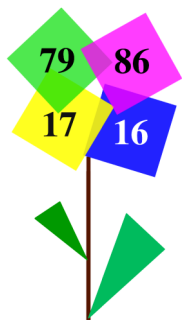




Association  
des Professeurs  
de Mathématiques  
de l'Enseignement  
Public



Régionale de  
Poitou-Charentes

# Corol'aire

Mars 2017

n°108

## Destins croisés

Sébastien Dassule-Debertonne

Cédric Villani l'assure, dans Sciences et Avenir, « Les mathématiques [sont] une formation d'avenir à n'en point douter. » Nous n'en doutons pas et il suffit de voir le nombre de reportages proposés aux journaux télévisés sur ce thème pour en être convaincus. La finance, les assurances, l'informatique bien entendu sont en recherche de mathématicien, mais le domaine du Big data est en explosion, sans compter les interactions moins connues avec la médecine ou la biologie.

Dans tous ces domaines, ce sont des métiers de haut niveau qui sont proposés, et qui ne sont pas toujours pourvus.

Dans la conjoncture que nous connaissons, ceci pourrait être une vraie lueur d'espoir pour les jeunes que nous avons en classe. Pourtant, ce message ne passe pas.

Pire, si on regarde les dernières enquêtes TIMSS et PISA, la réussite des élèves est inquiétante et s'aggrave d'étude en étude. Doit-on en déduire que les élèves que nous avons aujourd'hui se désintéressent des mathématiques car c'est une discipline trop ardue ? Je ne le crois pas.

D'où vient cette image paradoxale d'un besoin si fort en face d'un affaissement si grand ?

Peut-être que l'institution ne croit pas elle-même à la possibilité des jeunes de réussir en sciences ? Et il suffit d'écouter les choix d'orientation pour cela : « la série S ouvre plus de portes » est un argument, et certainement pas le plus faux. Les élèves qui viennent y faire des sciences, et qui en feront leurs études par la suite, sont à peine majoritaires. Cet état de fait était déjà existant il y a 10 ans, et la réforme du lycée, dont l'un des enjeux était de spécialiser les séries n'a finalement fait que renforcer cela. La simple étude des horaires en sciences suffit à le comprendre.

Et les élèves, qui n'ont plus le temps d'approfondir, ne font plus de lien entre différentes parties du programmes ni entre les disciplines scientifiques (ou difficilement), ont du mal à synthétiser et souffrent de manques techniques. Puis se désintéressent.

Ils ont besoin de temps pour appréhender la finesse de notre discipline et plus généralement des sciences, pour faire des liens, pour abstraire. Et nous, nous avons besoin de liberté et de confiance dans notre expertise professionnelle.

1. [https://www.sciencesetavenir.fr/fondamental/cedric-villani-les-mathematiques-une-formation-d-avenir\\_110067](https://www.sciencesetavenir.fr/fondamental/cedric-villani-les-mathematiques-une-formation-d-avenir_110067)

2. [https://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/IGAERN\\_/06/0/seriescientifique\\_22060.pdf](https://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/IGAERN_/06/0/seriescientifique_22060.pdf)

### Sommaire

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| Rallye.....                 | p.2  |
| Compte rendu du comité..... | p.3  |
| Audience .....              | p.4  |
| Histoire d'angles.....      | p.6  |
| Histoire de médiane         | p.8  |
| Rubricollage.....           | p.14 |
| MdM.....                    | p.18 |
| On nous écrit.....          | p.20 |

# Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Groupe Rallye



participants.

Le Rectorat a fait parvenir, avant les vacances de février, les épreuves du Rallye Mathématique de Poitou-Charentes ainsi que les différentes consignes dans les établissements

surcroît de travail dû à la mise en place de la réforme des collèges.

Il est possible de regarder l'évolution de la participation des classes ainsi que leur répartition sur les quatre départements en consultant le dossier de presse mis en ligne sur le site de l'APMEP. Y figure aussi la carte géographique de la participation au Rallye.

Début mars, dernière ligne droite avant le Pi-day. Le Pi-day ? C'est le 14 mars ! (le mois : mars ou 03, le jour : 14 d'où 3.14). Oui, l'équipe organisatrice du Rallye est un peu facétieuse : on le remarque, en particulier, à travers les titres des exercices : « Nombres qui ont du caractère », « Assommantes suites à sommer », « Pointilleux pointillés », ...

Mais le Pi-day, c'est surtout le jour où les classes ont passé les épreuves du Rallye !

Cette année, 437 classes se sont inscrites. Elles se répartissent de la façon suivante : 147 classes de 6ème, 94 classes de 5ème, 68 classes de 4ème, 52 classes de 3ème, 11 classes de 2nde Pro et 65 classes de 2nde générales.

On note une baisse de la participation des classes de collège. Après consultation de collègues, il semble que la cause principale soit le

L'équipe du Rallye espère que les élèves ont pris du plaisir à répondre aux questions du thème « Nombres, formes et jeux » ainsi qu'à chercher les solutions des différents exercices.

Tous les dossiers doivent être parvenus à l'APMEP, site du Futuroscope, avant le 22 mars car ce jour-là a lieu l'anonymat puis la répartition des dossiers entre les différents correcteurs.

Comme les années passées, il y aura ensuite une délibération puis un palmarès qui sera envoyé aux classes lauréates avant le 5 mai afin que les professeurs des classes concernées aient le temps de s'organiser en vue de la remise des prix, le mercredi 7 juin à Poitiers.

Vous pourrez retrouver le texte des épreuves ainsi que toutes les informations concernant le Rallye 2017 sur le site de l'APMEP à partir du début avril.



Mise sous enveloppe des épreuves du Rallye

# Compte-rendu du comité du 15 février 2017

## Audience avec la Rectrice

Elle aura lieu vendredi 17 février à 10 h.

La Régionale sera représentée par Sébastien Dassule-Debertonne, Philippe Rogeon et Corinne Parcelier. Les IPR y sont conviés aussi.

Nous préparons nos arguments pour défendre la tenue de notre Journée de la Régionale. (Lire le compte-rendu page suivante).

Nous prévoyons également de remettre à Mme la Rectrice un exemplaire du catalogue de l'exposition Maths & Puzzles.

