Ru – Bri – COL⅄AGE

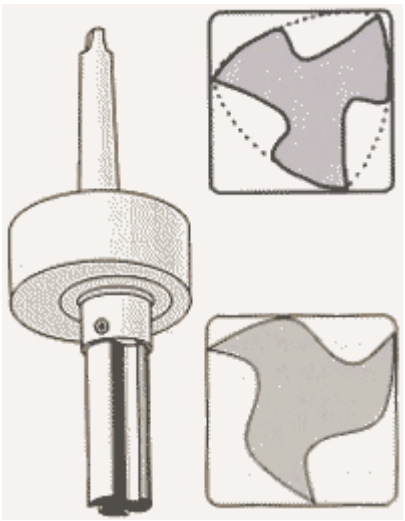
Frédéric de Ligt

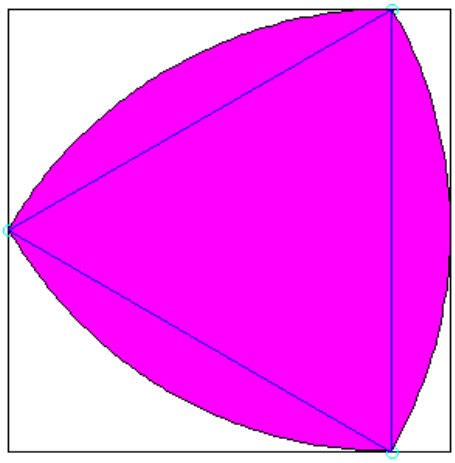
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

109-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
L'ingénieur britannique Harry Watts a inventé dans les années 1930, un foret en forme de triangle de Reuleaux. Il disait dans ses dépliants publicitaires : "*Qui croira que j'ai un outil qui peut percer des trous carrés ?*".





http://www.encyclopedie-incomplete.com/?Trou-Carre

En fait il y a un peu d'exagération dans cette affirmation de Harry Watts. Le trou n'est pas tout à fait carré, en effet les sommets ne sont pas atteints par le foret.
Quel pourcentage de l'aire du carré ce foret permet-il quand même d'atteindre ?

109-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Un célèbre théorème affirme que pour tout ensemble fini de points du plan non alignés il existe une droite contenant exactement deux points de cet ensemble.
Ce théorème peut-il être étendu à l'espace, c'est-à-dire : pour tout ensemble fini de points de l'espace non coplanaires, existe-t-il un plan contenant exactement trois points de cet ensemble ?

109-3 *proposé par Dominique Gaud (Migné-Auxances)* :
A la lecture de l'ouvrage « En cheminant avec Kakeya » de Vincent Borelli et Jean-Luc Rullière (ENS éditions, 2014) on découvre page 43 un encadré intitulé « Comment obtenir l'aire de la sphère à partir de son volume ? ». On suppose connue l'expression du volume de la sphère en fonction de son rayon *R*. On applique ensuite une couche uniforme d'épaisseur x sur toute la surface de la sphère. Son volume augmente alors de $\frac{4}{3}\pi(R+x)^3-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi x^3+4\pi Rx^2+4\pi R^2x$. La dérivée de cette expression est $4\pi x^2+8\pi Rx+4\pi R^2$ et la limite quand x tend vers 0 de cette

