

Histoire d'algorithmes

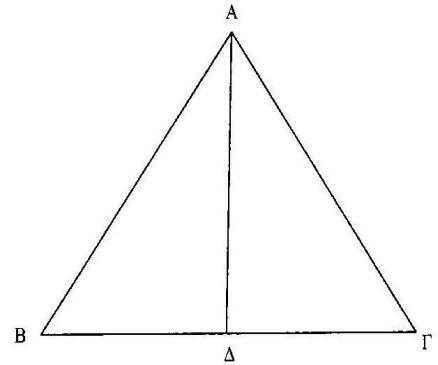
Thierry Chevalarias, Frédéric De Ligt, Jean-Paul Guichard , IREM de Poitiers

Épisode 4 : L'algorithmique à Alexandrie : Héron (2)*

4) Triangle équilatéral : aire (I 17, trad. Acerbi & Vitrac)

XVII Soit en premier lieu un triangle équilatéral dont chaque côté est de 10 unités. Et que ce soit $AB\Gamma$.

Qu'une [droite] $A\Delta$ soit menée perpendiculaire à ΓB .
Et puisque $B\Gamma$ – c'est-à-dire AB – est double de $B\Delta$, le [carré] sur AB est donc quadruple de celui sur $B\Delta$; de sorte que celui sur $A\Delta$ est triple de celui sur ΔB ; or quadruple de celui sur ΔB est celui sur $B\Gamma$: celui sur $B\Gamma$ sera donc épitrète ($1/3$ en plus, donc $4/3$) de celui sur $A\Delta$; celui sur $B\Gamma$ relativement à celui sur $A\Delta$ a donc comme rapport celui qu'[a] 4 relativement à 3 ; et [qu'ils soient] tous [multipliés] par celui sur $B\Gamma$ – d'où, aussi bien celui sur $B\Gamma$ par lui-même que celui sur $A\Delta$ par celui sur $B\Gamma$ – ; la *dunamodunamis* (puissance 4) sur $B\Gamma$ a donc comme rapport, relativement au [carré] sur $B\Gamma$ par celui sur $A\Delta$, celui qu'[a] 4 relativement à 3 – c'est-à-dire celui qu'[a] 16 relativement à 12 ; mais le [carré] sur $B\Gamma$ par celui sur $A\Delta$ est le [rectangle contenu] par $A\Delta$, $B\Gamma$ par lui-même – c'est-à-dire deux triangles par eux-mêmes ; la *dunamodunamis* sur $B\Gamma$ relativement à deux triangles par eux-mêmes a donc comme rapport celui qu'[a] 16 relativement à 12 ; or deux triangles par eux-mêmes sont quadruples d'un seul triangle par lui-même ; la *dunamodunamis* sur $B\Gamma$ relativement à un seul triangle par lui-même a donc comme rapport celui qu'[a] 16 relativement à 3 ; et la *dunamodunamis* sur $B\Gamma$ est donnée – puisque $B\Gamma$ l'est aussi – : l'aire du triangle par elle-même est donc donnée ; de sorte aussi que le triangle lui-même est donné.



Et, en conséquence de l'analyse, cela sera synthétisé ainsi.

Les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par eux-mêmes : il en résulte 10000 ; de ceux-ci, prends les 3/16 : il en résulte 1875 ; de ceux-ci, prends un côté ; et puisqu'ils n'ont pas un côté exprimable, qu'il soit pris de manière approchée avec une différence, comme nous l'avons appris ; et l'aire sera $43\frac{1}{2}$.

Algorithme : $c \rightarrow c^2 \rightarrow c^4 \rightarrow 3/16 c^4 \rightarrow \text{rac}(3/16 c^4) = S$;

À comparer avec le même problème chez Columelle (Livre V, *De re rustica* , dans Vitrac, Héron d'Alexandrie et le corpus métrologique : état des lieux) :

Dans le cas où vous devriez mesurer un triangle à trois côtés égaux, vous opéreriez de la manière suivante.

Soit un champ triangulaire offrant sur chaque côté trois cents pieds ; multipliez ce nombre par lui-même, prenez le tiers de quatre-vingt-dix mille, produit de cette multiplication, c'est-à-dire trente mille, puis le dixième qui est de neuf mille ; réunissez ces deux sommes, vous trouverez trente neuf mille, nombre de pieds carrés que contient ce triangle, et qui équivalent à un jugère un trient et un sicilique.

L'algorithme ($c \rightarrow c^2 \rightarrow 1/3 c^2$, $1/10 c^2 \rightarrow 1/3c^2 + 1/10c^2 = S$) est donné sans démonstration.

On trouve aussi, dans le corpus pseudo héronien, pour le triangle équilatéral, un autre algorithme sans démonstration, attribué à Archimède par Diophane (Acerbi et Vitrac, *Metri-ca*, p. 191) : $c \rightarrow c^2 \rightarrow 13c^2 \rightarrow 3/10 (13c^2) = S$.

On peut remarquer que l'algorithme de Héron, grâce à l'utilisation d'une puissance 4, fait rare, place ainsi le calcul de la racine en position terminale, ce qui permet dans certains cas d'avoir la valeur exacte, et pour les autres d'utiliser une table ou d'enchaîner un nouvel algorithme pour calculer la racine. Alors que les autres algorithmes utilisent des coefficients approchés, valeurs approchées connues de racines connues.