## Futuroscope

Le groupe de travail se met en place. La première réunion a eu lieu le mercredi 1<sup>er</sup> février dans les locaux de l'IREM.

Étaient présents :

Sébastien Dassule-Debertonne, Jacques Germain, Dominique Gaud, Corinne Parcelier, Jean-Paul Guichard, Jean-Marie Parnaudeau, Julien Michel, Jacques Chayé, Audrey Fayollat, Nathalie Chevalarias, Jacqueline Guichard.

Font aussi partie du groupe : Cécile Cheminard, Cyrille Kirch, Daniel Guiraud

Un dossier dans la dropbox a été ouvert et partagé par Sébastien.

La demande initiale est d'une fiche par bâtiment et par cycle.

La question qu'on doit se poser est : quelle conception des mathématiques voulons-nous promouvoir dans ces fiches ?

Nous ne souhaitons pas proposer des exercices de type « scolaire » tels qu'on en trouve déjà dans les manuels. Il faudrait réussir à faire des maths dans un contexte tout en établissant un lien avec les programmes (notamment pour les cycles 1, 2 et 3) et privilégier la démarche de questionnement.

Les fiches seraient du coup davantage une déclinaison par cycle pour chaque bâtiment. Nous avons choisi de commencer par l'architecture du parc.

La prochaine étape est la visite du site le mercredi 8 mars : rendez vous à 14 h à l'IREM. Nous pourrons à cette occasion faire le plein de pistes d'explorations...

## Rallye

Toujours en lien avec le Futuroscope qui nous donne 105 entrées comme lot, la personne qui représente les intérêts du site a demandé à Sébastien et Dominique que figure sur l'affiche « prix offerts par le Futuroscope » en complé-

ment du logo. Cela soulève un petit débat : si on le fait pour eux il faut le faire pour les autres. Mais il faut aussi reconnaître l'importance de leur don. Nous demandons à Jean s'il serait possible de faire apparaître certains logos comme partenaires et d'autres comme donateurs de lots.

Pour la remise des prix, il faudra prendre deux totems du Futuroscope.

Nous constatons une baisse des inscriptions cette année (environ 100 classes de moins) surtout sur les niveaux 6<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup>. En cause d'après les messages échangés avec les coordonnateurs, le surcroît de travail dû à la réforme du collège et le manque de temps pour préparer l'épreuve.

## Conférence-Atelier

La conférence de Julien Michel a eu lieu mercredi 25 janvier à l'IUT de Niort. Malheureusement, très peu de personnes étaient présentes. Cela nous amène à repenser cet aspect de notre activité. Il serait peut-être plus judicieux de proposer des ateliers déconcentrés plus axés sur la formation des collègues, par exemple : Présentation de l'exposition et exploitations possibles ; pistes pour l'Accompagnement Personnalisé en 2<sup>nde</sup> ; utilisation de LaTeX ; jeux (comment ouvrir un club)...

Chacun est amené à recenser ce qu'on est capable de proposer, ce que l'on souhaiterait voir proposer. Nous organiserons une consultation pour obtenir les vœux des collègues, notamment lors de la Journée de la Régionale.

Pour rappel :

- conférence d'André Deledicq vendredi 17 mars à 20h30 à l'EMF : Puzzles et géométrie ;
- conférence d'Olivier Salon mardi 4 avril à 20h30 à l'EMF : Ponts mathématiques vers la littérature.

## Comité National

Lors du prochain comité sera voté la création ou non d'une nouvelle revue remplaçant PLOT et le Bulletin Vert. À l'heure actuelle, ces deux publications n'ont pas la même vocation et sont pilotées par deux équipes différentes. On ne sait pas comment est prévue la nouvelle formule : tout numérique ? Quel tarif ? Quelles rubriques ?

Frédéric nous représentera et votera pour le maintien d'une version papier de la brochure.

Nous accordons à Pierre-Jean Robin notre soutien pour sa candidature individuelle au Comité National.

# Compte-rendu de l'audience auprès de Mme la Rectrice

Présents :

pour le Rectorat : Mme Bisagni-Faure (Rectrice), M. Blugeon (Directeur de cabinet), M. Diaz (secrétaire général de l'académie), M. La Fontaine (IA-IPR de mathématiques).

pour l'APMEP : Mme Parcelier, M. Dassule-Debertonne et M. Rogeon

Nous rappelons à Mme la Rectrice l'objet de notre demande, à savoir la pérennité des ordres de mission pour les participants à la Journée de la Régionale dans les mêmes proportions qu'actuellement, éventuellement ordres de mission sans frais. En effet, nous avons rencontré cette année quelques péripéties qui ont pu s'arranger grâce à l'intervention des IA-IPR, mais ces arrangements non seront pas reproductibles.

Mme la Rectrice nous rappelle que, dans le cadre des formations et suite au rappel de la Cour des Comptes, il n'est pas possible de convoquer des stagiaires sans ordre de mission et que ceux-ci doivent inclure les frais de déplacement. En revanche, M. La Fontaine rappelant les actions que mènent l'association et leur intérêt, Mme la Rectrice nous affirme sa volonté de voir la Journée de la Régionale se maintenir en l'état et assure la prise en charge d'une soixantaine d'actifs cette journée (ce qui correspond peu ou prou au nombre d'actifs participant depuis quelques années). Elle annonce qu'elle contactera son homologue de Lorraine pour se renseigner sur la pratique locale face à une journée à 200 participants. Elle reste en revanche très vague lorsque nous évoquons l'hypothèse d'une augmentation du nombre d'inscrits, et d'une éventuelle limite au nombre de participants. Nous risquons donc de nous retrouver dans une situation similaire à l'an passé si nous devenons trop attractifs.

Nous en profitons pour présenter les activités de notre Régionale APMEP. Le lien que nous avons créé avec l'AGEEM à l'occasion de l'exposition « Maths & Puzzles »<sup>1</sup> interpelle tout particulièrement Mme la Rectrice. En effet, les résultats de l'enquête TIMSS 2015<sup>2</sup> relèvent de moindres performances en sciences des élèves français de CM1 par rapport à leurs camarades européens et

internationaux. En particulier, les professeurs des écoles avouent un manque de construction mathématique du nombre, se sentent peu à l'aise et manquent de formation. Aussi elle entend mener une politique forte en ce sens et veut appuyer toute initiative permettant une formation et/ou des projets intégrant des professeurs des écoles. Pour ce qui nous concerne, Mme la Rectrice nous assure de son appui pour favoriser la participation des professeurs des écoles à notre Journée Régionale, éventuellement en intégrant cette journée dans leur plan de formation (tout du moins pour les professeurs des écoles locaux du lieu de la journée). Cela nécessite une connaissance rapide du thème de la journée et l'animation d'un atelier dédié.

