Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l' Enseignement
Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

Corol'aire

Septembre 2018 n°114

Sommaire

Injonctions contradictoires

Sébastien Dassule-Debertonne

Depuis la publication du rapport Villani-Torossian, nous entendons qu'il est nécessaire de donner du sens aux mathématiques, en le construisant par de la manipulation et par de l'ancrage dans des situations réelles. Avec l'idée, avais-je cru comprendre, de les rendre accessibles et attractives, au moins dans les classes les moins spécialisées (du primaire à la seconde), pour former des citoyens capables d'analyser des situations scientifiques.
Les premières fuites sur les programmes de seconde balaient d'un revers de main cette idée. Bien évidemment, la recherche de problème reste explicitement indiquée mais le niveau d'abstraction que suggère ce programme et les capacités attendues, pour ambitieux qu'ils soient, semblent bien éloignés du niveau des élèves que nous rencontrons. D'autant que la quantité des notions à aborder ne diminue pas, au contraire.
Il faudra être ingénieux pour sortir du cadre strict des mathématiques avec ce programme, à l'exception bien sûr de quelques points.
Certainement, un des objectifs est de pouvoir repérer les élèves qui pourront suivre l'enseignement de spécialité en première. Leur niveau sera peut-être accru, pour peu qu'on réussisse à les recruter. Mais cela nie de façon éhontée l'hétérogénéité croissante à l'entrée du lycée.
Comment démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ alors même que l'on relève de plus en plus d'élèves arrivant en seconde en confondant $2x$ et x^2 ?
Finalement, je crains, une fois encore, que l'ambition de ce programme ne se heurte trop fortement à la réalité et que beaucoup d'entre nous se retrouvent à le survoler ou bien à ne s'adresser qu'à une partie des élèves. Et, finalement, ce sera encore l'image de notre discipline que l'on va écorner.
Pourrait-on, dans les classes non expertes, nous laisser le temps d'approfondir les notions, en étant ambitieux sur la qualité de la maitrise des notions plutôt que sur leur quantité ? En résumé, l'irrationalité de $\sqrt{2}$ oui, à condition qu'une bonne maitrise des nombres soit un prérequis.
Je m'emballe, j'espère, car nous n'avons finalement que les projets de programme. N'hésitez pas à nous faire parvenir vos remarques (même si vous n'êtes pas d'accord avec cet éditorial) à l'adresse apmep.poitiers@free.fr car l'APMEP fera ses propositions à l'occasion de la consultation qui se tiendra en novembre.

Chantal et Estelle ont quitté notre groupe.

Estelle nous aura fait profiter quelques années de sa jeunesse, de son énergie, de son dynamisme. Nous l'encourageons dans sa nouvelle vie même si nous la voyons partir avec regret.

Chantal faisait partie de l'équipe depuis 25 ans et prenait une part active à l'organisation de l'ensemble du Rallye. Toujours prête pour gérer un courrier, relire un article, proposer un nouveau thème, sans compter tous les petits problèmes de son invention… Elle nous forçait à aller de l'avant !

Elle nous laisse un peu orphelins et le rallye 2019 sera pour nous un défi. Mais nous aurons à cœur de le relever pour qu'elle soit fière de nous !

Merci à vous deux pour tout ce que vous avez pu apporter et bon vent !

Place à Math en jeu

En lien avec le thème de la Semaine nationale des mathématiques : « Jouons ensemble aux mathématiques », nous avons retenu « **Math en jeu** » pour celui du Rallye 2019.

L'enjeu de cette édition sera de faire des mathématiques un jeu. Le contenu des épreuves concernant ce thème n'est pas encore arrêté. Cela aura été l'objet de notre réunion du 3 octobre.

Par ailleurs, les épreuves et solutions de l'édition 2018 sont sur le site de la Régionale. Vous y trouverez aussi le bilan et les morceaux choisis présentés lors de la remise des prix au Pôle Sciences de l'Université de La Rochelle.

Le calendrier

Les épreuves auront lieu pendant la Semaine nationale des mathématiques le mardi 12 mars 2019.

Vous recevrez le courrier d'inscription fin novembre 2018, et les épreuves préparatoires seront sur le site de la Régionale début décembre.

La date limite des inscriptions est fixée au 14 janvier 2019.

