Ru – Bri – COL$\llcorner$AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

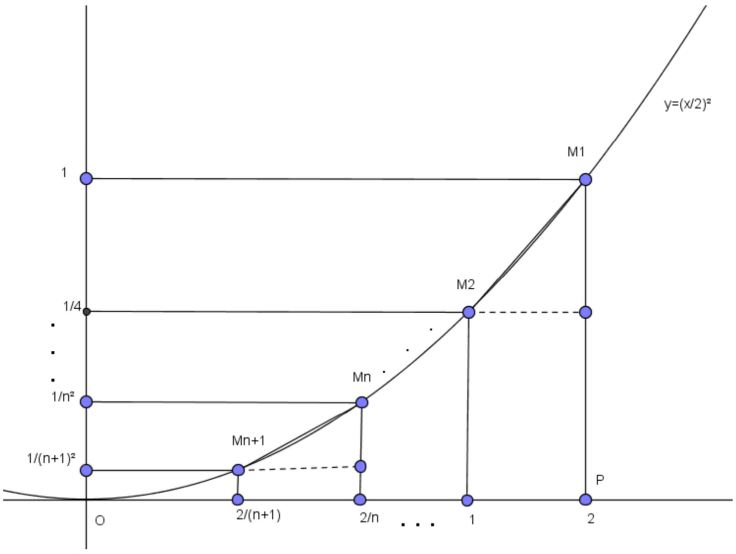
Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Voir la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converger

L'illustration ci-dessous est le fruit d'une recherche personnelle. Est-elle inédite ?

Il est habituel de démontrer la convergence de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ en majorant les sommes partielles $\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}$ par $\int_1^N\frac{1}{x^2}dx$. En passant à la limite, la somme des aires des rectangles de dimensions $1\times\frac{1}{n^2}$ pour $n\geq 2$ est plus petite que l'aire sous la courbe de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$. La démonstration paraît visuelle, mais en fait cette dernière aire n'est pas « visuellement » finie. Un calcul d'intégrale est nécessaire pour conclure.

Avec une approche par les longueurs plutôt que par les aires il est possible de se convaincre « visuellement » de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. En voici une illustration graphique :



La chaîne de segments (M_nM_{n+1}) a clairement une longueur finie, étant plus courte que la longueur de l'arc de parabole d'extrémités O et M_1(elle peut même être grossièrement encadrée par OM_1 et $OP + PM_1$) et cette ligne brisée a pour longueur $2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)-1$.

En effet $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^2=\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^2+\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)^2$ et donc $\mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$.

Remarques

- $\left(\sum_{n=1}^{N} \mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_n\right)$ est une suite croissante et majorée par $y_{\mathrm{M}_1} + x_{\mathrm{M}_1} = 3$, donc elle converge
- $\mathrm{OM}_1 = \sqrt{5} < \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) - 1 < \mathrm{OP} + \mathrm{PM}_1 = 3$.
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.

On a même un encadrement assez fin du reste $\mathrm{R}_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ puisqu'on a :

- $x_{M_{N+1}} = \frac{2}{N+1} < \sum_{n=N+1}^{+\infty} M_{n+1}M_n = 2R_N - \frac{1}{(N+1)^2} < x_{M_{N+1}} + y_{M_{N+1}} = \frac{2}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2}$.
- $\frac{1}{N+1} + \frac{2}{2(N+1)^2} < \mathrm{R}_N < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2}$.

Frédéric de Ligt

Des problèmes

111-1 *proposé par Walter Mesnier (Biard)* :
Pour prendre le contre-pied du problème 110-3 posé dans la précédente Rubricollage, pouvez-vous proposer une suite d'entiers naturels $(a_n)_{n\geq 1}$, définie par récurrence, telle que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge vers un nombre irrationnel ?

111-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Pour quelles valeurs de l'entier n la fraction $\frac{3}{n}$ est-elle la somme de deux inverses d'entiers distincts ?

111-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Soit a, b des entiers tels que $0 < a < b$; dénombrer les suites finies d'entiers naturels u_1, u_2, ..., u_n de longueur n ($n \geq 3$), strictement croissantes et vérifiant : $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_i \leq u_{i-1} + u_{i-2}$ pour tout i tel que $3 \leq i \leq n$.