D'un point de vue de la formation, Mme la Rectrice émet l'idée de redéfinir l'adossement de l'ESPE à la recherche, en particulier que les mémoires des stagiaires soient définis à partir de questions concrètes qui amènent par la suite à des recherches didactiques fondamentales.

Les ateliers décentrés que nous avons évoqués en comité peuvent aussi trouver écho auprès des PE et favoriser la liaison École-Collège. Mme la Rectrice rappelle en particulier que ces ateliers pourraient trouver toute leur place dans les réseaux ECLORE.

Enfin, Mme la Rectrice souhaite être informée des avancées du travail avec le Futuroscope. En particulier si une classe utilise les fiches que nous produisons, elle souhaite venir valoriser notre travail.

---

1. Mme la Rectrice, à qui nous avons remis le catalogue de l'exposition, devrait visiter l'expo avec une classe.

2. <http://www.education.gouv.fr/cid109652/timss-2015-mathematiques-et-sciences-evaluation-internationale-des-eleves-de-cm1.html>



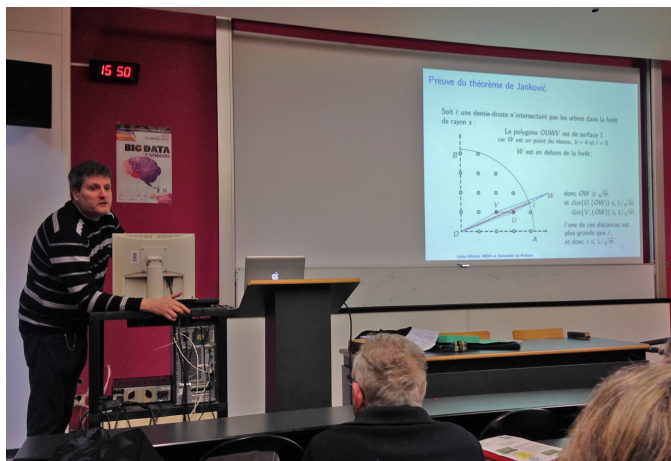
# Promenons-nous dans les bois...

Philippe Rogeon

## *Retour sur la conférence de Julien Michel, le 25 janvier à Niort*

Le mathématicien est incorrigible. Lâchez-le dans une forêt, son imagination va le transporter dans un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , où les arbres sont des cylindres dont les projections orthogonales sur le sol définissent des disques. Ceux-ci peuvent constituer un réseau, dans le cas d'une forêt plantée, ou se répartir de façon aléatoire, comme des confettis retombant sur le sol, pour une forêt naturelle. Notre mathématicien cherchera alors à optimiser une fonction (sa vision sans obstacle) de plusieurs variables (sa position, la direction de son regard) soumises à des contraintes (pas d'arbre à la place de l'observateur, pas de chevauchement entre les arbres).

C'est à partir de ce moment de poésie, et d'un article presque centenaire de G. Pólya<sup>1</sup>, que Julien Michel, professeur à l'Université de Poitiers, directeur de l'IREM, a montré lors de sa conférence du 25 janvier à Niort comment le problème modélisé peut être résolu à l'aide d'objets tels que les fonction circulaires réciproques, la loi exponentielle ou la loi de Poisson.



Les chercheurs sont restés actifs depuis l'article de Pólya, et V. Jankovic<sup>2</sup> a obtenu un résultat plus puissant avec une formule plus simple. Julien consacre lui aussi une partie de ses activités de recherche à ce problème<sup>3</sup>, pour lequel des hypothèses moins restrictives (réseaux non orthonormés, arbres non cylindriques) complexifient les calculs.

Ces travaux ne sont pas anodins, et intéressent, entre autres, les gestionnaires de forêts des pays d'Europe du Nord qui peuvent, à partir des données de visibilité, en reconstruire les caractéristiques et optimiser l'abattage des arbres. Traiter un problème inverse, en termes mathématiques !

---

1. G. Pólya, Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde, Archiv der Mathematik und Physik, ser.3, 27 (1918), 135-142.

2. V. Jankovic, Solution of one problem of G. Pólya, Mat. Vesnik 48 (1996), 47-50.

3. P. Calka, J. Michel & S. Porret-Blanc, Visibilité dans le modèle Booléen, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 347 (2009)

## Remerciements

Merci à monsieur Durand, collègue de mathématiques qui est parti à la retraite après avoir effectué une grande partie de sa carrière au collège de Chalais en Charente. Il vient en effet de faire don à la Régionale de toute sa collection de livres et de brochures mathématiques. Les ouvrages seront stockés dans la bibliothèque de l'IREM de Poitiers et pourront ainsi être utilisés par les jeunes stagiaires qui se destinent à la profession.



# Histoire d'angles

IREM de Poitiers, groupe collège

## Épisode 5 : Instruments pour la mesure des angles (1)

Astronomie, navigation et arpentage sont les domaines principaux pour lesquels vont être développés de nombreux instruments de mesure des angles.

Il est difficile à ce jour de séparer la naissance du rapporteur simple de celle de l'astrolabe qui est un rapporteur dédié à l'astronomie puis plus tard aux relevés terrestres.

Hipparque, en systématisant la subdivision du cercle en  $360^\circ$ , perfectionne les instruments d'observation comme le dioptre et l'astrolabe, mais il faut attendre Théon d'Alexandrie (IV<sup>e</sup> siècle) qui écrit un traité détaillé sur l'astrolabe puis Jean Philopon (VI<sup>e</sup> siècle) ; ensuite développement et transmission des instruments se font par les savants arabes, dont Al-Khwarizmi (voir Dutarte : <http://dutarte.perso.neuf.fr/instruments/astro%20histoire.htm>).

Pour les relevés d'angles en astronomie, citons plusieurs instruments.

### Le Triquetrum

Le triquetrum, est un instrument astronomique décrit et utilisé par Ptolémée au II<sup>e</sup> siècle.



