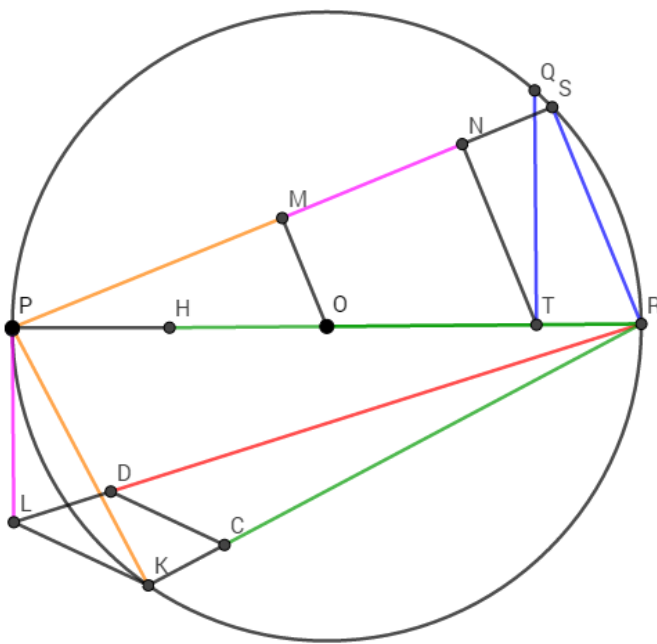


Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

113-1 proposé par Srinivasa Ramanujan (Madras) :



- Le cercle X a pour rayon r et pour centre O .
- $[PR]$ est un de ses diamètres.
- H est le milieu du segment $[PO]$.
- T est le point du segment $[OR]$ tel que $TR = OR/3$.
- La perpendiculaire à $[PR]$ en T coupe le cercle X en deux points et on note Q l'un de ces deux points.
- On place sur le demi-cercle contenant le point Q le point S tel que $QT = RS$.
- On place sur le segment $[PS]$ les points M et N tels que les droites (RS) , (TN) et (OM) soient parallèles.
- On place sur le demi-cercle ne contenant pas Q le point K tel que $PK = PM$.
- On trace la demi-droite d'origine P et perpendiculaire au diamètre $[PR]$ dans le demi-plan limité par (PR) et ne contenant pas Q .
- On place sur cette demi-droite le point L tel que $PL = MN$.
- On trace les segments $[RL]$, $[RK]$ et $[KL]$.
- On place sur le segment $[RK]$ le point C tel que $RC = RH$.
- On place sur le segment $[RL]$ le point D tel que les droites (CD) et (KL) soient parallèles.

Montrer que le carré de côté $[RD]$ a alors une aire égale à $\frac{355}{113}r^2$.

N.d.l.r. $\frac{355}{113} \approx 3,1415929$ est une approximation rationnelle de π dont le développement décimal est exact jusqu'à la sixième décimale. Une telle précision a été obtenue pour la première fois au V^e siècle par le chinois Tsu Chung-Chih. Il faudra attendre 1573 et l'allemand Valentinus Otho pour retrouver cette fraction dans le monde occidental. Ces données historiques ont été recueillies dans l'excellent livre de Jean-Paul Delahaye « Le fascinant nombre π » paru aux éditions Belin (1997).

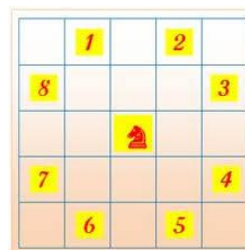
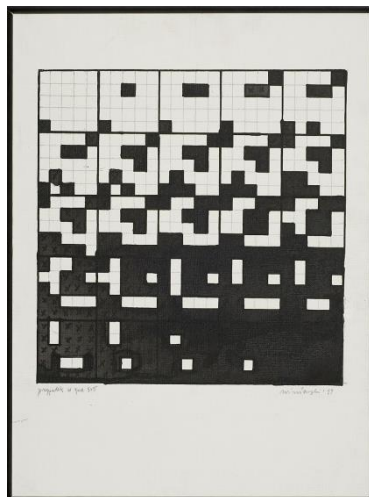
113-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :*