Compte-rendu du comité du 26 septembre 2018

Journées Nationales 2021
Les démarches prévues ont été réalisées pour obtenir un ordre de grandeur du budget. Les prospections pour les lieux ont commencé avec des premiers devis pour le Palais des Congrès sur le site du Futuroscope.
De même, des contacts sont établis au niveau du conseil départemental Un rendez-vous avec le président est prévu. Nous prévoyons aussi un entretien auprès de M. Claeys, président de Grand Poitiers.
L'idée d'un « Off des journées » est évoquée avec l'organisation d'une conférence pour les enfants le vendredi précédant les Journées.
Un vote unanime nous lance dans l'aventure ! Les idées filent sur le thème, mais les détails seront abordés au sein d'un groupe de travail *spécial Journées* auquel tout volontaire sera le bienvenu.

Journée de la Régionale
Voir le compte-rendu joint page 12.

Expositions
Expo 2020
Il faut finaliser le contenu et le matériel d'accompagnement pour les élèves dans les différents pôles en prévision d'une rencontre imminente avec des responsables de l'Espace Mendès France.

Les expositions itinérantes continuent de tourner :
On attend la migration du site internet pour mettre les informations pratiques nécessaires à une location hors de la région.
Maths et Puzzle est demandée pour 10 semaines. L'article réalisé pour le prix d'Alembert va être publié dans la version numérique d' « Au fil des maths ».
Comment tu comptes est demandée pour 2 semaines.
Elle est maintenant dotée de :

- 3 machines à calculer anciennes,
- ardoises blanches permettant de réaliser facilement les manipulations de calcul proposées sur les panneaux,
- réglettes de Genaille et de Lucas fabriquées par M. Celerier.

L'exposition *Cubes* va être scindée pour proposer des mallettes pédagogiques utilisables lors d'événements divers.

Rallye
Chantal et Estelle ont quitté le groupe rallye pour d'autres horizons. C'est une très lourde perte tant sur le plan du travail accompli que sur le plan amical. Mais le nouveau rallye est déjà en route ! Nous cherchons à décliner le thème « Math en jeu ».
Il faut passer au stade suivant concernant la pérennisation des subventions et des partenaires. Il faudrait un.e coordinateur.trice pour répertorier les sponsors, organiser les demandes, suivre les démarches, penser aux logos, remerciements…
Afin de convaincre les AMOPA de Charente ou des Deux-Sèvres de nous soutenir, la remise des prix pourrait avoir lieu dans le 16 ou le 79.
Une IMP à partager en 4 a été proposée comme l'an passé par l'inspection pédagogique régionale. Nous allons la répartir entre 4 membres actif.ve.s de l'équipe. L'association peut ainsi être soulagée de 1200 euros de frais de déplacement.

Divers
Notre association régionale est dorénavant reconnue d'utilité publique. Les dons donnent donc droit à une réduction d'impôts égale à 66 % de leur montant..

Calendrier
Le prochain comité aura lieu le 12 décembre 2018 à 15h à l'IREM de Poitiers.

Nota

L'adresse de la Régionale change (pas de déménagement, ceci est purement formel). Écrivez-nous :

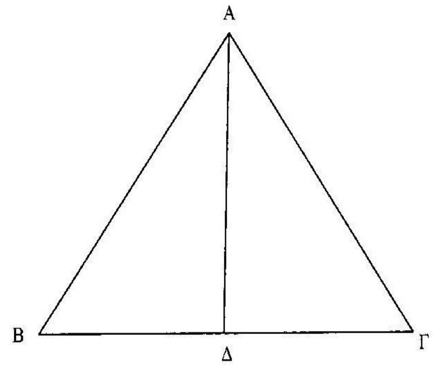
Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3
SP2MI Futuroscope, Bd Marie et Pierre Curie
TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Thierry Chevalarias, Frédéric De Ligt, Jean-Paul Guichard , IREM de Poitiers

Épisode 4 : L'algorithmique à Alexandrie : Héron (2)*

4) Triangle équilatéral : aire (I 17, trad. Acerbi & Vitrac)

XVII *Soit en premier lieu un triangle équilatéral dont chaque côté est de 10 unités. Et que ce soit ABΓ.*