Deux bras mobiles sont articulés à un poteau vertical. Le triquetrum a permis la mesure de l'altitude angulaire d'un corps céleste. Notons que le bras inférieur contient des graduations angulaires, le bras supérieur servant de ligne de visée.

Vous trouverez la description et reconstitution de celui de Copernic en suivant le lien : <http://articles.adsabs.harvard.edu//full/1951Astr..65...33P/0000035.000.html>.

### Les quadrants, sextants, octants, quartier de Davis, nocturlabe

Ce sont des parties du cercle gradué qui ont servi à relever des angles, donc des positions.

Quelques adresses pour se documenter en ligne :

<http://www.planetarium-provence.com/instrumentsgrandesdecouvertes1.pdf>

<http://cral.univ-lyon1.fr/labo/fc/navigation/astronavig.htm>

<http://dutarte.perso.neuf.fr/instruments/Quadrant%20Universel%20Fine.htm>

Un quadrant d'artillerie du XV<sup>e</sup> siècle à réaliser en bois :

<http://ostdudauphin.forumperso.com/t1228-quadrant-double-clinometre-d-artillerie-xve>

Le quadrant mural de Tycho Brahe à réaliser :

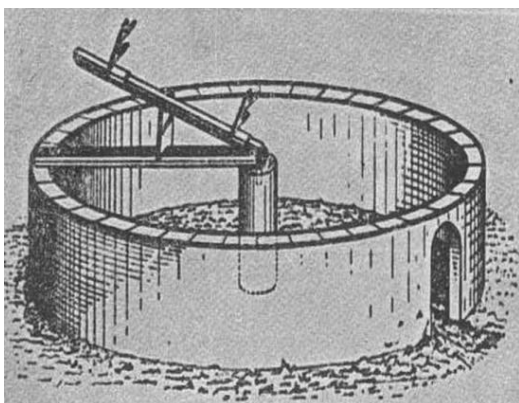
[http://www-physique.u-strasbg.fr/~udp/wfn-www/webphy/astronomie/astrometrie/quadrant\\_tycho\\_brahe/quadrant\\_tycho\\_brahe.html](http://www-physique.u-strasbg.fr/~udp/wfn-www/webphy/astronomie/astrometrie/quadrant_tycho_brahe/quadrant_tycho_brahe.html)

Construction d'instruments :

<http://www.warmaths.fr/MATH/geometr/Angles/ANGLinstru2.htm>

## Les observatoires

Un observatoire ottoman,  
XVI<sup>e</sup> siècle



<http://www.muslimheritage.com/article/instruments-istanbul-observatory>

Observatoire de Dehli (Jantar Mantar),  
XVIII<sup>e</sup> siècle



<http://www.delhiflash.com/2010/10/jantar-mantar-ancient-astronomical.html>

Les instruments géants des observatoires indiens : certains de ces instruments construits à partir du XV<sup>e</sup> siècle permettent des mesures d'angles. Par exemple le Shasthamasa Yantra est un sextant.

<http://www.cadrans-solaires.fr/cadrans-observatoire-dehli-2.html>

[http://museumsrajasthan.gov.in/mounment\\_Jantar-Mantar.htm](http://museumsrajasthan.gov.in/mounment_Jantar-Mantar.htm)

En suivant les liens que nous vous proposons, vous découvrirez des réalisations fabuleuses.

Tous ces instruments à étudier ou réaliser permettent de faire des mathématiques intéressantes, en prise avec des problèmes à résoudre. Ils sont aussi des matériaux de choix pour collaborer avec d'autres disciplines comme l'histoire ou la technologie, pour le plaisir de tous ou dans le cadre des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires (EPI).

## Référence

IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques en 5<sup>e</sup> à partir des grandeurs : les ANGLES*, Poitiers, 2014.

# Ordinal ou métrique, pour une histoire de la médiane.

Jean-Marie Parnaudeau

Tout un chacun sait que si l'on mesure plusieurs fois un caractère d'un objet ou d'un individu, les valeurs des différentes mesures ne seront pas toutes identiques, et ce, quelle que soit la précision de l'instrument de mesure. Plus l'instrument de mesure sera précis et fiable, plus l'observateur, celui qui fait la mesure, sera habile ou entraîné, plus les mesures seront proches. Cette variabilité et le choix du « milieu à prendre » sont à la base de la théorie des erreurs.

Moyenne et milieu synonymes ? Pas si simple !

Deux citations avant de commencer :

L'une de Jean Bernoulli<sup>1</sup> : « Le problème de prendre, entre un certain nombre d'observations, le vrai milieu qui est rarement le milieu arithmétique, intéresse beaucoup les astronomes ; il est à souhaiter qu'on leur présente l'esprit rapproché des différentes méthodes données pour cet effet ».

L'autre d'Adolphe Quetelet<sup>2</sup> : « Quand dans les sciences physiques, on cherche à déterminer une *constante* par des expériences répétées, il arrive généralement que l'on trouve des valeurs ou trop grandes ou trop petites ; et l'on prend, pour la valeur cherchée, une moyenne entre tous les résultats auxquels on est parvenu. »

On peut donc se poser la question : à partir de quel moment dans l'histoire des sciences la notion de médiane<sup>3</sup> est-elle apparue, sous quelle forme et surtout dans quel but ?

L'objet de cet article est de répondre, au moins partiellement, à ces trois questions.

« La recherche du milieu à prendre<sup>4</sup> » entre différentes mesures se résume actuellement au collège et au lycée à la recherche de valeurs centrales (ou indicateurs de tendance centrale) d'une série, à savoir, en simplifiant, moyenne, médiane ou mode. Au risque de paraître brutal, il n'y a pas à proprement parler de recherche du milieu ; moyenne, médiane et mode sont enseignées à la suite, et le plus souvent sans que les choix soient expliqués ou justifiés.

La médiane est actuellement enseignée en classe de collège et de lycée sous la forme suivante :

"La série des données est ordonnée par ordre croissant. Si la série est de taille impaire ( $2n + 1$ ), la médiane est la valeur du terme de rang  $n + 1$ . Si la série est de taille paire ( $2n$ ), la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang  $n$  et  $n + 1$ ".

