Ru – Bri – COLLAGE

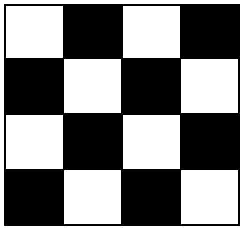
Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

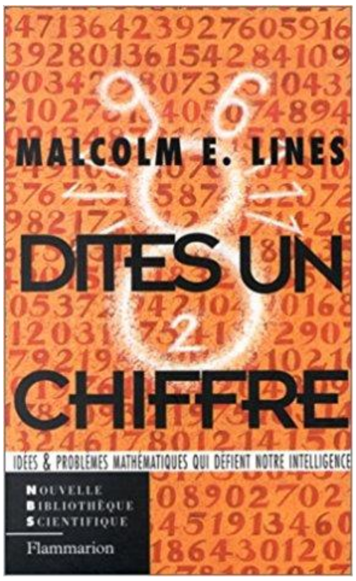
110-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
De combien de façons peut-on positionner quatre rois noirs (supposés indiscernables) sur un échiquier 4x4 de sorte qu'il n'y ait aucun échec mutuel ?



110-2 *proposé par Nicolas Minet (Dissay)* :

En utilisant deux fois chacun des chiffres 0, 1, 2, 3 et 6 dans cette fraction $\frac{\ldots\times ..}{.:\times ..}$ il est possible d'obtenir un quotient valant à très peu près le nombre d'or. Voyez-vous comment ?

110-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
En parcourant le livre de Malcolm E. Lines intitulé *Dites un chiffre* (édition Flammarion) je suis tombé page 34 sur la présentation du résultat étonnant ci-dessous :



0,1
  1
   2
    3
     5
      8
       13
        21
         34
          55
           89
            144
             …
____
0,11235955056…

Vous aurez reconnu la suite de Fibonacci dans cette addition infinie décalée. Une suite très liée à un célèbre nombre irrationnel dont il a été question dans l'exercice précédent. Pourtant l'auteur annonce que cette somme vaut $\frac{10}{89}$, un nombre rationnel ! Bien sûr une preuve de cette affirmation n'a pas trouvé place dans ce type d'ouvrage à destination d'un large public. Mais peut-être serez-vous curieux d'en chercher une ?

110-4 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
On attribue une couleur à chaque arête de K_n (graphe complet à n sommets, $n \geq 3$). Combien de couleurs au minimum doit-on utiliser pour être assuré de l'existence d'un triangle dont les trois arêtes soient de couleurs différentes ?

110-5 *proposé par Walter Mesnier (Poitiers)* :
En utilisant les quatre opérations habituelles et chacun des quatre nombres une et une seule fois :
1) Trouver 24 avec 1, 5, 5, 5
2) Trouver 17 avec 2, 5, 6, 6
3) Trouver 21 avec 1, 5, 6, 7

Enfin, en lien avec l'énoncé 109-4 dont la solution est présentée dans cette rubrique, un légendaire tirage du « compte est bon ».

Des solutions

108-1 *Une observation d'Emile Borel* :
Un problème de loterie
« C'est un fait assez remarquable qu'il y ait exactement le même nombre total de paires dans les numéros à une paire et dans les numéros à deux paires. Le fait ne se produit pas pour toutes les valeurs du nombre total de chiffres employés (ici égal à 10 puisque nous utilisons le système décimal) et du nombre de chiffres formant les numéros considérés. »
(Les numéros utilisés dans cette loterie possèdent tous six chiffres.)

1) Que vaut ce nombre total de paires évoqué par Emile Borel ?
2) Dans quelles bases et pour quels numéros cette coïncidence peut-elle se reproduire ?