Qu'une [droite] AΔ soit menée perpendiculaire à ΓB. Et puisque BΓ – c'est-à-dire AB – est double de BΔ, le [carré] sur AB est donc quadruple de celui sur BΔ ; de sorte que celui sur AΔ est triple de celui sur ΔB ; or quadruple de celui sur ΔB est celui sur BΓ : celui sur BΓ sera donc épitrite (*1/3 en plus, donc 4/3*) de celui sur AΔ ; celui sur BΓ relativement à celui sur AΔ a donc comme rapport celui qu'[a] 4 relativement à 3 ; et [qu'ils soient] tous [multipliées] par celui sur BΓ – d'où, aussi bien celui sur BΓ par lui-même que celui sur AΔ par celui sur BΓ – ; la *dunamodunamis* (*puissance 4*) sur BΓ a donc comme rapport, relativement au [carré] sur BΓ par celui sur AΔ, celui qu'[a] 4 relativement à 3 –c'est-à-dire celui qu'[a] 16 relativement à 12 ; mais le [carré] sur BΓ par celui sur AΔ est le [rectangle contenu] par AΔ, BΓ par lui-même – c'est-à-dire deux triangles par eux-mêmes ; la *dunamodunamis* sur BΓ relativement à deux triangles par eux-mêmes a donc comme rapport celui qu'[a] 16 relativement à 12 ; or deux triangles par eux-mêmes sont quadruples d'un seul triangle par lui-même ; la *dunamodunamis* sur BΓ relativement à un seul triangle par lui-même a donc comme rapport celui qu'[a] 16 relativement à 3 ; et la *dunamodunamis* sur BΓ est donnée –puisque BΓ l'est aussi – : l'aire du triangle par elle-même est donc donnée ; de sorte aussi que le triangle lui-même est donné.

Et, en conséquence de l'analyse, cela sera synthétisé ainsi.

Les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par eux-mêmes : il en résulte 10000 ; de ceux-ci, prends les 3/16 : il en résulte 1875 ; de ceux-ci, prends un côté ; et puisqu'ils n'ont pas un côté exprimable, qu'il soit pris de manière approchée avec une différence, comme nous l'avons appris ; et l'aire sera 43⅓ .

Algorithme : $c \rightarrow c^2 \rightarrow c^4 \rightarrow 3/16\ c^4 \rightarrow \text{rac}(3/16\ c^4) = S$;

À comparer avec le même problème chez Columelle (Livre V, *De re rustica* , dans Vitrac, Héron d'Alexandrie et le corpus métrologique : état des lieux) :

Dans le cas où vous devriez mesurer un triangle à trois côtés égaux, vous opéreriez de la manière suivante.

Soit un champ triangulaire offrant sur chaque côté trois cents pieds ; multipliez ce nombre par lui-même, prenez le tiers de quatre-vingt-dix mille, produit de cette multiplication, c'est-à-dire trente mille, puis le dixième qui est de neuf mille ; réunissez ces deux sommes, vous trouverez trente neuf mille, nombre de pieds carrés que contient ce triangle, et qui équivalent à un jugère un trient et un sicilique.

L'algorithme ($c \rightarrow c^2 \rightarrow 1/3\ c^2$, $1/10\ c^2 \rightarrow 1/3c^2+1/10c^2 = S$) est donné sans démonstration.

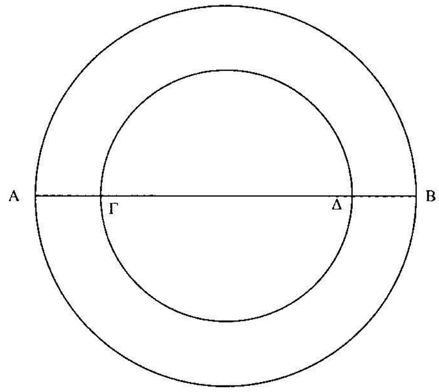
On trouve aussi, dans le corpus pseudo héronien, pour le triangle équilatéral, un autre algorithme sans démonstration, attribué à Archimède par Diophane (Acerbi et Vitrac, *Metrica*, p. 191) : $c \to c^2 \to 13c^2 \to 3/10\ (13c^2) = S$.

On peut remarquer que l'algorithme de Héron, grâce à l'utilisation d'une puissance 4, fait rare, place ainsi le calcul de la racine en position terminale, ce qui permet dans certains cas d'avoir la valeur exacte, et pour les autres d'utiliser une table ou d'enchainer un nouvel algorithme pour calculer la racine. Alors que les autres algorithmes utilisent des coefficients approchés, valeurs approchées connues de racines connues.