Dans l'enseignement supérieur, pour définir la médiane d'une variable aléatoire réelle, on peut utiliser sa fonction de répartition  $F$ , en cherchant  $m$  tel que  $F(m) = 0,5$ . Si cette équation a une solution unique (par exemple, le cas où  $F$  est continue et strictement croissante), c'est la médiane. Si elle n'a pas de solution (cas possible quand  $F$  est en escalier), on utilise la convention ci-dessus. Si elle a pour solutions les valeurs d'un intervalle, celui-ci est l'intervalle médian.

Dans le premier cas il s'agit d'une définition de type statistique descriptive et dans le deuxième de type probabiliste ou de statistique mathématique.

Le plus souvent, on attribue à Galton<sup>5</sup> la paternité de la médiane dans le cadre statistique. Par exemple dans un article de 1882, il donne la définition de la médiane sous la forme suivante :

« La médiane, pour la taille, le poids ou tout autre attribut, est la valeur qui est dépassée

1. " *Recueil pour les astronomes* " tome II 1772 note en bas de page page 249.

2. « *Bulletin de l'Académie Royale (...) de Belgique* " 1852 tome 19 partie 2 page 303.

3. Les mêmes questions se posent pour moyenne et mode.

4. En référence à l'article "*milieu*" rédigé par Jean Bernoulli dans le supplément à l'encyclopédie Diderot D'Alembert (1770).

5. Une grande partie des écrits de Galton sont en libre accès sur le site [www.galton.org](http://www.galton.org).



par une moitié d'un groupe de très grande taille (*infinitely large group*) et dont l'autre moitié est en deçà<sup>6</sup> ».

Dans cette définition, Galton considère un groupe (*group*) de grande taille dans lequel les valeurs ont été classées par ordre croissant du caractère. Dans un autre article, il explique que les indicateurs comme la médiane, les quartiles ou les déciles n'ont d'intérêt que pour les séries de grande taille. La détermination de la médiane et des quartiles était souvent une détermination graphique ; Galton explique aussi qu'une petite imprécision sur la valeur de ces indicateurs n'est pas réellement fondamentale pour l'interprétation.

Galton emploie le mot *group* et non *sample* (échantillon). D'une part l'utilisation du mot *sample* n'était pas courante à l'époque, encore moins l'expression *random sample* (échantillon aléatoire), d'autre part l'idée était que si l'on disposait de beaucoup de mesures (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers), alors on avait une représentation de la population suffisamment fiable pour en tirer des conclusions générales.

Dans cet article de 1882, Galton donne aussi la définition des quartiles, déciles, écart inter quartile, écart inter-décile...

On peut remarquer, au passage, que la définition<sup>7</sup> de la médiane donnée par le Ministère de l'éducation nationale est très "galtonienne" :

"Pour un ensemble d'individus ordonnés selon les valeurs d'une variable (notes ou scores, salaires ou revenus, etc...), la médiane est la valeur qui partage cette distribution en deux parties égales. Ainsi, pour une population d'élèves répartis selon leurs notes, la médiane est la note au-dessous de laquelle se situent 50 % des élèves. C'est de manière équivalente celle au-dessus de laquelle se situe l'autre moitié des élèves."

La définition donnée par Galton est encore assez loin de celle donnée en collège ; pour au moins deux raisons, elle ne concernait que des groupes de grande taille et d'autre part la détermination était graphique.

Mais voilà, Galton a utilisé la médiane et les quartiles bien avant cette formalisation et avec un vocabulaire un peu différent. Par exemple en 1874<sup>8</sup>, il y explique, sur un exemple, son principe d'intercomparaison. Pour calculer la moyenne arithmétique, il faut disposer des mesures pour chacun des individus du groupe, mais il n'est pas toujours possible de faire des mesures individuelles. Dans ce cas, Galton propose la méthode suivante : ranger les individus du plus grand au plus petit, même grossièrement, en étant attentif au classement pour l'individu du milieu et celui d'un des deux "*quarter point*" (les *quater points* sont ce que nous nommons les quartiles). On peut remarquer que dans cet article, Galton propose de ranger les individus dans l'ordre décroissant, alors que dans les articles suivants, il ordonne toujours les séries dans l'ordre croissant. La taille de l'individu du milieu sera la moyenne (*average* (1874) puis *mean* (1875) au sens moyenne arithmétique) du groupe et l'écart entre sa taille et celle de l'individu du "*quarter point*" retenu sera l'erreur probable. Cette idée de mettre en place des indicateurs statistiques liés à un classement, sa généralisation à de nombreuses séries dans le domaine d'étude de Galton et le rapport avec les loi des fréquences des erreurs (loi normale) sera développée en 1875<sup>9</sup>.

Alors Galton fut-il le premier ? Mais que nenni.

En 1843, Cournot publie "Exposition de la théorie des chances et des probabilités"<sup>10</sup>. Cournot s'intéresse aux lois de probabilités dans le cas où l'ensemble des résultats possibles est infini. Il introduit "la courbe qui est propre à représenter la loi de probabilité des diverses valeurs d'une grandeur variable" qui est en termes modernes la courbe de la fonction de densité. Il ajoute : "Soit  $OI$  une abscisse tellement choisie que l'ordonnée correspondante il partage l'aire totale  $\Omega$  en deux parties égales ; la valeur  $OI$  sera ce que nous appellerons la valeur médiane de la grandeur  $x$ ". C'est exactement, exprimée en termes de fonction de densité et non de fonction de répartition et sans le formalisme actuel, la défi-

6. Les différentes traductions sont de l'auteur.

7. <http://www.education.gouv.fr/cid23200/definitions-des-termes-indicateurs-statistiques-education-nationale.html>.

8. " *On a proposed statistic scale* " paru dans la revue Nature le 5 mars 1874 page 342.

9. " *Statistics by intercomparaison, with remarks on the law of frequency errors* " Phil Mag S 4 Vol 49 N° 322 Janv 1875.

10. Le texte est disponible sur le site de la BNF. Il est fait référence au chapitre 6 des pages 113 à 120.

dition de la médiane donnée dans le supérieur.