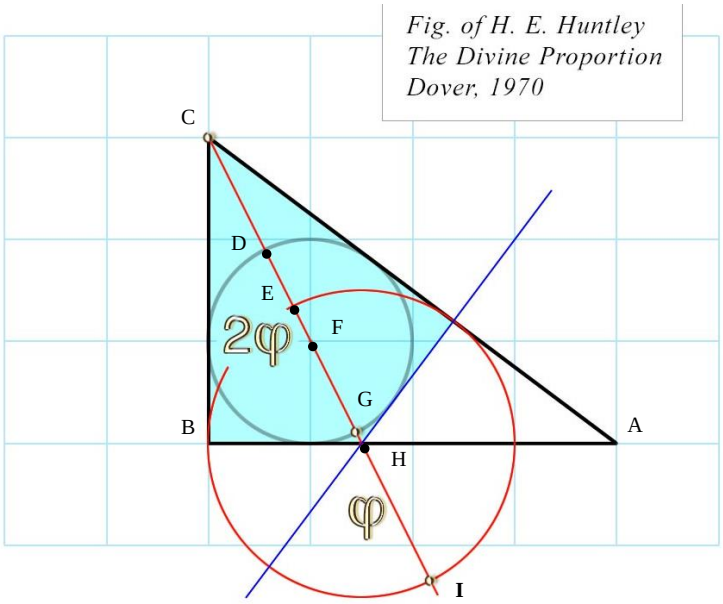
dérivée est justement l'aire de cette sphère à savoir $4\pi R^2$. Cette procédure peut-elle encore s'appliquer aux cas du pavé droit, du cône droit, du tore, de l'ellipsoïde et du tétraèdre régulier ?

109-4 *proposé par Serge Parpay (Niort)* :
Dans l'épreuve finale du Rallye de seconde un exercice mettait en évidence la curiosité numérique suivante : 952 = 9^3 + 5^3 + 2^3 + 9x5x2. Existe-t-il d'autres nombres de trois chiffres possédant la même propriété ?

Des solutions

103-3 *de l'artiste Yvo Jacquier (Prague) transmis par Jean-Paul Guichard* :

Figure accompagnée de l'énigmatique commentaire :
Huntley est passé par la puissance du point pour démontrer la tangente à l'hypoténuse. L'Égyptien préfère jouer au cerf-volant.



Solution de Frédéric de Ligt
On suppose connu le fait que le rayon du cercle inscrit dans ce triangle rectangle vaut 1 alors $CF = \sqrt{5}$ et donc $CD = CF - FD = \sqrt{5} - 1$ et enfin $CG = CD + DG = \sqrt{5} - 1 + 2 = \sqrt{5} + 1 = 2\varphi$.
Par ailleurs, comme (CH) est bissectrice intérieure de l'angle $\hat{C}$, on a $\frac{BH}{AH} = \frac{CB}{CA} = \frac{3}{5}$, joint au fait que BH + AH = AB = 4 on obtient que $BH = \frac{3}{2}$ et $AH = \frac{5}{2}$. On en déduit que $CH = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ puis que $CI = CH + HI = \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} = 3\varphi$, et enfin que $GI = CI - CG = 3\varphi - 2\varphi = \varphi$.

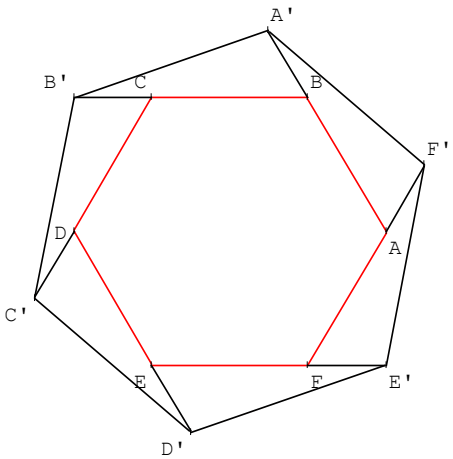
107-2 *de Frédéric de Ligt* :
Peut-on trouver à l'intérieur d'un triangle équilatéral de côté 185 un point situé à des distances entières de chacun des trois sommets ?