5) Cercle : aire et périmètre (I 26, trad. Acerbi & Vitrac)

> **XXVI** Alors, d'une part, Archimède démontre dans la *Mesure du cercle* que 11 carrés sur le diamètre du cercle sont, à très peu près, égaux à 14 cercles ; de sorte que, *si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 10 unités, il faudra faire les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par les 11 : il en résulte 1100 ; dont [on prend] le 14ᵉ : il en résulte 78 1/2 1/14. Il faut déclarer que l'aire du cercle est autant que cela.*
>
> D'autre part, le même Archimède démontre dans l'[écrit] *Sur les plinthides et les cylindres* que le périmètre de tout cercle, relativement au diamètre, a un rapport, d'une part plus grand que celui qu'a 21 1875 relativement à 6 7441, d'autre part plus petit que celui qu'a 19 7888 relativement à 6 2351.
>
> Mais puisque ces nombres ne s'appliquent pas bien aux mensurations, ils sont ramenés à des nombres minimaux, comme le 22 relativement aux 7 ; de sorte que, *si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 14 unités, et qu'on veuille trouver le périmètre, il faut faire les 14 par les 22 et, de ceux-ci, prendre le septième et déclarer qu'autant que cela est le périmètre ; et il est de 44 unités.*
>
> Et inversement aussi, *si le périmètre est donné de 44 unités et que nous voulions trouver le diamètre, nous ferons les 44 sept fois et, prenant le 22ᵉ, de ce qui en résulte, nous aurons le diamètre ; et c'est 14.*
>
> Et le même Archimède démontre, dans la *Mesure du cercle*, que le [rectangle contenu] par la circonférence du cercle et le rayon est double du cercle ; de sorte que, *si le périmètre est donné de 44 unités, prenant la moitié du diamètre – et ce sont 7 unités –, nous les multiplierons par les 44 et, prenant la moitié de ce qui en résulte – et ce sont 154 unités –, nous déclarerons que l'aire du cercle est autant que cela.*
>
> Et si, étant donné un certain domaine, ou bien rectiligne ou bien quelconque, il faut fournir un cercle égal à celui-ci, *prenant l'aire du domaine – et qu'elle soit de 154 unités –, de ceux-ci, les 14 onzièmes, qui deviennent 196 ; et de nouveau de ceux-ci, prenant un côté – et il est de 14 unités –, nous déclarerons le diamètre du cercle autant que cela.*
>
> Deux cercles étant autour du même centre, il est possible de trouver le domaine compris entre leurs circonférences en mesurant chacun des deux cercles et en retranchant le plus petit du plus grand. Mais, afin que nous n'ayons pas à faire la mesure des deux cercles, nous démontrerons [les choses] ainsi.
>
> Soient deux cercles autour du même centre, dont AB, ΓΔ sont des diamètres.
>
> Alors, puisque l'aire du plus grand cercle résulte des 11/14 du [carré] sur AB et semblablement l'aire du plus petit cercle résulte des 11/14 du [carré] sur ΓΔ, des 11/14 de l'excès des [carrés]

sur AB, ΓΔ résulte donc l'aire dudit domaine, celui que l'on appelle « jante ». Or l'excès des [carrés] sur AB, ΓΔ est le quadruple du [rectangle contenu] par ΓB, BΔ – puisqu'alors, précisément, aussi le quadruple du [rectangle contenu] par ΓB, BΔ avec le [carré] sur ΓΔ est égal au [carré] sur ΓB, BΔ, l'une avec l'autre – ; or, ΓB, BΔ, l'une avec l'autre, est égale à AB – puisqu'alors, précisément, BΔ est égale à AΓ – ; *de sorte que si d'une part ΓΔ est donnée de 14 unités, d'autre part chacune des deux AΓ, BΔ de 6 unités, BΓ sera de 20 unités. Ceux-ci par les 6 : il en résulte 120 ; ceux-ci, quatre fois : il en résulte 480 ; de ceux-ci, les 11/14. Il en résulte 377 1/7. Autant que cela sera l'aire de la jante.*



Références

- HÉRON d'Alexandrie, *Metrica*, introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, Fabrizio Serra éditeur, Pise-Rome, 2014.
- VITRAC Bernard, *Héron d'Alexandrie et le corpus métrologique : état des lieux*, Géométrie(s), pratiques d'arpentage et enseignement : quels liens et dans quel contexte ?, Mars 2010, Paris, France. <hal-00473981>. En ligne sur HAL (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00473981/PDF/Heron_d_Alexandrie_et_le_corpus_metrologique.pdf), 2010.