Mais plus intéressant et intrigant, Cournot en donne deux interprétations, l'une en termes de chances : " Deux joueurs dont l'un parierait que  $x$  sera inférieur à  $Ol$ , l'autre qu'elle surpassera  $Ol$ , parieraient à chances égales" ; l'autre en termes que nous qualifierons de statistique : "Sur un très grand nombre de valeurs de  $x$ , déterminées fortuitement, le quotient du nombre de valeurs plus grandes (ou plus petites) que  $Ol$  par le nombre total des épreuves ne différerait que de très peu de  $1/2$ " C'est sûrement parce que cette histoire était déjà en marche...

Il semble presque sûr que ce soit Cournot qui ait employé le terme médiane le premier, mais il faut bien faire la différence entre concept et terminologie.

Un petit point de vocabulaire avant d'aller plus loin. Lorsque l'on dispose de plusieurs mesures, par exemple la hauteur d'une étoile, et que l'on a choisi un milieu, alors on peut s'intéresser aux "erreurs", l'erreur pour une mesure étant la différence entre cette valeur observée et le milieu. Une condition pour choisir le milieu est que les mesures se répartissent "également" de part et d'autre de ce milieu, ce qui signifie que les erreurs se répartissent "également" de part et d'autre de 0. Considérons maintenant les écarts (valeurs absolues des erreurs), une idée commune est que plus les écarts seront petits, plus on pourra avoir confiance en ce milieu. Un indicateur de cette confiance est l'erreur probable. C'est la valeur qui est telle qu'une moitié des écarts lui est inférieure et l'autre moitié lui est supérieure. C'est en vocabulaire moderne un indicateur de dispersion mais c'est aussi la médiane des écarts. C'est cet indicateur qu'utilisait Galton.

On trouve une définition de l'erreur probable dans Quételet<sup>11</sup>.

Il définit un intervalle  $[-s; s]$ , "Ce sont ces termes que l'on nomme les limites de *l'erreur probable*, il y a autant d'observations entre ces termes qu'au delà.(...) C'est la grandeur de l'erreur probable qui nous servira désormais de *module de précision*". Mais comme disait un de mes professeur à l'université, il y a toujours un rabiote ; dans la même lettre, s'inspirant de Hagen<sup>12</sup>, Quételet propose d'autres indicateurs : par exemple, il explique qu'il y a 1 à parier contre 2 que l'erreur excède ou soit inférieure à 1,43 fois l'erreur probable, coefficient obtenu avec la table de la loi normale centrée réduite. En un sens, il se comporte en précurseur du découpage en octiles, déciles, centiles comme Galton ou en terciles... Actuellement, si vous entrez "erreur probable" dans un moteur de recherche, vous aurez le plus souvent l'erreur circulaire probable (CEP) des GPS (qui est à 50 % par défaut), c'est une généralisation de l'erreur probable au cas bidimensionnel (voire tri), bel exemple d'utilisation de la loi normale bidimensionnelle.

En 1834, Encke<sup>13</sup> écrit, à propos d'une question d'astronomie et de la détermination de l'erreur probable :

"Si l'on ordonne les erreurs, sans tenir compte de leur signe, en fonction de leur valeur absolue, et si l'on compte à partir de la plus petite, si l'on a  $m$  observations, si  $m$  est impair on prend l'observation de rang  $\frac{1}{2}(m+1)$  et si  $m$  est pair, on prend la moyenne arithmétique des valeurs de rang  $\frac{1}{2}m$  et  $\frac{1}{2}m+1$ , on obtient ainsi une valeur approchée de..."

Étonnant de modernité. Mais alors la médiane, telle qu'elle est enseignée au collège et au lycée, c'est Encke ? Oui mais voilà, quelques lignes plus loin Encke explique qu'il reprend une idée de CF Gauss.

En effet, en 1816<sup>14</sup>, Gauss donne la même définition, mais en préalable, il indique qu'il s'agit d'une méthode plus pratique mais moins précise. Toutefois, il semble, lorsque l'on lit les propos de Gauss, que cette "astuce de calculs" ne soit pas quelque chose d'important pour lui mais plutôt une façon de se dispenser de calculs fastidieux. Donc la médiane, c'est Gauss ?

---

11. « *Lettres à S. A. R. le duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha sur la théorie des probabilités...* » 1846. Il est fait référence aux pages 122, 392 et 393.

12. "Grundzüge der Wahrscheinlichkeits Rechnung" 1837.

13. "Ueber die Methode der kleinsten Quadrate" paru dans le "Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1834", paru en 1832, c'est étonnant, mais c'est comme cela !

14. "Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" paru dans *Zeitschrift für Astronomie* tome 1 (1816) page 195.

Alors c'est comme au foot, tout le monde écrit et à la fin, c'est Gauss qui gagne... Oui mais voilà...

En 1806, William Herschell, toujours sur des questions d'astronomie, écrit<sup>15</sup> : "Il y a deux façons de prendre une moyenne l'une d'elle peut être appelée "*the rate*", l'autre "*the rank*". "*the rank*" se traduit par le rang, mais la traduction de "*the rate*" est plus problématique, puisque suivant le contexte, cela peut signifier rang, mesure, valeur...

Heureusement, Herschell prend un exemple, "par exemple, un nombre égal au "*mean rate*" des six nombres 2, 6, 13, 15, 17, 19 serait 12 ; mais on pourrait prendre le "*middle rank*" des trois plus grandes et des trois plus petites ce serait 14".

Ce qu'Herschell nomme "*mean rate*", c'est la moyenne arithmétique et ce qu'il nomme "*middle rank*", rang du milieu, c'est ce que nous nommons médiane.

Une petite remarque avant de continuer, ni Encke, ni Gauss, ni Herschell n'utilise le mot médiane, pour autant il s'agit de ce que nous nommons médiane.

Mais alors la médiane, c'est Herschell...

Dans un mémoire<sup>16</sup> publié en 1774, Laplace écrit "Par le milieu que l'on doit choisir entre plusieurs observations, on peut entendre deux choses qu'il importe également de considérer. La première est l'instant tel qu'il soit également probable que le véritable instant du phénomène tombe avant ou après ; on pourrait appeler cet instant *le milieu de probabilité*. La seconde est l'instant tel qu'en le prenant pour milieu, la somme des erreurs à craindre, multiplié par leur probabilité, soit un minimum ; on pourrait l'appeler *milieu d'erreur* ou *milieu astronomique*."