111-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Dans la réédition de 2017 du livre « Bourbaki » de Maurice Mashaal aux éditions Belin, on trouve p.144 à propos des fonctions continues : « Un autre exemple classique, très curieux, est la fonction f définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel, $f(x) = 1/q$ si x *est rationnel non nul* ($x = p/q$ avec p et q premiers entre eux), et $f(0) = 1$. Cette fonction est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel ! ». En effet, vraiment curieuse cette fonction ! Et la démonstration, à quoi ressemble-t-elle ?

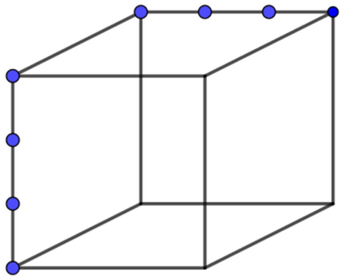
Des solutions

109-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier* :
Un célèbre théorème affirme que, pour tout ensemble fini de points du plan non alignés, il existe une droite contenant exactement deux points de cet ensemble.
Ce théorème peut-il être étendu à l'espace, c'est-à-dire : pour tout ensemble fini de points de l'espace non coplanaires, existe-t-il un plan contenant exactement trois points de cet ensemble ?

Solution de Frédéric de Ligt

La figure ci-contre fournit un exemple que la propriété ne peut être étendue à l'espace.

- Soit le plan ne rencontre qu'un des deux alignements et contient trois de ses points mais puisqu'il contient la droite portant ces trois points, il contient aussi obligatoirement le quatrième point de cet alignement. Le plan contient désormais quatre points.
- Soit le plan rencontre les deux alignements en trois points. Il y a deux de ces points qui appartiennent nécessairement au même alignement. La droite qui les contient est elle-même contenue dans ce plan et contient les autres points de l'alignement. Mais le plan contient maintenant cinq points.



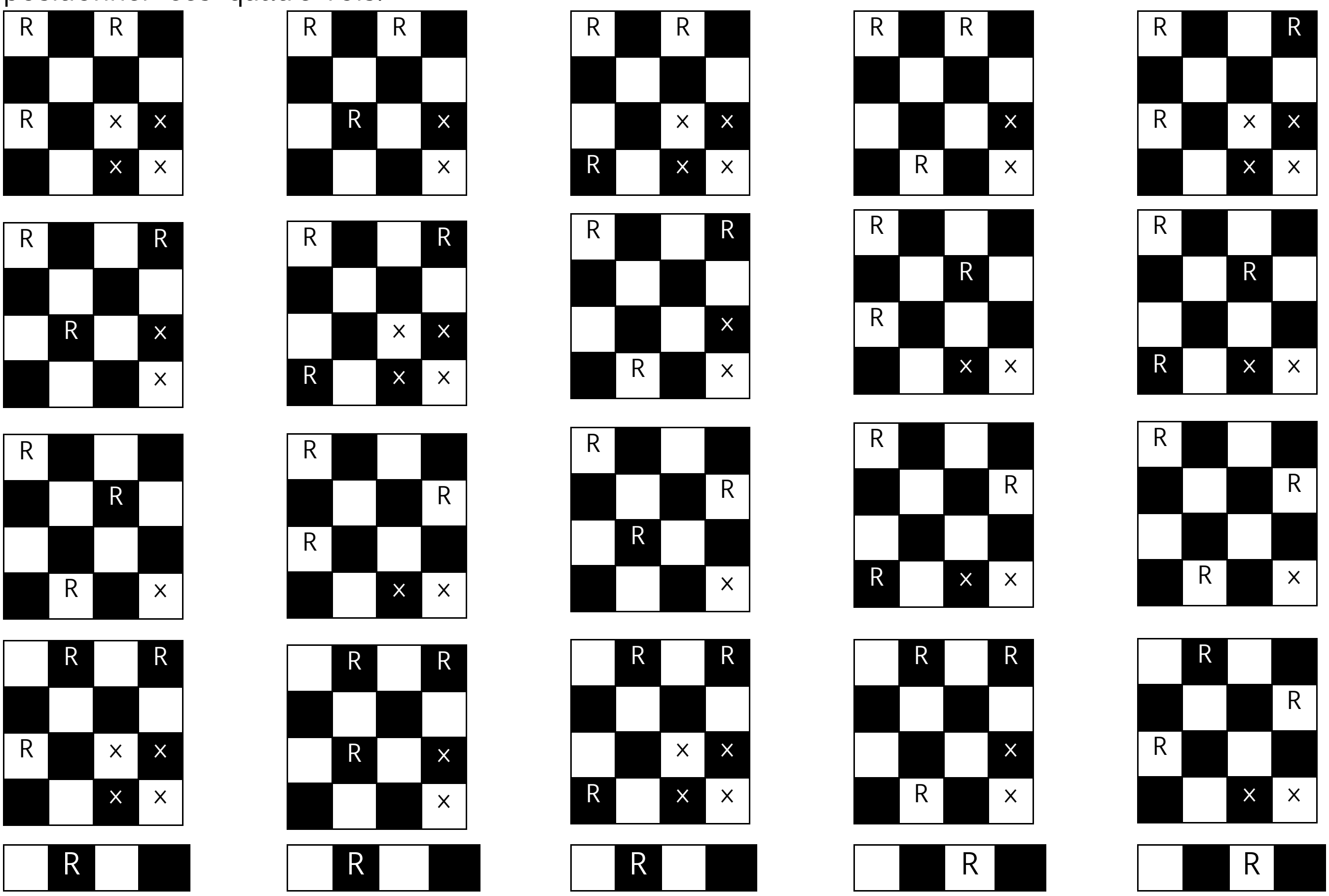
110-1 *proposé par Frédéric de Ligt* :