Les joueurs A et B posent à tour de rôle une pièce de 1 euro sur une table circulaire. A joue en premier. Une pièce placée ne peut chevaucher une pièce déjà placée et doit reposer entièrement sur la table. Toute pièce placée ne peut ensuite être déplacée. Le dernier joueur à pouvoir placer une pièce est le gagnant. Y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

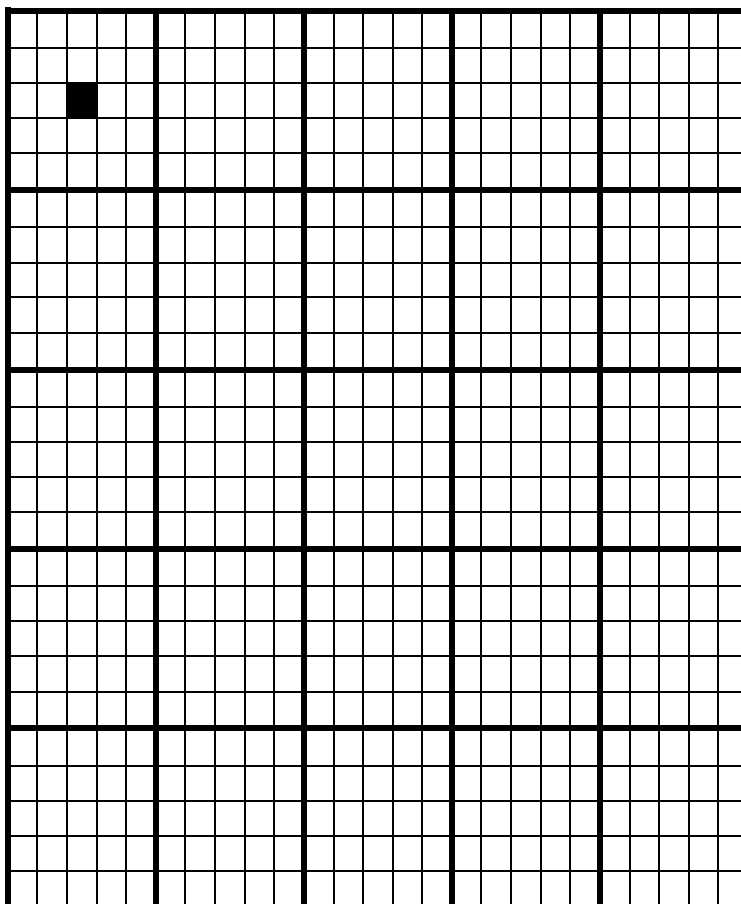
113-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon) :*

Dans l'épreuve finale du Rallye 2018 de seconde, il était proposé aux élèves de travailler sur l'œuvre intitulée « Jeu de grille 5 x 5 » (1999) de l'artiste polonais Ryszard Winiarski. Voici l'énoncé :

Jeu de grille 5x5 (1999)



Les 25 grilles 5 x 5 se remplissent progressivement d'une case noire à chaque étape. Selon quelle logique ? Difficile à dire. Voici un procédé plus simple. Vous connaissez le déplacement du cavalier au jeu d'échecs. À partir de sa position il peut atteindre au maximum huit cases sur l'échiquier. Utilisez ce mode de déplacement pour compléter progressivement les 24 grilles vierges restantes.

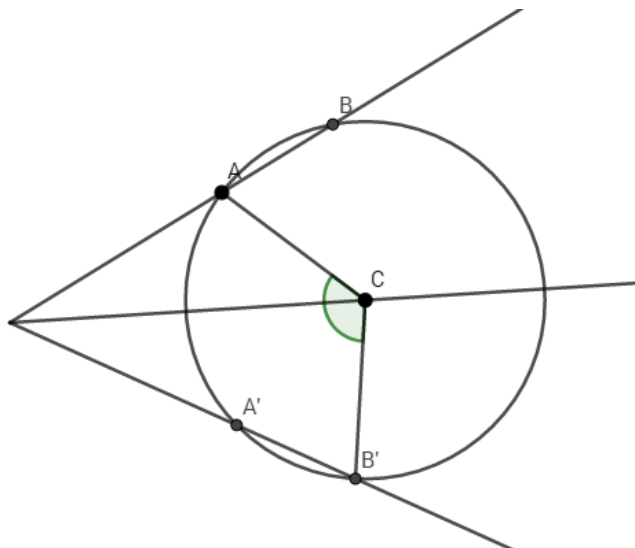


Je propose le prolongement suivant :