Laplace montre que ces deux milieux sont égaux. En termes actuels, Laplace démontre que si  $f$  est une fonction de densité, si  $F$  est la fonction de répartition associée (supposée continue strictement croissante), le réel  $m$  vérifie  $F(m) = 1/2$  si et seulement si  $\int |x - m| dx$  est minimum. On peut faire vérifier ce résultat de Laplace à un élève de terminale en prenant comme exemple la loi normale centrée réduite.

Remarquons aussi que dans ce mémoire, Laplace, pour les besoins de sa démonstration donne une définition de ce que doit être une fonction de densité ; une fonction paire positive telle que les limites à l'infini soient nulles et l'aire sous la courbe soit égale à 1. La parité de la fonction était imposée par le contexte de la théorie des erreurs (égale répartition des mesures de part et d'autre du milieu). Il donne comme illustration ce que nous nommons première loi de Laplace.

Bon alors ce coup-ci, la médiane c'est Laplace. Trop facile...

Parlons de géodésie. La terre est ronde, certes, mais rapidement au XVII<sup>e</sup> siècle, l'hypothèse que la terre soit un ellipsoïde de révolution a vu le jour (la notion de géoïde viendra plus tard). La grande question, objet de disputes entre Newton et Huygens d'une part et Cassini d'autre part, était de savoir si la terre était aplatie aux pôles ou à l'équateur, cette question porte le nom de "figure de la terre". Pour y répondre, une idée fut de mesurer la longueur d'un degré de latitude au niveau de l'équateur, au niveau des pôles... (si la terre est aplatie, alors les méridiens sont des ellipses et non des cercles). Pour répondre à cette question, Boscovich a dû résoudre un problème que l'on peut exprimer en termes modernes sous la forme : connaissant  $n$  couples d'observations  $(x_i ; y_i)$  déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\sum_1^n |y_i - (ax_i + b)|$  (1) soit minimum sous la condition  $\sum_1^n y_i - (ax_i + b)$  (2). Ce problème peut aussi se poser sous la forme suivante : trouver l'équation  $y = ax + b$  de la droite qui passe au plus près (au sens distance "verticale") des points de coordonnées  $(x_i ; y_i)$  avec la condition que le point moyen appartienne à cette droite (la condition (2) équivaut à  $\bar{y} = a\bar{x} + b$ ). Boscovich donne une solution graphique à ce problème. Sans entrer dans les détails de calculs<sup>17</sup> (cela est expliqué dans la publication de l'Irem de Basse

15. "On the quantity and velocity of the solar motion" Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1806 205-237. Les passages cités se trouvent pages 212 et 213.

16. "Mémoire sur la probabilités des causes par les événements" pages 27 -69 dans le tome 8 des Œuvres complètes de Laplace disponible sur le site de la BNF.

17. On pourra consulter les documents mis en ligne par l'Irem de Basse Normandie, stage PAF Janvier 2012 , l'article "*Moyenne, médiane, écart-type, Quelques regards sur l'histoire pour éclairer l'enseignement des statistiques*" de A. Boyé et M. C. Comairas, paru en juillet 2002 dans la revue Repères-Irem n°48.

Normandie), Boscovich a résolu graphiquement un problème de recherche de médiane pondérée<sup>18</sup>, comme celui que l'on rencontre en analyse des données ou encore, sous une forme plus simple, à la page 49 du document ressource "statistique et probabilité de la classe de première générale et technologique" disponible sur eduscol. La méthode de Boscovich a été reprise, sous le nom de méthode des situations<sup>19</sup>, par Laplace ; considérant la méthode de Boscovich comme "ingénieuse", mais "inutilement compliquée de l'usage des figures", il en donne une solution analytique. Cette méthode, que Laplace qualifie de complexe à mettre en œuvre dès que le nombre de données est important, sera abandonné au profit de la méthode des moindres carrés. On assiste à un retour de cette méthode grâce en particulier à la puissance de calcul des ordinateurs.

Alors l'affaire est classée, la médiane c'est Boscovich... D'un point de vue métrique, oui sûrement, mais...

Si une grande question était le calcul de la figure de la terre, une autre grande question était le calcul des rentes viagères et par voie de conséquence, pour que le calcul des rentes soit équitable entre l'État et les rentiers, l'étude de la mortalité. De nombreux auteurs ont établi des tables de mortalité, les deux plus connues sont la table de Graunt, dite table anglaise et la table de Halley, dite table de Breslau. Dans son traité<sup>20</sup> de 1746, Deparcieux explique dans l'introduction "la détermination des rentes viagères dépend de deux principes (...) :

1°) de l'intérêt que l'argent doit rapporter,

2°) du plus ou moins de probabilité qu'il y a que la personne qui constitue la rente vivra jusqu'à tel ou tel autre âge".

La réponse au 1°) consiste à établir des formules et des tables. Pour le 2°), Deparcieux construit des tables de mortalité à partir des listes de tontines. Il interprète ces tables en termes de probabilité. Il écrit "On peut pour la même raison parier 622 contre 112, qu'un rentier de 30 ans vivra encore à l'âge de 45 ans ; et il y a un à parier contre un qu'il vivra jusqu'à l'âge de 67 ans, parce qu'à cet âge il ne reste qu'environ la moitié des rentiers vivants à l'âge de 30 ans. Celui qui parierait sur tous séparément, gagnerait encore autant d'un côté, qu'il perdrait de l'autre." C'est, dans un contexte différent, exactement le premier exemple donné par Cournot.

Bon ce coup-ci, c'est fini ! La médiane c'est Deparcieux. Il n'en est rien...