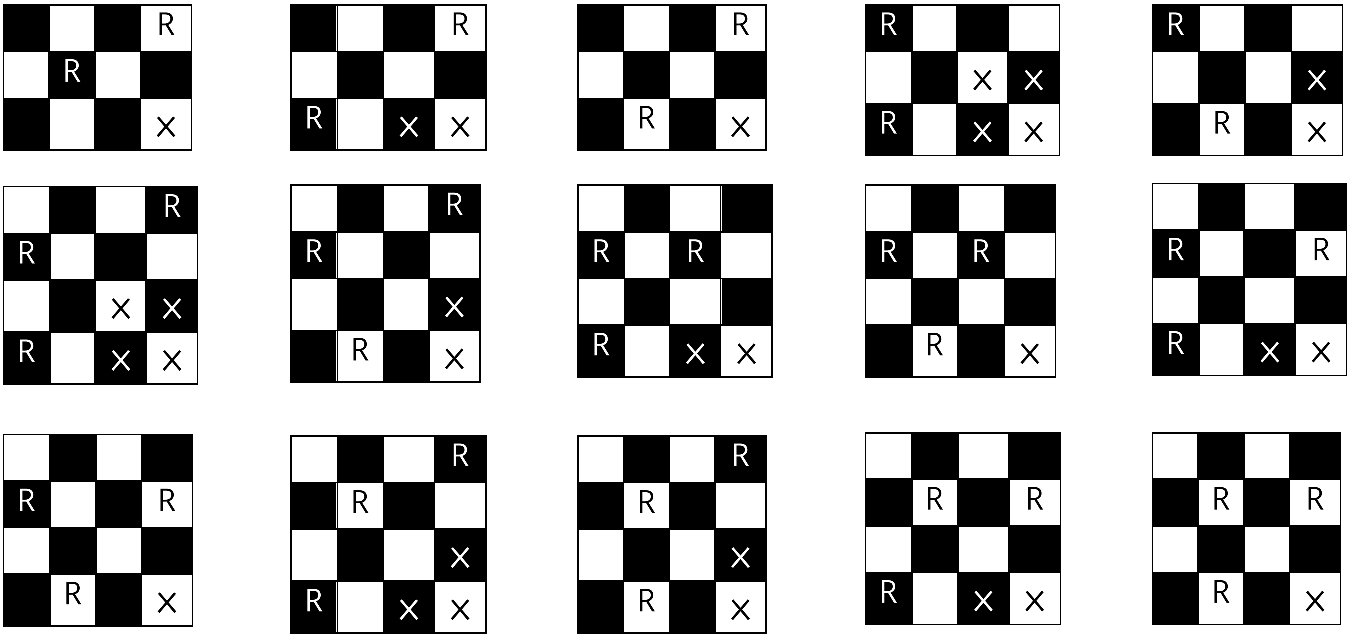
De combien de façons peut-on positionner quatre rois noirs (supposés indiscernables) sur un échiquier 4x4 de sorte qu'il n'y ait aucun échec mutuel ?

