Ru – Bri – COL↳AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

108-1 *Une observation d'Emile Borel* :
Un problème de loterie

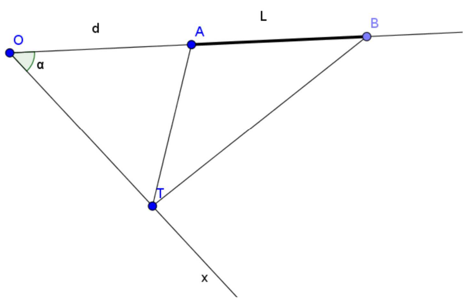
« C'est un fait assez remarquable qu'il y ait exactement le même nombre total de paires dans les numéros à une paire et dans les numéros à deux paires. Le fait ne se produit pas pour toutes les valeurs du nombre total de chiffres employés (ici égal à 10 puisque nous utilisons le système décimal) et du nombre de chiffres formant les numéros considérés. »

(Les numéros utilisés dans cette loterie possèdent tous six chiffres.)

1) Que vaut ce nombre total de paires évoqué par Emile Borel ?
2) Dans quelles bases et pour quels numéros cette coïncidence peut-elle se reproduire ?

108-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Quel est le nombre maximal de régions du plan déterminées par n cercles ?

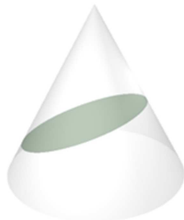
108-3 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :



En quel point de $[Ox)$ doit se placer le tireur T pour voir le but $[AB]$ sous un angle $\widehat{ATB}$ maximal ?

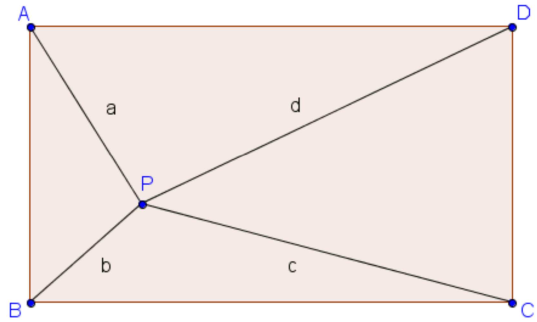
108-4 *de Dominique Gaud (Migné-Auxances)* :

Si l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan est une ellipse, en quelle courbe se transforme-t-elle quand on déroule le patron du cône sur un plan ?



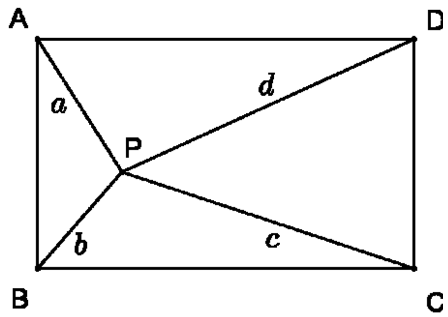
Des solutions

105-3 *de Walter Mesnier* :



Enigme inspirée de celle du calendrier des énigmes 2016 du 13 Mai.
Il s'agissait de calculer la longueur PD = d dans un rectangle ABCD où P est un point intérieur au rectangle, et où PA = a, PB = b et PC = c sont donnés (égaux à 9 , 4 et 6).
→ L'étonnante relation a² + c² = b² + d² permet de répondre. Mais on peut encore creuser. Je propose de modifier les longueurs données et de prolonger le questionnement :
1) On suppose a = 5, b = 1 et c = 5. Démontrer que d = 7 et que l'aire maximale du rectangle est 32.
2) On suppose a = 4, b = 1 et c = 7. Calculer d et l'aire maximale du rectangle.
3) On suppose que a, b et c sont des nombres entiers à un chiffre. Quels triplets peut-on choisir pour que d soit aussi un nombre entier. L'aire maximale du rectangle est-elle alors aussi un nombre entier ?