Solution de Frédéric de Ligt
L'extrait proposé est tiré du petit Que sais-je ? « La probabilité et la vie » (1943, p.98).
1) Un numéro de loterie à 6 chiffres peut bien sûr comporter dans son écriture un ou plusieurs zéros à sa gauche. Les numéros de loterie constitués de cinq chiffres différents sont exactement ceux qui comportent une seule paire. Leur nombre est $10\times\binom{6}{2}\times 9\times 8\times 7\times 6=453600$.
Les numéros de loterie comportant exactement deux paires différentes quant à eux sont au nombre de $\binom{10}{2}\times\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times 8\times 7=226800$. Ce qui fournit un total de 2×226800 = 453600 paires pour ce type de numéros.
2) Si l'on dispose maintenant de p chiffres et que le numéro du billet en comporte n, le nombre de billets où figurent une seule paire est donné par l'expression :
$$p\times\binom{n}{2}\times(p-1)\times(p-2)\times(p-3)\times(p-4).$$
Le nombre de billets où figurent exactement deux paires différentes vaut quant à lui :
$$\binom{p}{2}\times\binom{n}{2}\times\binom{n-2}{2}\times(p-2)\times(p-3).$$

On cherche donc à résoudre :

$$p\times\binom{n}{2}\times(p-1)\times(p-2)\times(p-3)\times(p-4)=2\times\binom{p}{2}\times\binom{n}{2}\times\binom{n-2}{2}\times(p-2)\times(p-3)$$

Expression qui heureusement se simplifie beaucoup pour donner :

$$2p=n^2-5n+14.$$

On retrouve le fait que pour n = 6 alors p = 10. Comme $n^2-5n+14>0$ et que pour tout entier naturel n l'expression $n^2-5n+14$ donne toujours un résultat pair, on peut donc trouver une base quand on connaît le nombre de chiffres du numéro du billet de façon à ce que les quantités de paires coïncident.

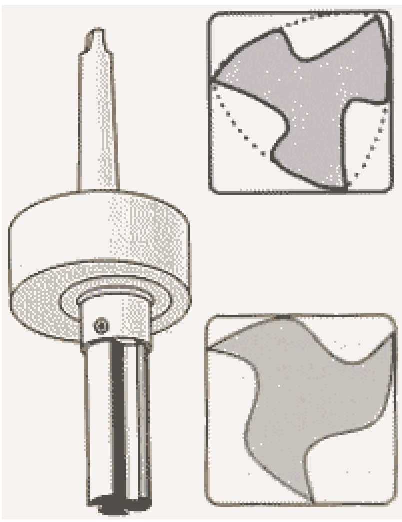
108-2 *de Jean-Christophe Laugier* :
Quel est le nombre maximal de régions du plan déterminées par n cercles ?

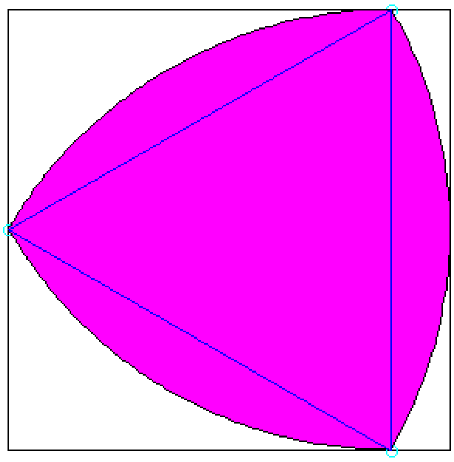
Solution de Frédéric de Ligt
Un cercle partage le plan en deux régions. Deux cercles peuvent faire apparaître jusqu'à quatre régions et trois cercles jusqu'à huit régions. Est-ce à dire que n cercles vont pouvoir créer jusqu'à 2^n régions ? Trop simple !
Supposons que n cercles aient pu partager le plan en un maximum de r_n régions. Le partage du plan par un cercle supplémentaire comportera un maximum de régions si ce cercle coupe chacun des n premiers cercles en deux points créant ainsi $2n$ nouveaux points d'intersection. Le nouveau cercle sera donc partagé en $2n$ arcs de cercles, faisant apparaître $2n$ nouvelles régions. Si on note maintenant r_{n+1} le nombre de régions ainsi obtenues on a la relation de récurrence :

$$r_{n+1} = r_n + 2n \text{ avec } r_1 = 2.$$

L'expression du terme général est donc $r_n = n(n - 1) + 2$

109-1 *proposé par Frédéric de Ligt* :
L'ingénieur britannique Harry Watts a inventé dans les années 1930, un foret en forme de triangle de Reuleaux. Il disait dans ses dépliants publicitaires : "*Qui croira que j'ai un outil qui peut percer des trous carrés ?*".