Solution de l'auteur
On peut écrire un petit programme pour répondre à la question. Pour limiter le nombre des réponses, surtout si l'on veut étendre la recherche au-delà du seul cas du triangle de côté 185, et compte tenu des symétries du problème, on peut restreindre l'étude en partageant le triangle équilatéral en 6 triangles semblables à l'aide des trois médiatrices et ne s'intéresser qu'aux points placés dans l'un de ces triangles situés à distances entières des trois sommets. Le programme ci-dessous donne aussi les points situés sur les bords du triangle équilatéral. Ainsi pour un côté 8 il fournit un point situé à 3 ; 5 ; 7 des sommets. La première valeur entière du côté d'un triangle équilatéral qui permette d'obtenir un point vraiment intérieur à distances entières des trois sommets est 147 avec des distances aux trois sommets de 73 ; 88 ; 95. Pour revenir au problème posé, 185 est la valeur suivante possédant la même propriété et les trois distances sont alors 43 ; 147 ; 152.

```
VARIABLES
    a EST_DU_TYPE NOMBRE
    b EST_DU_TYPE NOMBRE
    c EST_DU_TYPE CHAINE
    d EST_DU_TYPE NOMBRE
    n EST_DU_TYPE NOMBRE
    p EST_DU_TYPE NOMBRE
    q EST_DU_TYPE NOMBRE
    r EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    POUR n ALLANT_DE 2 A 185
        DEBUT_POUR
        p PREND_LA_VALEUR floor(n/sqrt(3))
        POUR a ALLANT_DE 0 A p
            DEBUT_POUR
            q PREND_LA_VALEUR n-a
            r PREND_LA_VALEUR floor(sqrt(pow(n,2)-sqrt(3)*n*a+pow(a,2)))
            POUR b ALLANT_DE q A r
                DEBUT_POUR
                d PREND_LA_VALEUR 3*(2*pow(a*b,2)+2*pow(a*n,2)+2*pow(b*n,2)-pow(a,4)-pow(b,4)-pow(n,4))
                c PREND_LA_VALEUR sqrt((pow(a,2)+pow(b,2)+pow(n,2)-sqrt(d))/2)
                SI (c-floor(c)==0) ALORS
                    DEBUT_SI
                    AFFICHER "un quadruplet solution (n ; a ; b; c)"
                    AFFICHER n
                    AFFICHER a
                    AFFICHER b
                    AFFICHER c
                    FIN_SI
                FIN_POUR
            FIN_POUR
        FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

107-3 *de Jacques Chayé* :

On donne un hexagone régulier dont le côté est a ; on prolonge les côtés dans le même sens d'une longueur égale à ma ; on joint les extrémités de ces côtés ainsi prolongés, et l'on demande de prouver que la figure ainsi formée est un hexagone régulier et que l'aire de ce nouvel hexagone est égale à l'aire du premier hexagone multipliée par $m^2 + m + 1$.



Solution de l'auteur

Utilisons la formule d'Al Kashi dans le triangle ABB' :

Posons A'B' = x.

$$x^2 = m^2a^2 + (a+ma)^2 - 2ma(ma+a)\cos(\frac{\pi}{3}) = a^2(m^2+m+1).$$

Les aires des deux hexagones étant proportionnelles aux carrés des côtés, l'aire du second est donc égale à celle du premier multipliée par m^2+m+1.

On peut aussi utiliser la formule du sinus : $S = 6\times a\frac{a\sqrt{3}}{4} = a^2\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

