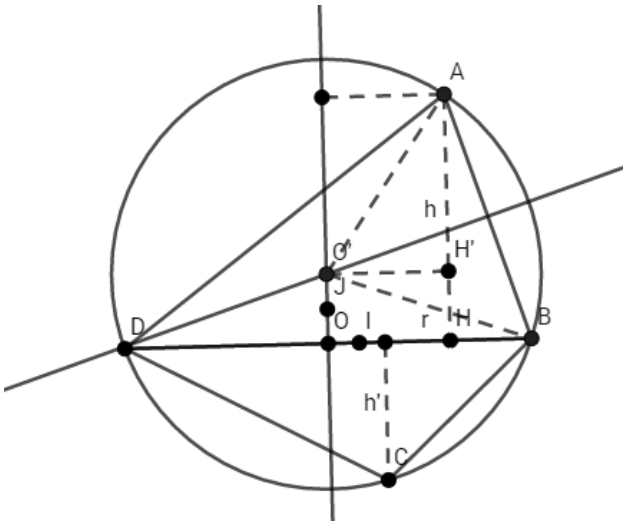
$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ désigne le demi-périmètre du quadrilatère de côtés a, b, c et d et S son aire.



Solution de Frédéric de Ligt

On note r le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD (supposé convexe). On conserve les notations de l'énoncé. On travaille dans un premier temps dans le triangle ABD. On note h la hauteur issue de A du triangle ABD et H son pied. On va établir d'abord que $ab=2rh$.
On introduit pour cela un repère orthonormé direct (O ; I, J) où O est le milieu de [BD] et [OI) = [OB).
On note $A(\alpha;h)$; $B(\beta;0)$; $D(-\beta;0)$. On a donc $\beta>0$ et $-\beta<\alpha<\beta$.



On cherche les coordonnées de O', centre du cercle circonscrit à ABD.
Soit $M(x,y)$ un point de la médiatrice de [AB]. On a MA² = MB². On tire de cette égalité l'équation cartésienne de cette droite :

$y=\dfrac{\beta-\alpha}{h}x+\dfrac{\alpha^2+h^2-\beta^2}{2h}$. On a donc $O'(0\,;\dfrac{\alpha^2+h^2-\beta^2}{2h})$.

Par conséquent après avoir exprimé la distance r = O'B :

$$r^2 4h^2=(\alpha^2+h^2-\beta^2)^2+4h^2\beta^2=\alpha^4+h^4+\beta^4+2h^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2+2h^2\beta^2$$

Maintenant on travaille l'expression a^2b^2 :
Avec le triangle ADH on obtient que $a^2=h^2+(\beta+\alpha)^2$ et avec le triangle ABH $b^2=h^2+(\beta-\alpha)^2$.
On a donc

$$a^2b^2=(h^2+(\beta+\alpha)^2)(h^2+(\beta-\alpha)^2)=h^4+\beta^4+\alpha^4+2h^2\beta^2+2h^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2$$

En conséquence $a^2b^2=4r^2h^2$ et donc on a bien $ab=2rh$.
On note h' la hauteur issue de C du triangle BCD et $C(\alpha'\,;-h')$ avec $-\beta<\alpha'<\beta$. On montrerait de la même façon qu'auparavant que $cd=2rh'$ et donc que $ab+cd=2r(h+h')$. L'aire du quadrilatère ABCD s'exprime sous la forme $\beta(h+h')$.

Par ailleurs

$$a^2 = h^2 + (\beta+\alpha)^2 \ ; \ b^2 = h^2 + (\beta-\alpha)^2 \ ; \ c^2 = h'^2 + (\beta-\alpha')^2 \ ; \ d^2 = h'^2 + (\beta+\alpha')^2 .$$

Par conséquent on a :

$a^2+b^2 = 2h^2+2\beta^2+2\alpha^2 = 4\beta^2+2(h^2+\alpha^2-\beta^2)$ et $c^2+d^2 = 2h'^2+2\beta^2+2\alpha'^2 = 4\beta^2+2(h'^2+\alpha'^2-\beta^2)$.

D'où

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = 2(h^2+\alpha^2-\beta^2)-2(h'^2+\alpha'^2-\beta^2).$$

Mais on peut aussi dire que $O'(0\ ; \frac{-\alpha'^2-h'^2+\beta^2}{2h'})$ en écrivant que $MB^2 = MC^2$. On en déduit que

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = 4(h+h')\frac{h^2+\alpha^2-\beta^2}{2h}.$$

La fin de ce calcul pénible et délicat est en vue :

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(4Aire(\mathrm{ABCD}))^2 \\
&= (4(h+h')\frac{h^2+\alpha^2-\beta^2}{2h})^2+(4(h+h')\beta)^2 \\
&= (4(h+h'))^2((\frac{h^2+\alpha^2-\beta^2}{2h})^2+\beta^2) \\
&= (4(h+h')r)^2 \\
&= (2(ab+cd))^2
\end{aligned}$$

On aboutit à

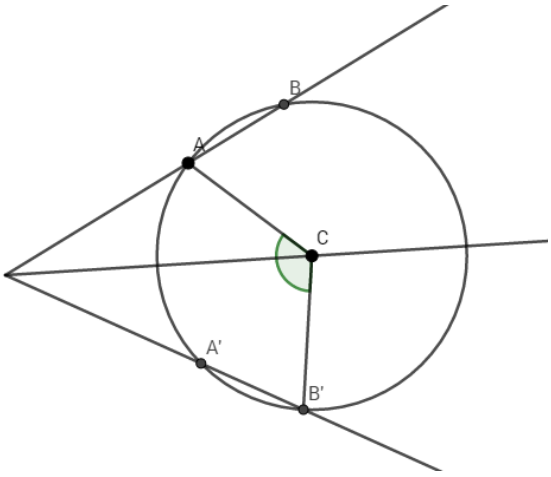
$$(4Aire(ABCD))^2 = (2(ab+cd))^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = \left((a+b)^2-(c-d)^2\right)\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)$$

et la conclusion est aisée.

.

113-4 *proposé par Jacques Chayé* :

Soit C un point quelconque de la bissectrice d'un angle donné. De ce point C comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence qui rencontre les côtés de l'angle aux points A, B, A', B'. Démontrer que la grandeur de l'angle $A\hat{C}B'$ ne dépend ni de la position du point C sur la bissectrice, ni du rayon de la circonférence.



Solution de Jean-Paul Guichard

Si I est le milieu de [AB], l' celui de [A'B'], l'angle $A\hat{C}B'$ est égal à l'angle $I\hat{C}I'$ car les angles $A\hat{C}I$ et $B'\hat{C}I'$ sont égaux. Or l'angle $I\hat{C}I'$ est constant, comme supplémentaire de l'angle donné.