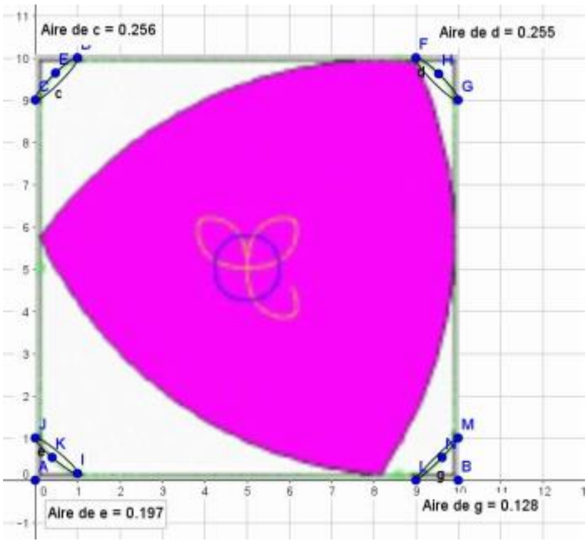


http://www.encyclopedie-incomplete.com/?Trou-Carre

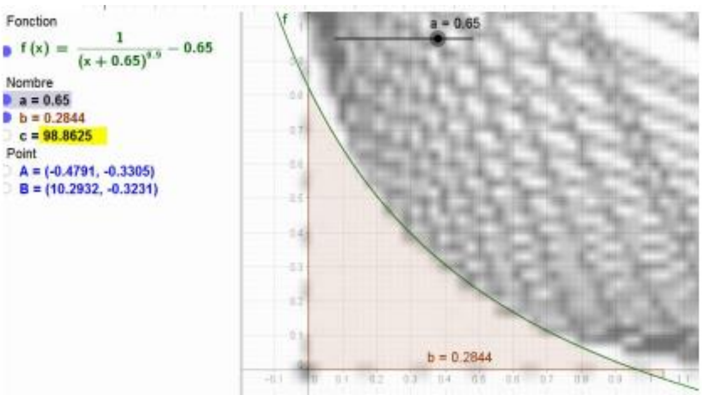
En fait il y a un peu d'exagération dans cette affirmation de Harry Watts. Le trou n'est pas tout à fait carré, en effet les sommets ne sont pas atteints par le foret.
Quel pourcentage de l'aire du carré ce foret permet-il quand même d'atteindre ?

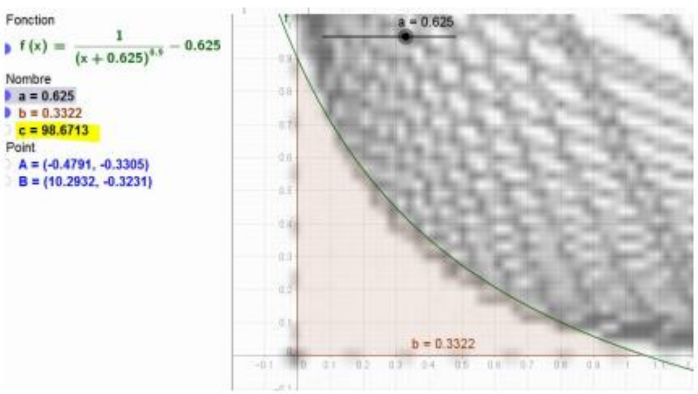
Solution de Walter Mesnier

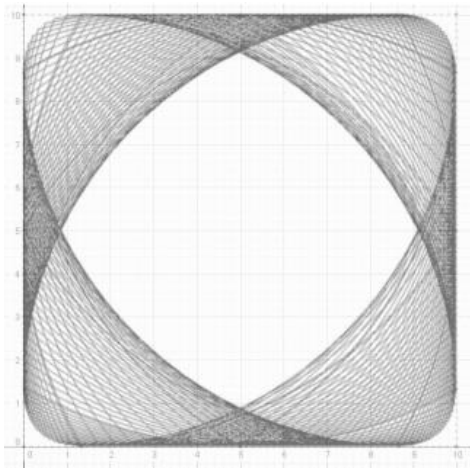
Par curiosité mais sans calcul, à la manière de nos élèves de 6e formés sur les grandeurs à la sauce IREM, j'utilise GeoGebra pour approximer grossièrement l'aire des quatre coins (portions d'ellipses)



