Thierry Chevalarias, Frédéric De Ligt, Jean-Paul Guichard , IREM de Poitiers

## Épisode 2 : L'algorithmique au temps des pharaons

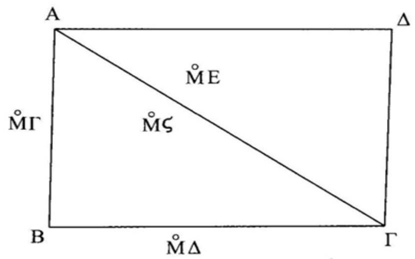
Dans *les Métriques* de Héron d'Alexandrie, le livre I est consacré à la mesure des surfaces : il vise à rendre effectif le calcul de n'importe quelle aire. En voici des exemples dans lesquels on voit bien la structure : énoncé, démonstration, algorithme de calcul. C'est un des rares traités de l'antiquité où figurent des algorithmes justifiés.

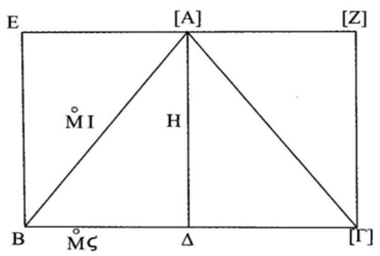
### 1) Triangle rectangle : aire et calcul de l'hypoténuse (I 2, trad. Acerbi & Vitrac)

**II** Soit un triangle rectangle ΑΒΓ ayant l'angle en Β droit et soit d'une part ΑΒ de 3 unités, d'autre part ΒΓ de 4 unités. Trouver l'aire du triangle et l'hypoténuse.

Que le parallélogramme rectangle ΑΒΓΔ soit complété. En effet, puisque l'aire du parallélogramme rectangle ΑΒ ΓΔ – comme cela a été démontré ci-dessus – est 12, et que le triangle ΑΒΓ est la moitié du parallélogramme ΑΒΓΔ, l'aire du triangle ΑΒΓ sera alors 6. Et puisque l'angle ΑΒΓ est droit, les carrés sur ΑΒ, ΒΓ sont aussi égaux au carré sur ΑΓ ; et les carrés sur ΑΒ, ΒΓ sont de 25 unités : le carré sur ΑΓ sera donc aussi de 25 unités ; ΑΓ elle-même sera donc de 5 unités.

*Et la méthode est celle-ci. En faisant les 3 par les 4, prendre la moitié de ceux-ci ; il en résulte 6. Autant que cela est l'aire du triangle. Et l'hypoténuse : en faisant les 3 par eux-mêmes et, semblablement, en faisant les 4 par eux-mêmes, composer : et en résultent 25 ; et, en prenant un côté de ceux-ci, avoir l'hypoténuse du triangle.*




### 2) Triangle isocèle : aire (I 3, trad. Acerbi & Vitrac)

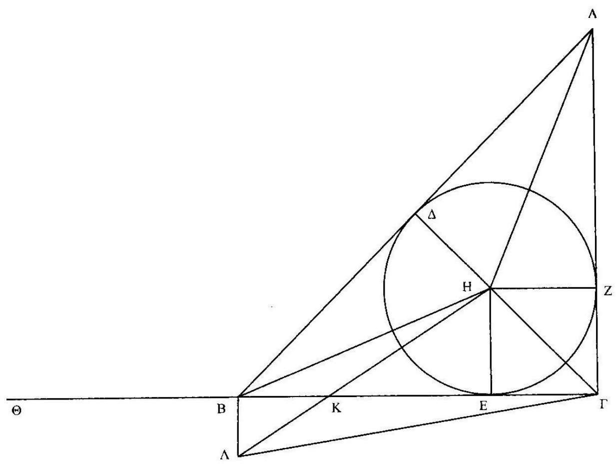
**III** *Soit un triangle isocèle ΑΒΓ ayant ΑΒ égal à ΑΓ et, d'une part, chacun des deux [côtés] égaux de 10 unités, d'autre part ΒΓ de 12 unités. Trouver son aire.*