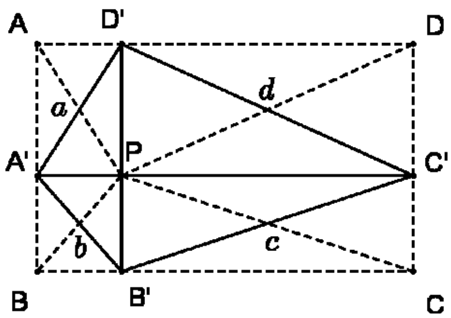
Solution de Bruno Alaplantive



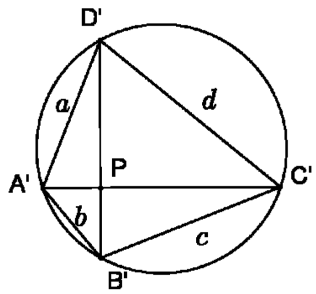
On peut toujours se ramener à la configuration ci-contre à des symétries près.

Longueur : *L* = AD ; largeur *l* = AB.

On introduit le quadrilatère convexe A'B'C'D' comme indiqué ci-après.



La relation $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ résulte du théorème de Pythagore aux quatre triangles rectangles en P. L'inégalité de Ptolémée appliquée à A'B'C'D' donne :
$A'C' \times B'D' \leq A'D' \times B'C' + A'B' \times C'D'$;
soit encore *L* × *l* ≤ ac+ bd.
La valeur maximale de l'aire est donc égale à ac + bd (si on peut l'atteindre). On sait que l'égalité de Ptolémée équivaut au fait que le quadrilatère considéré est inscriptible.



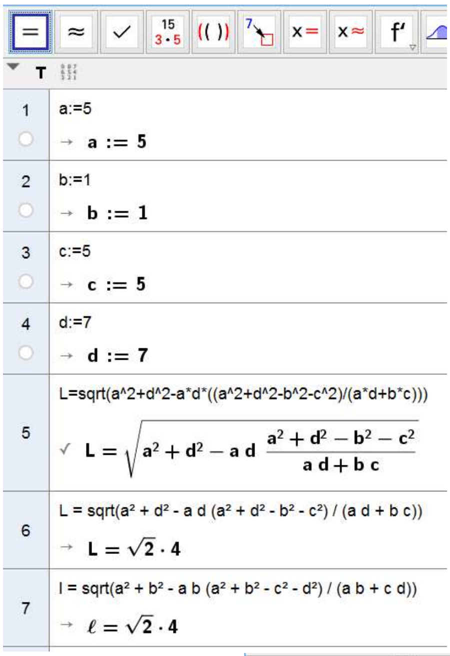
Inscrits de part et d'autre de la corde [A'C'], les angles en D' et en B' sont supplémentaires et leurs cosinus opposés.
L'application du théorème d'Al-Kashi dans le triangle A'D'C' permet d'écrire $A'C'^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(D')$.
De même dans A'B'C' on obtient $A'C'^2 = b^2 + c^2 - 2BC\cos(B')$; soit encore $A'C'^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(D')$.

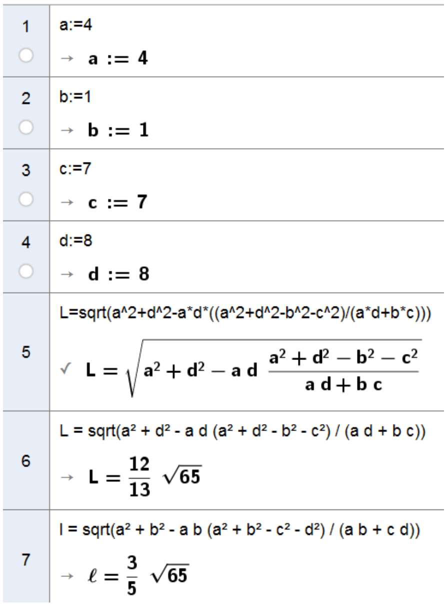
On en déduit que $\cos(D') = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$ puis que $A'C'^2 = L^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}$.

