Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

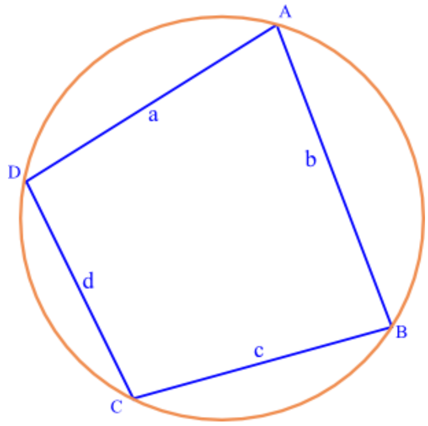
Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

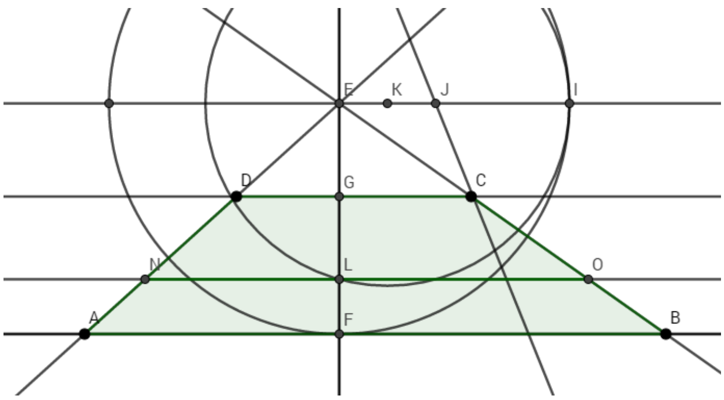
112-1 *proposé par Georges Guenim (Rouffiac)* :
La formule de Brahmagupta donnant l'aire d'un quadrilatère inscriptible est très facile à établir avec la trigonométrie, mais comment la démontrer sans ?

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ désigne le demi-périmètre du quadrilatère de côtés a, b, c et d et S son aire.



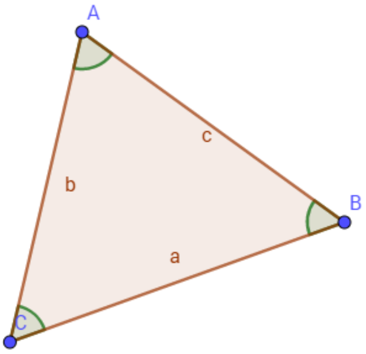
112-2 *proposé par Dominique Gaud (Migné-Auxances)* :
Voici une méthode pour partager un trapèze en deux parties d'aires égales.
ABCD est un trapèze dont les côtés non parallèles se coupent en E. Le cercle de centre E et de rayon EF (F pied de la hauteur du triangle ABE issue du sommet E) coupe la parallèle à (AB) passant par E en I. On note G l'intersection de la hauteur [EF] avec la droite (CD). La médiatrice de [GI] coupe la droite (EI) en J. On note K le milieu de [EJ]. Le cercle de centre K et de rayon KI coupe [EF] en L. On trace la parallèle aux bases passant par L et on a deux trapèzes de même aire. Pourquoi ?



112-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
On dispose de deux récipients A et B initialement vides, non gradués, de contenances respectives a litres et b litres (a et b entiers premiers entre eux, $1 \leq a < b$) et d'un robinet pouvant fournir de l'eau à volonté. Il s'agit d'écrire et de justifier un algorithme qui par une suite de remplissages, de vidages d'un récipient, ou de transvasements d'un récipient dans l'autre permette d'isoler q litres d'eau (q entier, $0 \leq q \leq a+b$). L'algorithme pourra fournir également la quantité totale d'eau utilisée et le nombre de manipulations pour isoler ces q litres.

112-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Démontrer cette identité, valable dans tous les triangles :

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}.$$



Des solutions

110-2 *proposé par Nicolas Minet* :

En utilisant deux fois chacun des chiffres 0, 1, 2, 3 et 6 dans cette fraction $\dfrac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}$ il est possible d'obtenir un quotient valant à très peu près le nombre d'or. Voyez-vous comment ?

Solution de Walter Mesnier

Voici ma solution assez proche du nombre d'or $\Phi \approx 1,618033989$ à savoir $\dfrac{263\times 63}{2^{10}\times 10} \approx 1,61806640625$.

```python
from random import *

L=[0,1,2,3,6]
L=L+L
phi=1.618033989
for n in range(1,100001):
    shuffle(L)
    abc=L[0]*100+10*L[1]+L[2]
    de=10*L[3]+L[4]
    f=L[5]
    gh=10*L[6]+L[7]
    ij=10*L[8]+L[9]
    if f!=0 and ij!=0:
        chat=abc*de/(ij*f**gh)
        if chat-phi <= 0.001 and chat-phi > -0.001:
            print(L,chat,"presque égal à",phi)
```

Console Python

```
>>>
[2, 6, 3, 6, 3, 2, 1, 0, 1, 0] 1.61806640625 presque égal à 1.618033989
[2, 6, 3, 6, 3, 2, 1, 0, 1, 0] 1.61806640625 presque égal à 1.618033989
[2, 6, 3, 6, 3, 2, 1, 0, 1, 0] 1.61806640625 presque égal à 1.618033989
[2, 6, 3, 6, 3, 2, 1, 0, 1, 0] 1.61806640625 presque égal à 1.618033989
>>>
```

Merci Python !