* Les lecteurs avertis auront remarqué que ce quatrième épisode des histoires d'algorithme suit un épisode paru dans Corol'aire 113 indûment appelé : *Episode 2 : L'algorithmique au temps des pharaons*. Il s'agit d'un malencontreux résidu de Corol'aire 112 et le titre correct était *Épisode 3 : L'algorithmique à Alexandrie : Héron (1).*

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Le problème 112-4 et sa solution par Jacques Chayé dans le numéro 113 de Corol'aire ont fait réagir Jean-Marie Parnaudeau de Poitiers. Voici son courrier fort documenté.

Dans la Ru-BRI-COLLAGE du numéro 113 de Corol'aire, on trouvait la démonstration de la formule de trigonométrie

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)} \quad (1).$$

« *La résolution des triangles est l'application fondamentale de la trigonométrie : c'est même l'étymologie du mot.*»[1]

On peut donc se poser la question de l'utilité d'une telle formule ; était-elle liée à un contexte particulier ou bien était-elle uniquement destinée à compléter un catalogue déjà bien fourni ?

En effet, si dans un triangle on connaît « deux côtés et l'angle compris », alors il est facile, avec des moyens de calculs actuels, de résoudre le triangle à l'aide des égalités $\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}$ connues aussi sous le nom de « loi des sinus ». Mais vous allez dire : quel est le rapport avec la formule (1) ? C'est ce que nous allons tenter d'élucider partiellement.

Avant d'aller plus loin trois remarques.

La première, à l'aide de ces égalités on avait une autre démonstration de l'égalité (1).

De $\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}$, on déduit $\frac{b-c}{\sin(\hat{B})\text{-}\sin(\hat{C})}=\frac{b+c}{\sin(\hat{B})+\sin(\hat{C})}$ et donc $\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin(\hat{B})\text{-}\sin(\hat{C})}{\sin(\hat{B})+\sin(\hat{C})}$ (2).

On conclut à l'aide des formules

$$\sin(\hat{B})+\sin(\hat{C})=2\sin\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)\cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(\hat{B})-\sin(\hat{C})=2\cos\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)\sin\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right).$$

L'égalité (1) peut s'écrire :

$$\frac{b-c}{b+c}\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)=\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right), \quad \text{soit} \quad \frac{b-c}{b+c}\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)=\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) \quad (3).$$

Cette formule permet, connaissant 2 côtés b et c ainsi qu'un angle $\hat{A}$, de trouver l'angle $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ et donc $\hat{B}$ et $\hat{C}$, puis a par une autre formule. Mais pourquoi une telle formule, alors qu'il est beaucoup plus facile de faire le calcul avec la loi des sinus pour résoudre ce triangle ?

La troisième, c'est qu'au XIXe siècle, même si les règles à calcul existaient, tous les calculs nécessitant une grande précision étaient faits par logarithmes. L'égalité (3) se prête à un calcul par logarithmes, ce qui n'est pas le cas si on utilise la loi des sinus.

Remontons dans le temps, la formule (1) faisait partie des formules qu'un bachelier, il y a plus d'un siècle, devait connaître. Elle figure par exemple dans le Combette[2] de 1896. On trouve cette

formule bien antérieurement, par exemple dans La Caille[3], mais aussi jusque dans les années 1950, par exemple dans le cours de Levallois[4]. Ensuite il semble que cette formule disparaisse des cursus scolaires ou universitaires et d'une certaine façon passe au « musée ». Mais pourquoi donc ?
Dans le Combette déjà cité, la formule (1) apparaît lors de l'étude des cas élémentaires de résolution de triangles, au paragraphe 181. Ce paragraphe traite du cas particulier où l'on connaît les logarithmes de b et de c et l'angle compris. En écrivant $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1-\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}$, en posant $\tan(\varphi)=\frac{c}{b}$, on obtient :

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{1-\tan(\varphi)}{1+\tan(\varphi)}, \qquad \text{soit} \quad \frac{b-c}{b+c}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$$

Dans ce cas la formule (3) s'écrit :

$$\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)=\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right),$$

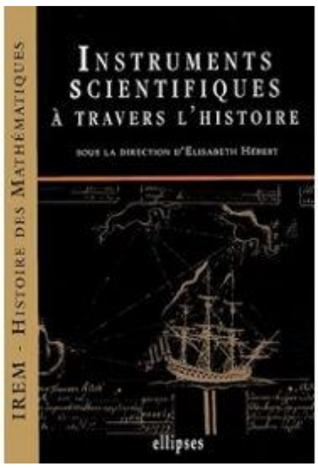
formule calculable par logarithmes (en supposant que $b>c$). Mais alors dans quel cas connaît-on le logarithme de la longueur d'un côté et non sa longueur ?