5) Cercle : aire et périmètre (I 26, trad. Acerbi & Vitrac)

XXVI Alors, d'une part, Archimède démontre dans la *Mesure du cercle* que 11 carrés sur le diamètre du cercle sont, à très peu près, égaux à 14 cercles ; de sorte que, *si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 10 unités, il faudra faire les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par les 11 : il en résulte 1100 ; dont [on prend] le 14^e : il en résulte 78 1/2 1/14. Il faut déclarer que l'aire du cercle est autant que cela.*

D'autre part, le même Archimède démontre dans l'[écrit] *Sur les plinthes et les cylindres* que le périmètre de tout cercle, relativement au diamètre, a un rapport, d'une part plus grand que celui qu'a 21 1875 relativement à 6 7441, d'autre part plus petit que celui qu'a 19 7888 relativement à 6 2351.

Mais puisque ces nombres ne s'appliquent pas bien aux mensurations, ils sont ramenés à des nombres minimaux, comme le 22 relativement aux 7 ; de sorte que, *si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 14 unités, et qu'on veuille trouver le périmètre, il faut faire les 14 par les 22 et, de ceux-ci, prendre le septième et déclarer qu'autant que cela est le périmètre ; et il est de 44 unités.*

Et inversement aussi, *si le périmètre est donné de 44 unités et que nous voulions trouver le diamètre, nous ferons les 44 sept fois et, prenant le 22^e, de ce qui en résulte, nous aurons le diamètre ; et c'est 14.*

Et le même Archimède démontre, dans la *Mesure du cercle*, que le [rectangle contenu] par la circonférence du cercle et le rayon est double du cercle ; de sorte que, *si le périmètre est donné de 44 unités, prenant la moitié du diamètre – et ce sont 7 unités –, nous les multiplierons par les 44 et, prenant la moitié de ce qui en résulte – et ce sont 154 unités –, nous déclarerons que l'aire du cercle est autant que cela.*

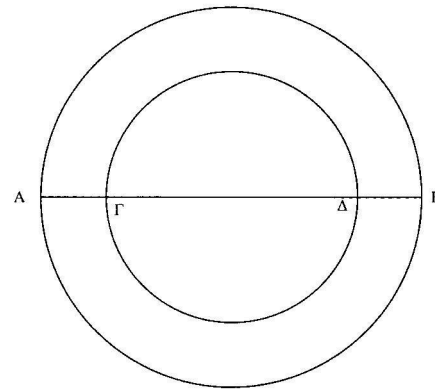
Et si, étant donné un certain domaine, ou bien rectiligne ou bien quelconque, il faut fournir un cercle égal à celui-ci, *prenant l'aire du domaine – et qu'elle soit de 154 unités –, de ceux-ci, les 14 onzièmes, qui deviennent 196 ; et de nouveau de ceux-ci, prenant un côté – et il est de 14 unités –, nous déclarerons le diamètre du cercle autant que cela.*

Deux cercles étant autour du même centre, il est possible de trouver le domaine compris entre leurs circonférences en mesurant chacun des deux cercles et en retranchant le plus petit du plus grand. Mais, afin que nous n'ayons pas à faire la mesure des deux cercles, nous démontrerons [les choses] ainsi.

Soient deux cercles autour du même centre, dont AB, ΓΔ sont des diamètres.

Alors, puisque l'aire du plus grand cercle résulte des 11/14 du [carré] sur AB et semblablement l'aire du plus petit cercle résulte des 11/14 du [carré] sur ΓΔ, des 11/14 de l'excès des [carrés]

sur AB , $\Gamma\Delta$ résulte donc l'aire dudit domaine, celui que l'on appelle « jante ». Or l'excès des [carrés] sur AB , $\Gamma\Delta$ est le quadruple du [rectangle contenu] par ΓB , $B\Delta$ – puisqu'alors, précisément, aussi le quadruple du [rectangle contenu] par ΓB , $B\Delta$ avec le [carré] sur $\Gamma\Delta$ est égal au [carré] sur ΓB , $B\Delta$, l'une avec l'autre – ; or, ΓB , $B\Delta$, l'une avec l'autre, est égale à AB – puisqu'alors, précisément, $B\Delta$ est égale à $A\Gamma$ – ; de sorte que si d'une part $\Gamma\Delta$ est donnée de 14 unités, d'autre part chacune des deux $A\Gamma$, $B\Delta$ de 6 unités, $B\Gamma$ sera de 20 unités. Ceux-ci par les 6 : il en résulte 120 ; ceux-ci, quatre fois : il en résulte 480 ; de ceux-ci, les $11/14$. Il en résulte $377 \frac{1}{7}$. Autant que cela sera l'aire de la jante.



Références

- HÉRON d'Alexandrie, *Metrica*, introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, Fabrizio Serra éditeur, Pise-Rome, 2014.
- VITRAC Bernard, *Héron d'Alexandrie et le corpus métrologique : état des lieux*, Géométrie(s), pratiques d'arpentage et enseignement : quels liens et dans quel contexte ?, Mars 2010, Paris, France. <hal-00473981>. En ligne sur HAL (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00473981/PDF/Heron_d_Alexandrie_et_le_corpus_metrologique.pdf), 2010.

* Les lecteurs avertis auront remarqué que ce quatrième épisode des histoires d'algorithme suit un épisode paru dans Corol'aire 113 indûment appelé : *Episode 2 : L'algorithme au temps des pharaons*. Il s'agit d'un malencontreux résidu de Corol'aire 112 et le titre correct était *Épisode 3 : L'algorithme à Alexandrie : Héron (1)*.