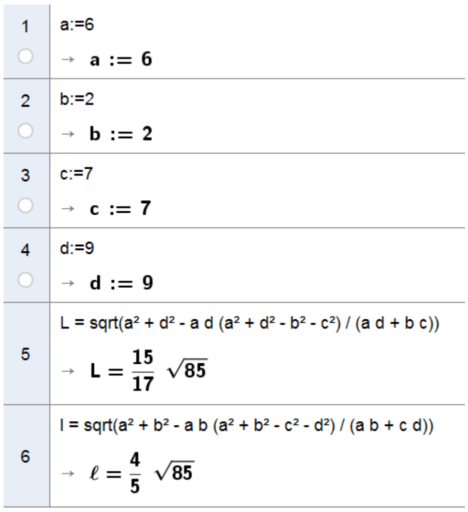
Et de même par permutation : $B'D'^2 = l^2 = a^2 + b^2 - ab\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{ab+cd}$.
1^ère^ **question.** On obtient $d^2 = a^2 + c^2 - b^2 = 49$ d'où d = 7.
L'aire maximale est ac + bd = 5 × 5 + 1 × 7 = 32.

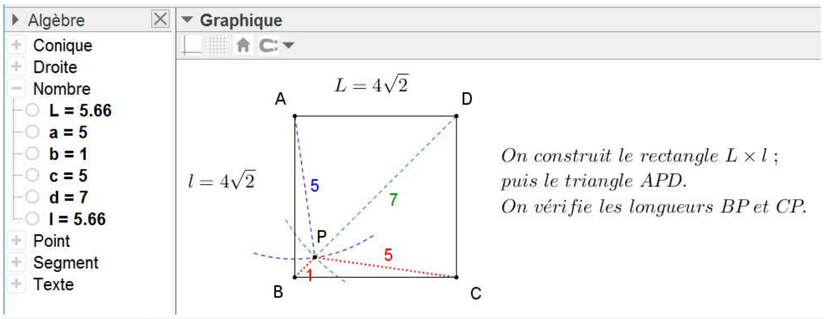
$2^{ème}$ **question.** On obtient $d^2 = a^2 + c^2 - b^2 = 64$ d'où $d = 8$.
L'aire maximale est $ac + bd = 4 \times 7 + 1 \times 8 = 36$.

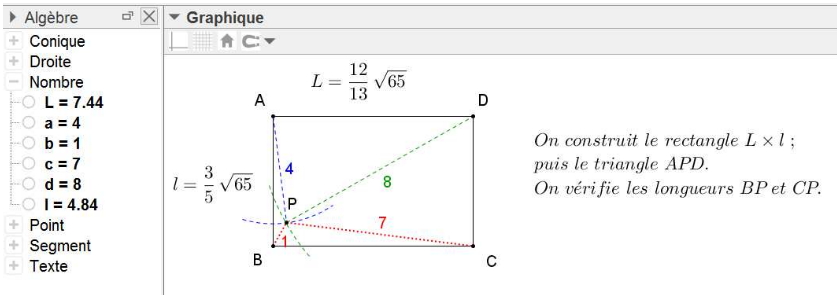
$3^{ème}$ **question.** En gardant la configuration $b < a < d$ et $b < c$, il existe un seul troisième triplet : $(a\ ;\ b\ ;\ c) = (6\ ;\ 2\ ;\ 7)$ (obtenu par exhaustion des cas sur tableur), on a alors $d = 9$.
En prenant $a = b < c = d$ on obtient de nouveaux triplets et de même en prenant $a = b = c = d$.
Ci après on donne les constructions des 3 solutions de la configuration $b < a < d$ et $b < c$.