Probablement, et c'est une hypothèse, dans le cas de chaînes de triangles, comme par exemple pour le calcul du méridien, où seuls les angles étaient mesurés[5]. Travailler avec le logarithme des côtés permettait probablement de réduire les erreurs de calculs.

Enfin terminons par une référence à l'ouvrage de Baillerge[6], dans lequel on trouve, d'une part une démonstration géométrique des formules (1) et (2) et d'autre part un exemple de calcul.
Les machines à calculer, les ordinateurs et leurs programmes dédiés ont rendus désuète cette formule, merci à Ru-BRI-COLLAGE de l'avoir remise en lumière.

Question non résolue, j'ai lu plusieurs fois que les tables de logarithmes de tangentes étaient plus précises que les tables de logarithmes de sinus. Pourquoi ? Ce qui pourrait être aussi une explication à l'utilisation de cette formule.

1. *Instruments scientifiques à travers l'histoire* sous la direction d'Elisabeth Hébert, Ellipses
2. *Cours de trigonométrie à l'usage des candidats au baccalauréat*, Ed Félix Alcan, deuxième édition, 1896
3. *Leçons élémentaires de mathématiques* de Mr l'abbé de La Caille, 1784
4. *Topométrie générale*, tome 2, cours du CNAM, 1946
5. Un côté, nommé base, était mesuré avec beaucoup de précaution, et une base à la fin de la chaîne afin d'évaluer l'erreur.
6. *Nouveau traité de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*, 1866



Des problèmes

114-1 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)* :

Soit (S_n) la suite numérique vérifiant
$S_1 = 1$
$S_2 = 2 + 3$
$S_3 = 4 + 5 + 6$
$S_4 = 7 + 8 + 9 + 10$
$S_5 = 11 + 12 + 13 + 14 +15$
etc.
Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?

114-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Sur un échiquier infini un roi entame une marche au hasard. Quelle est la probabilité qu'il repasse au moins une fois sur sa case de départ en un temps fini ?

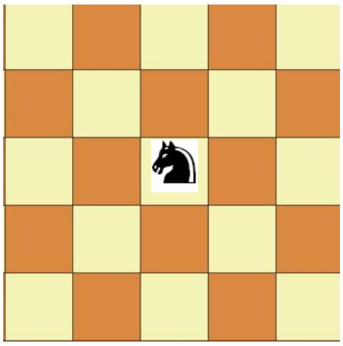
114-3 *proposé par Jean-Paul Mercier (Nouaille-Maupertuis)* :

Connaître deux nombres rationnels dont la somme est égale au produit.

Des solutions

113-3 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Il s'agit de déterminer l'existence d'un parcours rentrant du cavalier sur un petit échiquier 5x5, c'est-à-dire de savoir si le cavalier peut visiter les 25 cases une seule fois chacune et terminer à un saut de sa case de départ.



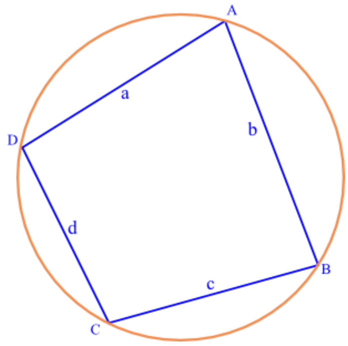
Solution de l'auteur

Il faut d'abord remarquer que le cavalier se pose alternativement sur des cases de couleurs différentes. Par ailleurs sur le diagramme présenté ci-dessus il y a 13 cases blanches et 12 cases noires. Le cavalier va donc effectuer 24 sauts pour visiter une seule fois chaque case. Se trouvant au départ sur une case blanche, après 24 sauts il se retrouvera encore sur une case blanche et ne pourra donc être à un saut de sa case blanche de départ. Bien sûr le même raisonnement reste applicable s'il y a 13 cases noires et 12 cases blanches ou si le cavalier est placé au départ sur une case noire.

112-1 *proposé par Georges Guenim* :
La formule de Brahmagupta donnant l'aire d'un quadrilatère inscriptible est très facile à établir avec la trigonométrie, mais comment la démontrer sans ?