Solution de l'auteur

Chacun des rois doit se trouver dans un des quatre carrés de quatre cases qui partagent l'échiquier. En effet, on raisonne par l'absurde et on utilise le principe des tiroirs : un de ces quatre carrés ne peut contenir plus d'un roi et s'il n'en possédait aucun, les quatre rois seraient répartis sur les trois autres carrés et l'un deux contiendrait alors nécessairement deux rois. Contradiction.

Sur chacun des 35 échiquiers 4x4, les positions possibles du quatrième roi sont indiquées par une croix. Cela donne un total de 89 (encore un terme de la suite de Fibonacci !) façons de positionner ces quatre rois.





110-3 *proposé par Frédéric de Ligt* :

En parcourant le livre de Malcolm E. Lines intitulé *Dites un chiffre* (édition Flammarion), je suis tombé page 34 sur la présentation du résultat étonnant ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
0{,}1\\
\quad\ 1\\
\quad\ \ 2\\
\quad\ \ \ 3\\
\quad\ \ \ \ 5\\
\quad\ \ \ \ \ 8\\
\quad\ \ \ \ \ 13\\
\quad\ \ \ \ \ \ 21\\
\quad\ \ \ \ \ \ \ 34\\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ 55\\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ 89\\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ 144\\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots\\
\hline
0{,}11235955056\ldots
\end{array}$$

Vous aurez reconnu la suite de Fibonacci dans cette addition infinie décalée. Une suite très liée à un célèbre nombre irrationnel dont il a été question dans l'exercice précédent. Pourtant l'auteur annonce que cette somme vaut $\frac{10}{89}$, un nombre rationnel ! Bien sûr une preuve de cette affirmation n'a pas trouvé place dans ce type d'ouvrage à destination d'un large public. Mais peut-être serez-vous curieux d'en chercher une ?

Solution de Philippe Rogeon

Notons $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de Fibonacci, et posons $U_n = \frac{F_n}{10^{n+1}}$. La somme proposée est la série de terme général U_n .

Tout d'abord, justifions la convergence de cette série : on a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{F_{n+1}}{10^{n+2}} \times \frac{10^{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \times \frac{1}{10} < \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Ce qui assure la convergence.

Notons $S=\sum_{k=0}^{+\infty}U_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F_k}{10^{k+1}}=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F_k}{10^k}$, on a alors

$$
\begin{aligned}
10S=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F_k}{10^k}=F_0+\frac{F_1}{10}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{F_k}{10^k}&=F_0+\frac{F_1}{10}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F_{k-1}+F_{k-2}}{10^k}\\
&=F_0+\frac{F_1}{10}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{F_{k-1}}{10^k}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{F_{k-2}}{10^k}\\
&=F_0+\frac{F_1}{10}+\frac{1}{10}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{F_{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{1}{100}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{F_{k-2}}{10^{k-2}}\\
&=F_0+\frac{F_1}{10}+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{F_k}{10^k}+\frac{1}{100}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F_k}{10^k}\\
&=F_0+\frac{F_1}{10}-\frac{F_0}{10}+\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F_k}{10^k}+\frac{1}{100}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F_k}{10^k}\\
&=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}+S+\frac{S}{10}
\end{aligned}
$$

Ce qui conduit à $\frac{89}{10}S=1$, et donc $S=\frac{10}{89}$.

110-5 *proposé par Walter Mesnier* :
En utilisant les quatre opérations habituelles et chacun des quatre nombres une et une seule fois :
1) Trouver 24 avec 1, 5, 5, 5
2) Trouver 17 avec 2, 5, 6, 6
3) Trouver 21 avec 1, 5, 6, 7

Enfin, en lien avec l'énoncé 109-4 dont la solution est présentée dans cette rubrique, un légendaire tirage du « compte est bon ».

Solution de l'auteur
Attention, il me semble que dans le jeu télévisé on n'a pas le droit d'utiliser des valeurs non entières comme résultats intermédiaires, mais c'est la seule façon de s'en sortir pour ces calculs.
1) 5x(5-1/5) = 24
2) 6x(2+5/6) = 17
3) 6/(1-5/7) = 21

Et enfin ((100+6)x3x75 – 50)/25 = 952