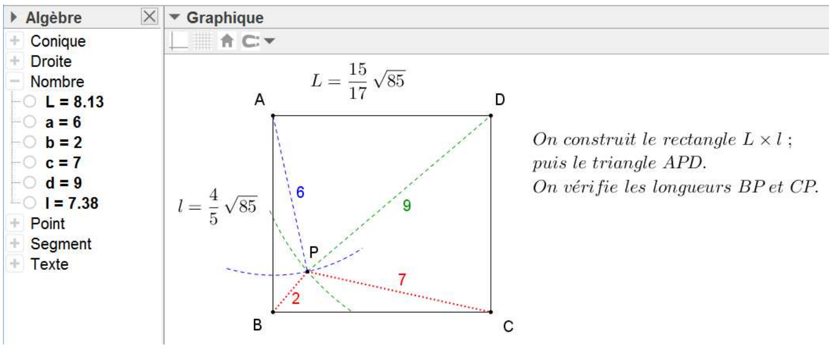












106-2 *de Frédéric de Ligt* :

Une étonnante égalité relie π et son approximation historique donnée par Archimède :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7} - \pi$$

Comment l'établir ?

Solution de l'auteur

Le développement du polynôme $X^4(1-X)^4$ donne $X^8 - 4X^7 + 6X^6 - 4X^5 + X^4$ et par division euclidienne on a l'identité $X^8 - 4X^7 + 6X^6 - 4X^5 + X^4 = (X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4)(X^2 + 1) + (-4)$

D'où $\dfrac{X^4(1-X)^4}{X^2 + 1} = X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4 - \dfrac{4}{X^2+1}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1})dx = \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 4\arctan 1 = \frac{22}{7} - \pi$

107-1 *posé à des élèves singapouriens de niveau seconde lors d'un concours* :

Cheryl donne à ses deux amis dix dates possibles de son anniversaire : les 15, 16 et 19 mai ; le 17 et 18 juin ; le 14 et 16 juillet ; le 14, 15 et 17 août. Cheryl a ensuite dit à Albert le mois, et à Bernard le jour de son anniversaire. Albert affirme ensuite : *« Je ne sais pas quand est l'anniversaire de Cheryl mais je sais que Bernard ne le sait pas non plus. »* Bernard ajoute : *« Au départ, je ne savais pas quand était l'anniversaire de Cheryl, mais maintenant je sais. »* Albert répond : *« Alors je sais aussi quand est l'anniversaire de Cheryl. »*
Et vous, avez-vous deviné la date de l'anniversaire de Cheryl ?

Solution de Frédéric de Ligt

Avec juste la connaissance du mois de naissance Albert ne peut pas deviner la date de l'anniversaire de Cheryl puisqu'il y a deux ou trois jours possibles par mois. Albert affirme que Bernard ne peut pas savoir lui non plus. Ce ne peut être que parce que le mois que lui a révélé Cheryl n'est ni mai ni juin sinon Cheryl aurait très bien pu donner à Bernard comme jour le 18 ou le 19 et ce dernier en aurait immédiatement pu en déduire le mois de naissance. Cheryl est obligatoirement née en juillet ou en août. Bernard ayant fait ce raisonnement il reste à choisir entre cinq dates. Dans cette liste le 14 est le seul jour à apparaître deux fois, or si Cheryl avait donné à Bernard ce jour-là, Bernard ne pourrait pas affirmer qu'il connaît désormais la date de l'anniversaire de Cheryl. Il reste donc seulement trois dates disponibles à ce moment du dialogue. La dernière affirmation d'Albert n'a de sens que s'il n'y a qu'un seul jour compatible avec le mois que Cheryl lui a communiqué. Il s'agit du 16 juillet. Cheryl est donc née un 16 juillet.

107-4 *de Frédéric de Ligt* :

La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - ... - \frac{1}{n^2}$ converge-t-elle et si oui vers quelle limite ?

Solution de l'auteur

On note $(H_n)_{n\geq 1}$ la série harmonique définie par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n - \mathrm{Ln}(n) = \gamma$ où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Par conséquent on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} H_{n^2} - \mathrm{Ln}(n^2) = \gamma$. On peut écrire :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - ... - \frac{1}{n^2} = H_n - (H_{n^2} - H_n) = 2H_n - H_{n^2} = 2\left(H_n - Ln(n)\right) - \left(H_{n^2} - Ln(n^2)\right).$$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - ... - \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(H_n - Ln(n)\right) - \left(H_{n^2} - Ln(n^2)\right) = \gamma$.