Est-il possible que la dernière case noircie soit située à un saut de cavalier de la case centrale noircie au départ ?

113-4 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :*

Soit C un point quelconque de la bissectrice d'un angle donné. De ce point C comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence qui rencontre les côtés de l'angle aux points A, B, A', B' . Démontrer que la grandeur de l'angle $\widehat{ACB'}$ ne dépend ni de la position du point C sur la bissectrice, ni du rayon de la circonférence.



Des solutions

109-3 *proposé par Dominique Gaud :*

À la lecture de l'ouvrage « En cheminant avec Kakeya » de Vincent Borelli et Jean-Luc Rullière (ENS éditions, 2014) on découvre page 43 un encadré intitulé « Comment obtenir l'aire de la sphère à partir de son volume ? ». On suppose connue l'expression du volume de la sphère en fonction de son rayon R . On applique ensuite une couche uniforme d'épaisseur x sur toute la surface de la sphère.

Son volume augmente alors de $\frac{4}{3}\pi(R+x)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi R x^2 + 4\pi R^2 x$.

La dérivée de cette expression est $4\pi x^2 + 8\pi R x + 4\pi R^2$ et la limite quand x tend vers 0 de cette dérivée est justement l'aire de cette sphère à savoir $4\pi R^2$. Cette procédure peut-elle encore s'appliquer aux cas du pavé droit, du cône droit, du tore, de l'ellipsoïde et du tétraèdre régulier ?



Solution de Frédéric de Ligt

Le pavé droit

V son volume, S son aire totale, L, l, h ses dimensions, x l'épaisseur de la couche uniforme.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \Delta V}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial((L+2x)(l+2x)(h+2x) - Llh)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} 24x^2 + 8x(L+l+h) + 2(Lh + Ll + hl) = 2(Lh + Ll + hl) = S.$$

Le tore

V son volume, S son aire totale, r le rayon du cercle, R la distance du centre du cercle à l'axe de rotation, x l'épaisseur de la couche uniforme.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \Delta V}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial(2\pi^2(r+x)^2 R - 2\pi^2 r^2 R)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial(2\pi^2 R(2rx + x^2))}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\pi^2 R(2r + 2x) = 4\pi^2 Rr = S.$$

Le tétraèdre régulier

V son volume, S son aire totale, a la longueur de son arête, r le rayon de la sphère inscrite, x l'épaisseur de la couche uniforme. Le solide résultant de l'application de cette couche est encore un tétraèdre régulier qui peut être obtenu à partir du tétraèdre initial par l'homothétie de centre le centre de la sphère inscrite et de rapport $\frac{r+x}{r}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \left(\frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \left(1 + \frac{x}{r}\right)^3 - \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \right)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \times 3 \left(1 + \frac{x}{r}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \times \frac{3}{r} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \times \frac{3}{\frac{a\sqrt{6}}{12}} = a^2 \sqrt{3} = S.$$

Le cône droit

V son volume, S son aire, R le rayon du disque de base, r le rayon de la sphère inscrite dans le cône, x l'épaisseur de la couche uniforme. Le solide résultant de l'application de cette couche est encore un cône droit qui peut être obtenu à partir du cône initial par l'homothétie de centre le centre de la sphère inscrite et de rapport $\frac{r+x}{r}$. On rappelle que $r = \frac{Rh}{R + \sqrt{R^2 + h^2}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \Delta V}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \left(1 + \frac{x}{r}\right)^3 - \frac{1}{3} \pi R^2 h \right)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \pi R^2 h \times 3 \left(1 + \frac{x}{r}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{3} \pi R^2 h \times \frac{3}{r} \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 h \times \frac{3}{\frac{Rh}{R + \sqrt{R^2 + h^2}}} = \pi R \left(R + \sqrt{R^2 + h^2} \right) = S. \end{aligned}$$

L'ellipsoïde de révolution

On suppose que l'ellipse tourne autour de son grand axe.