Qu'une [droite] ΑΔ soit menée perpendiculaire à ΒΓ et que d'une part soit menée par Α une [droite] ΕΖ parallèle à ΒΓ, d'autre part, que soient menées par Β, Γ des [droites] ΒΕ, ΓΖ parallèles à ΑΔ : le parallélogramme ΒΓΕΖ est donc double du triangle ΑΒΓ – car il a et la même base que lui et est dans les mêmes parallèles. Et puisqu'il est isocèle et que ΑΔ a été menée perpendiculaire, ΒΔ est égale à ΔΓ ; et ΒΓ est de 12 unités : ΒΔ est donc de 6 unités ; or ΑΒ est de 10 unités : ΑΔ sera donc de 8 unités – puisqu'alors, précisément, le [carré] sur ΑΒ est égal à ceux sur ΒΔ, ΔΑ – ; de sorte aussi que ΒΕ sera de 8 unités ; or ΒΓ est de 12 unités ; l'aire du parallélogramme ΒΓΕΖ est donc de 96 unités ; de sorte que l'aire du triangle ΑΒΓ est de 48 unités.

*Et la méthode est celle-ci. Prends la moitié des 12 : en résultent 6. Et les 10 par eux-mêmes : en résultent 100 ; retranche les 6 par eux-mêmes, lesquels sont 36 : en résultent 64 restants ; de ceux-ci, un côté : il en résulte 8. Autant que cela sera la perpendiculaire ΑΔ. Et les 12 par les 8 : en résultent 96 ; de ceux-ci, la moitié : en résultent 48. Autant que cela sera l'aire du triangle.*

### 3) Triangle quelconque : aire.

C'est le texte où se trouve la fameuse formule de Héron, qui n'existe pas sous forme de formule, mais d'algorithme. On y trouve aussi la célèbre méthode de Héron pour le calcul de la racine carrée, indispensable ici, mais aussi pour de nombreux autres calculs. On a un exemple de boucle et test. (I 8, Traduit du grec par Jacqueline Guichard à partir de l'édition bilingue (grec-allemand) de Hermann Schöne - Leipzig 1903 : Heronis alexandrini opera - Vol. III : *Métriques et Dioptrique* pp. 18 à 24)

> **VIII** Il y a une méthode générale pour trouver, sans perpendiculaire, la surface d'un triangle quelconque dont les trois côtés sont donnés.
>
> *Par exemple, que les côtés du triangle soient de 7, 8 et 9 unités. Additionne 7, 8 et 9 ; cela fait 24 ; de ceci prends la moitié ; cela fait 12 ; retranche 7 ; il reste 5. De nouveau retranche de 12, 8 ; il reste 4 ; et retranche-lui de nouveau 9, il reste 3. Fais le produit de 12 par 5 ; cela fait 60 ; multiplie-le par 4 ; cela fait 240 ; multiplie ce dernier par 3, cela fait 720. Prends la racine de celui-ci : ce sera la surface du triangle.*
>
> Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine[1] de la façon suivante :
>
> *puisque le carré qui s'approche le plus de 720 est 729 et a pour racine 27, divise 720 par 27 ; cela fait 26 et 2/3 ; ajoute 27 ; cela fait 53 2/3 ; prends-en la moitié ; cela fait 26 1/2 1/3. Ainsi donc, la racine[1] la plus proche de 720 sera 26 1/2 1/3.*
>
> *En effet, 26 1/2 1/3 multiplié par lui-même fait 720 1/36 ; de sorte que, la différence est de 1/36.*
>
> *Si nous voulons que la différence devienne inférieure à 1/36, nous mettrons les 720 1/36 trouvés tout à l'heure à la place de 729 et, après avoir fait les mêmes opérations, nous trouverons que la différence devient inférieure de beaucoup à 1/36.*
>
> La démonstration géométrique de ceci est la suivante : les trois côtés d'un triangle étant donnés, trouver la surface.
>
> 
> 
>
> Il est bien sûr possible de trouver la surface d'un triangle en prenant une perpendiculaire et en se donnant la grandeur de celle-ci, mais qu'on convienne d'obtenir cette surface sans perpendiculaire.
>
> Soit ΑΒΓ le triangle donné et ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ chacun de ses côtés. Trouver la surface.

1 C'est le même mot qui, en grec, désigne la racine et le côté : pleurav (pleura).

Que soit inscrit, dans le triangle, le cercle ΔEZ dont le centre sera H et que AH, BH, ΓH, ΔH, EH, ZH soient tracés.