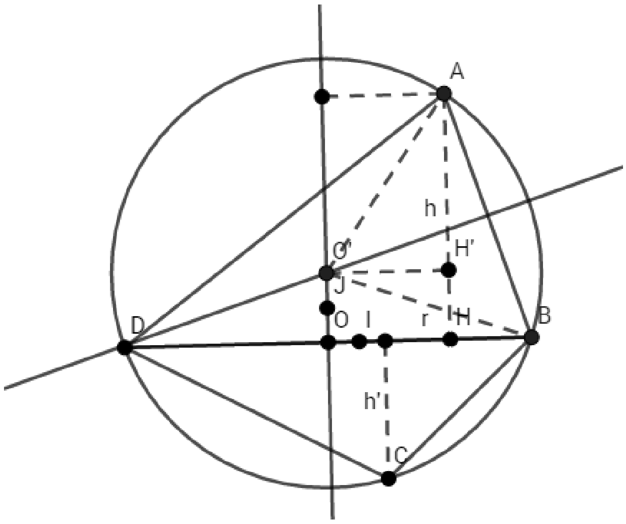
$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ désigne le demi-périmètre du quadrilatère de côtés a, b, c et d et S son aire.



Solution de Frédéric de Ligt

On note r le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD (supposé convexe). On conserve les notations de l'énoncé. On travaille dans un premier temps dans le triangle ABD. On note h la hauteur issue de A du triangle ABD et H son pied. On va établir d'abord que $ab=2rh$.
On introduit pour cela un repère orthonormé direct (O ; I, J) où O est le milieu de [BD] et [OI) = [OB). On note $\mathrm{A}(\alpha;h)$; $\mathrm{B}(\beta;0)$; $\mathrm{D}(-\beta;0)$. On a donc $\beta>0$ et $-\beta<\alpha<\beta$.



On cherche les coordonnées de O', centre du cercle circonscrit à ABD.
Soit $\mathrm{M}(x,y)$ un point de la médiatrice de [AB]. On a $\mathrm{MA}^2=\mathrm{MB}^2$. On tire de cette égalité l'équation cartésienne de cette droite :

$$y=\frac{\beta-\alpha}{h}x+\frac{\alpha^2+h^2-\beta^2}{2h}.$$ On a donc $\mathrm{O'}(0\,;\dfrac{\alpha^2+h^2-\beta^2}{2h})$.

Par conséquent après avoir exprimé la distance r = O'B :

$$r^2 4h^2=(\alpha^2+h^2-\beta^2)^2+4h^2\beta^2=\alpha^4+h^4+\beta^4+2h^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2+2h^2\beta^2$$

Maintenant on travaille l'expression a^2b^2 :
Avec le triangle ADH on obtient que $a^2=h^2+(\beta+\alpha)^2$ et avec le triangle ABH $b^2=h^2+(\beta-\alpha)^2$.
On a donc

$$a^2b^2=(h^2+(\beta+\alpha)^2)(h^2+(\beta-\alpha)^2)=h^4+\beta^4+\alpha^4+2h^2\beta^2+2h^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2$$

En conséquence $a^2b^2=4r^2h^2$ et donc on a bien $ab=2rh$.
On note h' la hauteur issue de C du triangle BCD et C(α' ; $-h'$) avec $-\beta<\alpha'<\beta$. On montrerait de la même façon qu'auparavant que $cd=2rh'$ et donc que $ab+cd=2r(h+h')$. L'aire du quadrilatère ABCD s'exprime sous la forme $\beta(h+h')$.

Par ailleurs

$$a^2 = h^2 + (\beta+\alpha)^2 \;\; ; \;\; b^2 = h^2 + (\beta-\alpha)^2 \;\; ; \;\; c^2 = h'^2 + (\beta-\alpha')^2 \;\; ; \;\; d^2 = h'^2 + (\beta+\alpha')^2 .$$

Par conséquent on a :

$$a^2 + b^2 = 2h^2 + 2\beta^2 + 2\alpha^2 = 4\beta^2 + 2(h^2 + \alpha^2 - \beta^2) \text{ et } c^2 + d^2 = 2h'^2 + 2\beta^2 + 2\alpha'^2 = 4\beta^2 + 2(h'^2 + \alpha'^2 - \beta^2) .$$

D'où

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(h^2 + \alpha^2 - \beta^2) - 2(h'^2 + \alpha'^2 - \beta^2) .$$

Mais on peut aussi dire que $O'(0\,;\dfrac{-\alpha'^2 - h'^2 + \beta^2}{2h'})$ en écrivant que $MB^2 = MC^2$. On en déduit que

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 4(h+h')\frac{h^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2h} .$$

La fin de ce calcul pénible et délicat est en vue :