V son volume, S son aire, a la longueur de son grand axe, b la longueur de son petit axe.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \Delta V}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial(\pi(a+x)(b+x)^2 - \pi ab^2)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial(\pi(x^3 + (2b+a)x^2 + (2ab+b^2)x))}{\partial x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \pi(3x^2 + 2(2b+a)x + 2ab + b^2) = \pi(2ab + b^2) \neq S \end{aligned}$$

La méthode est en échec sur l'ellipsoïde. Ce n'est pas étonnant car la couche qui sépare l'ellipse initiale et l'ellipse de grand axe $a+x$ et de petit axe $b+x$ n'a pas une épaisseur constante égale à x . Inversement si l'on construit la courbe obtenue après application d'une couche uniforme d'épaisseur x autour de l'ellipse initiale on n'obtient pas une ellipse. C'est un problème qui se pose parfois aux ébénistes.

111-2 proposé par Frédéric de Ligt :

Pour quelles valeurs de l'entier n la fraction $\frac{3}{n}$ est-elle la somme de deux inverses d'entiers distincts ?

Solution de l'auteur

Si $n = 3k$, k entier non nul, on a la décomposition possible suivante : $\frac{3}{n} = \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$.

Si $n = 2k$, k entier non nul, on a la décomposition possible suivante : $\frac{3}{n} = \frac{3}{2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k}$.

Si $n = 6k+5$, k entier naturel, on a la décomposition suivante : $\frac{3}{6k+5} = \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{(2k+2)(6k+5)}$.

Si $n = 6k+1$, k entier naturel, et n est divisible par un entier de la forme $6k'+5$ alors on a la décomposition suivante : $\frac{3}{6k+1} = \frac{3}{d(6k'+5)} = \frac{1}{d(2k'+2)} + \frac{1}{d(2k'+2)(6k'+5)}$, d entier naturel non nul.

On montre maintenant que si $n = 6k+1$, k entier naturel et que $\frac{3}{n}$ est la somme de deux inverses d'entiers distincts alors n possède obligatoirement un diviseur de la forme $6k'+5$.

On suppose donc que $\frac{3}{n} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ avec u et v entiers distincts et $\text{PGCD}(u; v) = d$. Il existe alors

deux entiers distincts s et t premiers entre eux tels que $\frac{3d}{n} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{s+t}{st}$ (1). On sait qu'alors

$s+t$ et st sont aussi premiers entre eux. Comme n est impair alors st aussi et donc aussi s et t . Avec l'égalité (1) on a $3dst = n(s+t)$, on en tire que $(s+t)$ est divisible par 3. On peut supposer que $s \equiv 2[3]$ et $t \equiv 1[3]$ et on a ainsi $s \equiv 5[6]$. Par ailleurs, toujours de l'égalité (1), on déduit l'existence d'un entier r tel que $(s+t)r = 3d$ et $str = n$. Par conséquent s divise n .

Finalement on a montré que les seuls entiers pour lesquels $\frac{3}{n}$ n'est pas la somme de deux inverses d'entiers distincts sont ceux dont tous les facteurs premiers sont de la forme $6k+1$.

111-4 proposé par Frédéric de Ligt :

Dans la réédition de 2017 du livre « Bourbaki » de Maurice Mashaal aux éditions Belin, on trouve p.144 à propos des fonctions continues : « Un autre exemple classique, très curieux, est la

fonction f définie par $f(x)=0$ si x est irrationnel, $f(x)=\frac{1}{q}$ si x est rationnel non nul ($x=\frac{p}{q}$

avec p et q premiers entre eux), et $f(0)=1$. Cette fonction est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel ! ». En effet, vraiment curieuse cette fonction ! Et la démonstration, à quoi ressemble-t-elle ?