L'aire totale s des triangles du pourtour est $s = 6[\frac{1}{2}ma(a+ma)\frac{\sqrt{3}}{2}] = a^2\frac{3\sqrt{3}}{2}m(m+1)$.

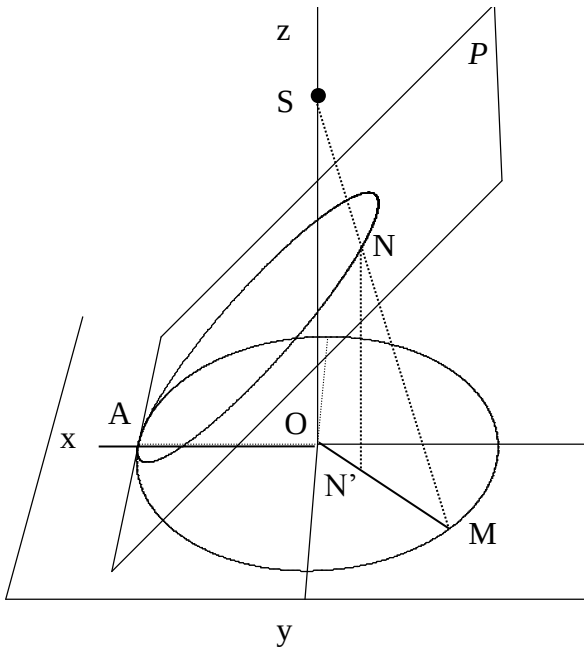
L'aire du grand hexagone est $S+s = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}(m^2+m+1) = S(m^2+m+1)$

108-4 *de Dominique Gaud* :

Si l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan est une ellipse, en quelle courbe se transforme-t-elle quand on déroule le patron sur un plan ?

Solution de Jacques Chayé

Soit un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k})$; le cercle C de centre O et de rayon 1, dans le plan Oxy ; le point $S(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$; le plan P d'équation $z = 1 - x$.
Le cône de sommet S et de directrice C est coupé par le plan P suivant une ellipse. On recherche la courbe transformée de cette ellipse quand on développe la surface extérieure du cône.
Soit M un point variable du cercle C et soit t une mesure en radians de $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ (si t varie de 0 à 2π, M décrit le cercle C dans le sens direct de A à A).



Coordonnées de N, point d'intersection de (SM) et P :

Pour qu'un point $Q(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartienne à la droite (SM), il faut et il suffit qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{SQ}=\lambda\overrightarrow{SM}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x=\lambda\cos t \\ y=\lambda\sin t \\ z=2-2\lambda \end{cases}$.

Pour qu'en outre ce point Q appartienne à P, il faut et il suffit que $2-2\lambda=1-\lambda\cos t$ soit encore $\lambda=\dfrac{1}{2-\cos t}$. Le point N a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{\cos t}{2-\cos t},\dfrac{\sin t}{2-\cos t},\dfrac{2-2\cos t}{2-\cos t}\right)$.

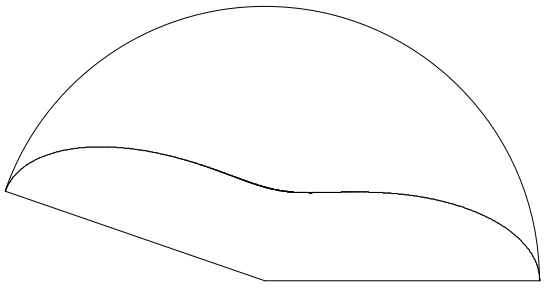
Calcul de la distance MN :

Soit N' le projeté orthogonal de N sur le plan Oxy. Dans les triangles rectangles semblables SOM et NN'M on voit que $\dfrac{MN}{MS}=\dfrac{N'N}{OS}$ c'est-à-dire $\dfrac{MN}{\sqrt{5}}=\dfrac{\frac{2-2\cos t}{2-\cos t}}{2}=\dfrac{1-\cos t}{2-\cos t}$ donc $MN=\sqrt{5}\dfrac{1-\cos t}{2-\cos t}$.

Équation polaire de la courbe transformée de l'ellipse dans le développement du cône :

Dans le développement du cône, le cercle C est transformé en un arc de cercle de rayon $\sqrt{5}$ et de longueur 2π. La mesure α en radians du secteur angulaire représentant le cône développé vérifie donc $2\pi=\sqrt{5}\alpha$ ou encore $\alpha=\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}$. Plus généralement, la mesure θ en radians du secteur angulaire représentant la partie du cône développée de [SA] à [SM] vérifie $t=\sqrt{5}\theta$ ou encore $\theta=\dfrac{t}{\sqrt{5}}$.

L'équation polaire du lieu M s'écrit donc

$$\rho=\sqrt{5}-\sqrt{5}\frac{1-\cos(\theta\sqrt{5})}{2-\cos(\theta\sqrt{5})}\quad\left(0\le\theta\le\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\right).$$

D'où le développement ci-contre de l'ellipse.