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (4Aire(\mathrm{ABCD}))^2 \\
&= (4(h+h')\frac{h^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2h})^2 + (4(h+h')\beta)^2 \\
&= (4(h+h'))^2((\frac{h^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2h})^2 + \beta^2) \\
&= (4(h+h')r)^2 \\
&= (2(ab+cd))^2
\end{aligned}$$

On aboutit à

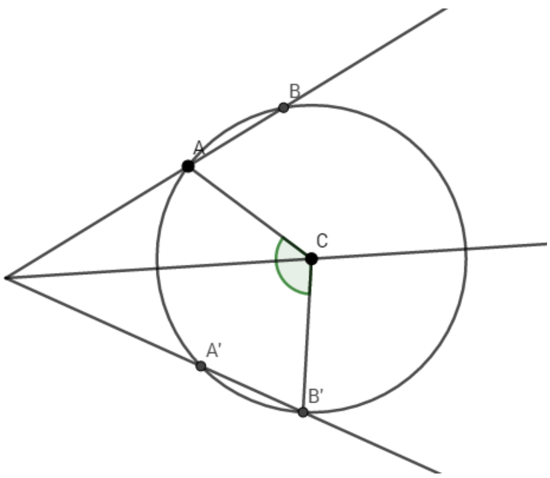
$$(4Aire(ABCD))^2 = (2(ab+cd))^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \left((a+b)^2 - (c-d)^2\right)\left((c+d)^2 - (a-b)^2\right)$$

et la conclusion est aisée.

.

113-4 *proposé par Jacques Chayé* :

Soit C un point quelconque de la bissectrice d'un angle donné. De ce point C comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence qui rencontre les côtés de l'angle aux points A, B, A', B'. Démontrer que la grandeur de l'angle $\widehat{ACB'}$ ne dépend ni de la position du point C sur la bissectrice, ni du rayon de la circonférence.



Solution de Jean-Paul Guichard

Si I est le milieu de [AB], I' celui de [A'B'], l'angle $\widehat{ACB'}$ est égal à l'angle $\widehat{ICI'}$ car les angles $\widehat{ACI}$ et $\widehat{B'CI'}$ sont égaux. Or l'angle $\widehat{ICI'}$ est constant, comme supplémentaire de l'angle donné.

Journée de la Régionale

Nous avons été accueilli.es le 10 octobre dernier pour la Journée de la Régionale au lycée de la Venise Verte à Niort.
70 enseignant.es du second degré et quelques professeur.es des écoles des Deux-Sèvres ont écouté le mot d'accueil de M. Durand, IA-IPR de mathématiques, dans lequel il rappelait la mise en place du rapport Villani-Torossian ainsi que de rares informations sur la réforme des lycées à venir.
Ensuite, Joëlle Lamon, venue de Belgique, nous a présenté une multitude de jeux utilisables en classe. Heureusement, son travail s'accompagne d'un site internet www.jeuxmath.be qui recense ces jeux (et bien d'autres choses). Un site à avoir dans ses marque-pages. Cette conférence précédait l'habituelle AG de l'association dont la principale annonce concernait l'organisation des Journées Nationales en 2021.
Après un repas très agréable préparé par les agents du lycée, nous avons poursuivi les travaux, qui autour de l'expo *Maths & Puzzles*, qui à l'atelier autour de la réforme des lycées (voir l'édito). Bien entendu, les débats ont été animés, mais une heureuse fuite survenue la nuit précédente nous a enfin apporté quelques éclairages.
Les stands de brochures, de l'APMEP et de l'IREM, ont accueilli les participants au cours des différentes pauses. Il faut dire que l'espace qui nous était réservé, récemment inauguré, donnait envie de s'y attarder.
La journée s'est achevée après les trois derniers ateliers dont les contenus transverses couvraient depuis les cours moyens jusqu'à la terminale.
Cette journée d'échange s'est déroulée, comme d'habitude, dans une bonne humeur bien agréable. Nous remercions le proviseur du lycée de la Venise Verte de son accueil, Raphaël Nivelle pour l'organisation et les agents pour la mise en place et l'accueil.

Une assistance impatiente de débuter les travaux.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. apmep.poitiers@free.fr
Tél. 06.09.99.30.82

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication S. Dassule-Debertonne
Comité de rédaction F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne, J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.
Imprimerie IREM de Poitiers. Adresse ci-dessus.
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège Social IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie 86962 Chasseneuil CEDEX
Dépôt légal Septembre 2018