111-1 *proposé par Walter Mesnier* :
Pour prendre le contre-pied du problème 110-3 posé dans la précédente Rubricollage, pouvez-vous proposer une suite d'entiers naturels $(a_n)_{n\geq 1}$, définie par récurrence, telle que la série numérique $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{10^{n+1}}$ converge vers un nombre irrationnel ?

Commentaires de Walter Mesnier à propos du problème 110-3
On a vu qu'en prenant pour (a_n) la suite de Fibonacci, qui est une suite récurrente d'ordre 2, on obtenait une fraction comme limite de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{10^{n+1}}$. On peut se poser la question de l'existence d'une suite du même type (récurrente linéaire d'ordre 2 à valeurs entières) mais telle que l'addition infinie décalée tendrait vers une valeur irrationnelle. La réponse est non. En effet ces suites sont de la forme $a_n = au^n + bv^n$ ou $a_n = (cn+d)w^n$. Et on a des conditions supplémentaires si on suppose que les valeurs sont entières. Par exemple dans le premier cas, on a nécessairement $a_0 = a + b$ et $a_1 = au + bv$ entiers. De plus $S = u + v$ et $P = uv$ sont des nombres rationnels (somme et produit des racines de l'équation caractéristique) et par suite $av + bu = u_0(u + v) - u_1$ aussi.
$\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{10^{n+1}} = \frac{a}{10-u} + \frac{b}{10-v} = \frac{10(a+b)-(av+bu)}{100-(u+v)10+uv}$ est donc un nombre rationnel.
Le second cas où $a_n = (cn+d)w^n$ est analogue.
On peut même étendre à toutes les suites de la forme $P(n)w^n$ où P est un polynôme à coefficients rationnels. Quelques exemples simples et jolis (?) que j'ai testés :

u_n	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$
$\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{10^{n+1}}$	1/81	10/729	$10^2/9^4$	$10^{\alpha} / 9^{\alpha+2}$
Dévt.décimal	0,0123…	0,0137…	0,01524…	0,0 une série de chiffres qui se répètent
Longueur du cycle	9	81 ?	729 ?	$9^{\alpha+1}$?

Notons que pour ces calculs de sommes on peut utiliser des développements en séries entières comme : $\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ ou $\sum_{n\geq 0} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

Solution de Frédéric de Ligt
On considère la série entière $\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n$ de la variable réelle x. Son rayon de convergence R est obtenu en écrivant que $\frac{1}{R} = \overline{\lim}\left(\binom{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Comme $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2}$ et en utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ on obtient l'équivalent :

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Par conséquent, comme $\left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$, alors $R = \frac{1}{4}$.

On note C la somme de cette série. C est une fonction continue et dérivable sur $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ et pour tout x dans cet intervalle on a :

$$C'(x)=\sum_{n\geq 1}\binom{2n}{n}nx^{n-1}=\sum_{n\geq 0}\binom{2n+2}{n+1}(n+1)x^n .$$

Mais $\binom{2n+2}{n+1}=\frac{4n+2}{n+1}\binom{2n}{n}$ et donc

$$C'(x)=\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}(4n+2)x^n=4\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}nx^n+2\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n=4xC'(x)+2C(x).$$

Soit donc à résoudre sur $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$C'(x)-\frac{2}{1-4x}C(x)=0 \text{ avec } C(0)=1.$$

La fonction définie sur $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ par $x\mapsto\frac{-2}{1-4x}$ est continue. On sait que la solution générale est alors donnée par $\lambda e^{-\ln(\sqrt{1-4x})}$ où $x\mapsto\ln\sqrt{1-4x}$ est une primitive de $x\mapsto\frac{-2}{1-4x}$. Cette solution générale est donc $x\mapsto\frac{\lambda}{\sqrt{1-4x}}$. La condition initiale $C(0)=\lambda=1$ impose alors que la solution soit $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Finalement pour tout x dans l'intervalle $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ on a $\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ ou encore

$$\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^{n+1}=\frac{x}{\sqrt{1-4x}}.$$

En prenant maintenant $x=\frac{1}{10}$ on a :

$$\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{10}}{\sqrt{1-\frac{4}{10}}}=\frac{1}{\sqrt{60}}$$

qui est irrationnel.

$$\frac{1}{\sqrt{60}}=\begin{array}{llllll} 0, & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 6 & & \\ & & & 2 & 0 & \\ & & & & 7 & 0 \\ & & & & & \dots \end{array}$$