Je répondrais que le foret permet d'atteindre entre 98% et 99% de l'aire du carré. Je suis tenté par une approximation plus précise à l'aide de la figure trouvée sur Wikipédia et importée sur GeoGebra. Je cherche simplement à approcher l'aire d'un coin à l'aide de l'intégrale d'une fonction choisie un peu au « pif » et j'en déduis que le foret permet d'atteindre entre 98,67% et 98,86% de l'aire du carré. Qui dit mieux ?







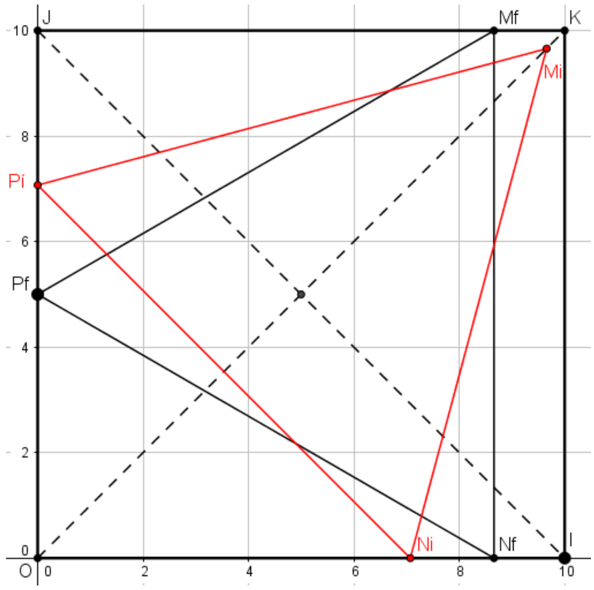
Solution de Frédéric de Ligt

J'ai mieux mais à quel prix ! Si le carré a un côté de longueur 1, j'obtiens après de gros calculs pas évidents que le foret balaye une aire valant très exactement $2\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}-3\approx 0,9877$. Soit environ 98,77% de l'aire du carré, le centre de l'intervalle proposé par Walter Mesnier. Pour ne pas être indigeste, je ne détaillerai pas tous les calculs.

Dans le repère (O ; I ; J) on a :

$N_i\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$;
$P_i\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
$M_i\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$;

$N_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$;
$P_f\left(0;\frac{1}{2}\right)$;
$M_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.



Soit N $(x, 0)$ tel que N$\in$[N_i , N_f] et donc tel que $x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. On peut construire le triangle équilatéral MNP de côté 1 avec P$\in$[P_i ; P_f] de coordonnées P $(0\ ,\sqrt{1-x^2})$ et M $(X\,;Y)$ intérieur au carré. Il s'agit dans un premier temps de décrire le morceau de courbe parcourue par le point M quand x varie dans son intervalle et donc de trouver une relation contrainte entre X et Y.

Une rotation orientée de centre N et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ amène P en M. Un calcul classique donne alors les relations :

$$\begin{cases} X=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} \\ Y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

D'où l'on tire $X^2-Y^2=-x^2+\frac{1}{2}$ et $(\sqrt{3}Y-X)^2=x^2$ et finalement $X^2+Y^2-\sqrt{3}XY-\frac{1}{4}=0$ (1). Il s'agit de l'équation d'une ellipse dont les axes sont portés par les bissectrices du repère (O, I, J). On va donner une équation de cette ellipse dans le nouveau repère (O, I', J'), obtenu par une rotation orientée autour de O d'angle $\frac{\pi}{4}$ du repère (O, I, J). Si dans le repère (O, I, J) on a M $(X\,,Y)$ alors dans le repère (O, I', J') on a $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y;-\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)$. En posant $X'=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y$ et $Y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y$ on a $X=\frac{\sqrt{2}}{2}X'-\frac{\sqrt{2}}{2}Y'$ et $Y=\frac{\sqrt{2}}{2}X'+\frac{\sqrt{2}}{2}Y'$. En injectant ces deux expressions dans la relation (1) on obtient une équation de l'arc d'ellipse d'extrémités M_i et M_f dans le repère (O, I', J') :

$$\left(\frac{X'}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\right)^2+\left(\frac{Y'}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\right)^2=1$$