Ainsi donc, d'une part, le produit BΓ EH[2] est le double du triangle BHΓ, d'autre part, le produit ΓA ZH est le double du triangle AΓH et le produit AB ΔH est le double du triangle ABH ; par suite, le produit du périmètre du triangle ABΓ par EH, à savoir le segment qui part du centre du cercle DEH, est le double du triangle ABΓ.

Que ΓB soit prolongé, et que BΘ soit égal à AΔ. Ainsi, donc, ΓBΘ[3] est la moitié du périmètre du triangle ABΓ, parce que d'une part, AΔ est égal à AZ, que d'autre part, ΔB est égal à BE et ZΓ à ΓE ; par conséquent, le produit ΓΘ EH est égal au triangle ABΓ.

Mais le produit ΓΘ EH est la racine du produit du carré[4] de ΓΘ et du carré de EH ; par suite, la surface du triangle ABΓ multipliée par elle-même sera égale au produit du carré de ΓΘ par le carré de EH.

Que HΛ soit mené de façon à former un angle droit avec ΓH, de même pour BΛ avec ΓB et que ΓΛ soit tracé.

Puisque donc, chacun des deux angles ΓHΛ, ΓBΛ[5] est droit, le quadrilatère ΓHBΛ est inscrit dans un cercle. Par conséquent les angles ΓHB et ΓΛB sont égaux à deux droits ; les angles ΓHB et AHΔ sont aussi égaux à deux droits parce que les angles autour de H sont coupés en deux par AH, BH, ΓH, et que les angles ΓHB et AHΔ sont égaux aux angles AHΓ et ΔHB, et que tous sont égaux à quatre droits. Donc, l'angle AHΔ est égal à l'angle ΓΛB. De plus, l'angle AΔH qui est droit est égal à l'angle ΓBΛ qui est droit. Par conséquent, le triangle AHΔ est semblable au triangle ΓBΛ. Par suite, BΓ est à BΛ ce que AΔ est à ΔH, c'est-à-dire ce que BΘ est à EH, et en inversant, ΓB est à BΘ ce que BΛ est à EH, c'est-à-dire ce que BK est à KE, parce que BΛ est parallèle à EH et, ayant fait une addition, ΓΘ est à BΘ ce que BE est à EK ; de sorte que le carré de ΓΘ est au produit ΓΘ <ΘB>[6] ce que le produit BEΓ[7] est au produit ΓEK, c'est-à-dire ce qu'il est au carré de EH. En effet, EH, mené orthogonalement de l'angle droit sur la base est la hauteur ; de sorte que, le produit du carré de ΓΘ par le carré de EH, dont la racine était la surface du triangle HBΓ, sera égal au produit ΓΘB multiplié par le produit ΓEB. Et chacun des segments ΓΘ, ΘB, BE, ΓE est donné. En effet, d'une part ΓΘ est la moitié du périmètre du triangle ABΓ, d'autre part, BΘ est cette grandeur que la moitié du périmètre dépasse de ΓB, BE est celle que la moitié du périmètre dépasse de AΓ, EΓ celle que la moitié du périmètre dépasse de AB, puisque EΓ est égal à ZΓ, et BΘ à AZ, car il est égal à AΔ.

Ainsi donc, la surface du triangle ABΓ se trouve donnée.

*On terminera ainsi : soit AB égal à 13 unités, B*Γ *à 14 et A*Γ *à 15. Ajoute 13, 14 et 15, cela fait 42 : prends la moitié de ce résultat, cela fait 21 : soustrais 13, il reste 8 ; ensuite recommence avec 14, il reste 7, et encore avec 15, il reste 6. Multiplie par 8, puis le résultat par 7, et de nouveau ce résultat par 6, tout cela fait 7056. La surface du triangle sera la racine < 84 > de ce résultat.*

## Référence

HÉRON d'Alexandrie, *Metrica*, introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, Fabrizio Serra éditeur, Pise-Rome, 2014.

2 Le produit de deux longueurs est ici exprimé par une préposition suivie des noms de ces deux longueurs, séparés par un intervalle : BΓ EH.

3 ΓBΘ = ΓB + BΘ ou ΓΘ.

4 exprimé ici par une préposition suivie du nom de la longueur.

5 Le mot angle : gwniva (gonia) n'apparaît pas ici, mais une périphrase qui le sous entend : (hJ uJpov ΓHΛ = l'<angle> sous ΓHΛ).

6 < ΘB > indique un ajout dans le texte.

7 BEΓ est une contraction pour BE EΓ. (Cf. note 3).