Solution de l'auteur

Si x est irrationnel $f(x)=0$, et si h tend vers 0, soit $x+h$ est irrationnel et alors $f(x+h)=0$, soit $x+h$ est rationnel, $x+h=\frac{p}{q}$ et

alors $f(x+h)=\frac{1}{q}$, expression qui converge vers 0 quand h tend vers 0.

Si maintenant x est rationnel, $x=\frac{p}{q}$ alors $f(x)=\frac{1}{q}$ et $x+h$ est

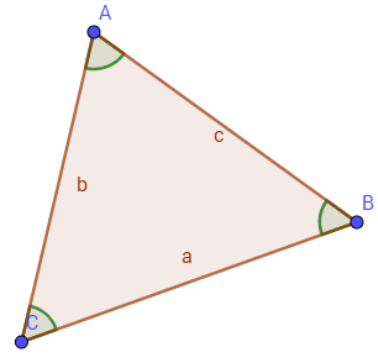
irrationnel et donc $f(x+h)-f(x)=-\frac{1}{q}$ reste une quantité constante.



112-4 proposé par Frédéric de Ligt :

Montrer cette identité, valable dans tous les triangles :

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}$$



Solution de Jacques Chayé

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle. On sait que $b = 2R \sin \hat{B}$ et $c = 2R \sin \hat{C}$, donc on a les égalités :

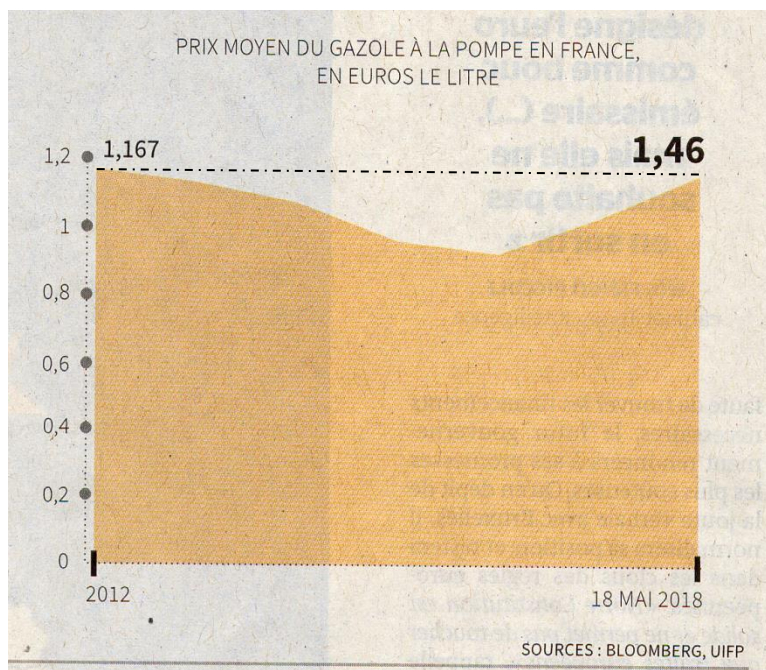
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{2R \sin \hat{B} - 2R \sin \hat{C}}{2R \sin \hat{B} + 2R \sin \hat{C}} = \frac{\sin \hat{B} - \sin \hat{C}}{\sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = \frac{2 \sin\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}$$

Quand ça augmente, ça baisse...

On connaissait les courbes qui montent, la hausse qui diminue, voici l'augmentation qui baisse...

Dans le quotidien « Le Monde » des 27 et 28 mai 2018, un article concernait l'augmentation du prix du baril de pétrole (page 4 du supplément eco&entreprise).

Sous le titre « les prix à la pompe repartent à la hausse » on trouvait le graphique suivant :



NDLR : La ligne en tirets noirs a été rajoutée. Elle est parallèle à l'axe des abscisses.