Dans ce nouveau repère $M_i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2};0\right)$ et $M_f\left(\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{4};\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$.

On cherche ensuite l'aire sous l'arc d'ellipse dans (O, I', J').

D'une façon générale soit une ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ avec a et b strictement positifs et $c\in[0;a]$, alors l'aire sous l'arc d'ellipse limité par les points de coordonnées (a ; 0) et (c , $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$) vaut $\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2}-Arc\sin\left(\frac{c}{a}\right)\right)$. Je laisse au lecteur le soin de redémontrer cette formule. Cela demande du soin mais c'est assez classique.

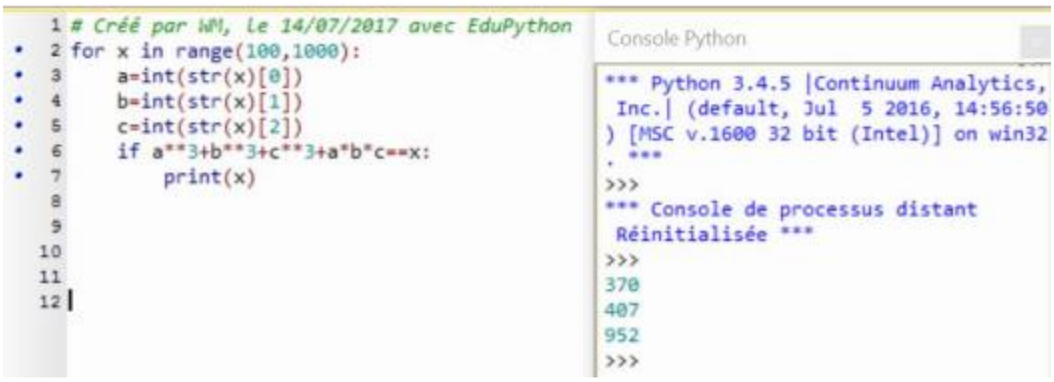
On applique cette formule au cas étudié. Ici $a=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $c=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{4}$. L'aire sous l'arc d'ellipse d'extrémités M_i et M_f dans le repère (O, I', J') vaut alors $\frac{\pi}{48}-\frac{1}{16}$.

Par ailleurs, si on note $M1_f$ le projeté orthogonal M_f sur l'axe (OI'), alors l'aire du triangle rectangle $KM1_f M_f$ vaut $\frac{7}{16}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Finalement, la partie du carré qui n'est pas atteinte par le foret a une aire de $8\times\left(\frac{7}{16}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{16}-\frac{\pi}{48}\right)=4-2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$ et la partie balayée a donc une aire de $2\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}-3\approx 0,9877$.

109-4 *proposé par Serge Parpay* :
Dans l'épreuve finale du rallye de seconde un exercice mettait en évidence la curiosité numérique suivante : 952 = 9^3 + 5^3 + 2^3 + 9x5x2. Existe-t-il d'autres nombres de trois chiffres possédant la même propriété ?

Solution de Walter Mesnier
Comme il faut se mettre à l'algorithmique, voici ce que j'ai tapé en Python et les trois solutions que j'obtiens :


```
# Créé par WM, le 14/07/2017 avec EduPython
for x in range(100,1000):
    a=int(str(x)[0])
    b=int(str(x)[1])
    c=int(str(x)[2])
    if a**3+b**3+c**3+a*b*c==x:
        print(x)
```

```
Console Python
*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (default, Jul  5 2016, 14:56:50) [MSC v.1600 32 bit (Intel)] on win32. ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
370
407
952
>>>
```