Dans une lettre du 21 novembre 1669<sup>21</sup> échangée avec son frère Louis, Christian Huygens introduit la notion de vie probable. À partir des tables de mortalité de Graunt, afin d'estimer le temps restant à vivre à un âge donné toujours au sujet du calcul des rentes viagères, Louis calcule la vie moyenne. Son frère Christian, ayant une lecture plus probabiliste des tables (et même plus, il s'agit d'une approche en termes de jeu équitable) propose deux idées. Les tables de mortalité, comme toutes les tables, sont des "tables discrètes", il propose de les représenter par une courbe. En français moderne, il écrit : "pour faire cela, j'ai suppléé la petite table anglaise, sans pour autant m'embarrasser d'aucun calcul, mais en traçant une ligne courbe, sur laquelle avec le compas je mesure la vie de celui qu'on veut". Cette courbe figure dans sa lettre. La deuxième idée est, à partir de cette courbe, de déterminer la vie probable : "si je veux savoir ensuite combien il reste raisonnablement à vivre à une personne de 20 ans (...) des 33 personnes de 20 ans, la moitié meurt d'ordinaire dans les prochains 16 ans, on peut gager avec égal avantage qu'une personne de 20 ans vivra encore 16 ans". Huygens fait une lecture graphique identique à celle que l'on trouve dans certains manuels avec un polygone (ou courbe) de fréquences cumulées dé-

---

18. Il semblerait que l'expression soit due à Edgeworth.

19. "Sur quelques points du système monde" 1789, tome 11 des Œuvres de Laplace page 506 et suivantes.

20. "Essai sur les probabilité de durée de la vie humaine..." disponible sur <http://books.google.com>, les citations se trouvent page 1 et page 53 ; une étude détaillée de l'ouvrage de Deparcieux "A. Deparcieux et l'arithmétique politique" Yves Ducel Mathématiques vivantes, Bull. IREM de Franche-Comté N°66 nov. 2001 pages 25 à 38.

21. "Oeuvres complètes de Christiaan Huygens" tome 6 disponible sur le site de la BNF page 524 et suivantes. On pourra aussi consulter *Les frères Huygens et le "calcul des aages"* de Rohrbasser et Veron paru dans Population 54 (6) 1999 page 993 à 1012.



croissantes.

Donc la médiane, c'est Christian Huygens. Possible parce qu'avant, je ne sais pas, quoique... Lorsqu'il publie sa table de mortalité<sup>22</sup>, Edmond Halley en donne plusieurs usages. Le troisième usage concerne une interprétation de la table en termes de pari équitable (*even wager*). Il prend un exemple : à l'âge de 30 ans, par lecture dans la table, il reste 531 survivants, la moitié c'est environ 265, par lecture dans la table, on trouve un âge entre 57 et 58 ans. Un homme de 30 ans peut raisonnablement espérer vivre 27 ou 28 ans. C'est peut-être un des premiers exemples d'utilisation du calcul des probabilités dans un cadre autre que celui des jeux de hasard<sup>23</sup>, c'est aussi ce que propose Christian Huygens dans un contexte différent.

Alors la médiane, c'est Halley ? Possible parce qu'avant, je ne sais pas...

Attribuer la paternité de la médiane telle que nous l'entendons à Deparcieux, Huygens ou Halley relève peut-être d'une lecture récurrente de l'histoire. En effet, il s'agissait pour les auteurs soit de donner un exemple d'utilisation, soit d'assurer l'équité, qu'aucun des partis ne soit lésé dans le calcul des rentes.

De même, attribuer la paternité de la médiane à Wright, comme on peut le lire sur certains sites internet, me semble un peu exagéré. Edward Wright, cartographe anglais, a publié en 1599 un ouvrage<sup>24</sup> identifiant les difficultés du repérage en mer (principalement la détermination de la longitude), difficultés liées aux instruments et aux conditions maritimes. Dans cet ouvrage, il utilise par deux fois le terme "*middlemost*". Comme, dans les deux cas, Wright ne donne pas d'exemple numérique, il est difficile de savoir exactement ce qu'il entendait par "*middlemost*", si le milieu retenu est la médiane au sens où nous l'entendons ou une autre valeur.

En fait tout ceci est un peu plus compliqué. Déterminer sa position en mer, à une époque où les cartes étaient encore très imprécises et l'usage des instruments délicat, est vital ; on risque le naufrage et la mort. Wright indique dans son ouvrage que si l'on fait plusieurs mesures, par exemple pour la hauteur d'une étoile, pour déterminer la valeur à retenir, "il faut faire usage de la raison"<sup>25</sup>. La détermination du milieu à retenir ne résulterait donc pas d'un calcul ou d'une procédure systématique ?

Ce petit panorama, sûrement incomplet, nous a permis de passer de l'anthropologie à l'astronomie, de la géodésie à la démographie et aux calculs de rentes. On pourrait penser qu'au fil de l'histoire, les uns aient copié sur les autres. Pour les spécialistes, rien n'est moins sûr. Par contre ce qui est sûr, c'est que dans chaque cas il s'agissait de résoudre un problème pour lequel aucune méthode n'était connue. Des idées nouvelles ont vu le jour, comme la vie probable de Huygens, des méthodes nouvelles ont été inventées comme la méthode de Boscovich. Il s'agissait de trouver des valeurs, des indicateurs, en termes modernes des estimations, susceptibles de susciter l'accord.

Deux approches de la médiane ont évolué en parallèle : l'aspect ordinal comme la démarche de Galton et l'aspect métrique comme la démarche de Boscovich. C'est Laplace qui a réconcilié ces deux approches, probablement sans s'en douter, puisque la notion d'espace métrique n'est apparue que beaucoup plus tard.

Actuellement, on assiste à un retour de la médiane, par exemple les médias utilisent plus souvent le terme de salaire médian plutôt que de salaire moyen, considérant cet indicateur comme plus "représentatif" et plus porteur de sens. Un enseignement des indicateurs de tendance centrale pourrait s'en inspirer. Par exemple, face à de nombreuses séries de valeurs, en faisant usage de la raison, quelles valeurs retenir pour les représenter au mieux (dans un sens à définir), quelles valeurs sont susceptibles de susciter l'accord ?

---

22. "An estimate of the degrees of mortality (...) prices of annuities upon lives" Phil Trans N°196 janvier 1692/1693, page 602

23. Pour une étude plus approfondie de cet aspect, voir "Sur la durée de la vie et l'espérance de vie" Jean-François Pichard, dans "Enseigner les probabilités au lycée" commission inter-IREM (1997) page 315 à 333.

24. "Certain errors in navigation (...) detected and corrected". On peut trouver le texte original et une traduction sur le web.

25. Traduction de "he may be thought to work according to reason" page 74.

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

## Des problèmes

### 108-1 Une observation d'Emile Borel :

#### Un problème de loterie

« C'est un fait assez remarquable qu'il y ait exactement le même nombre total de paires dans les numéros à une paire et dans les numéros à deux paires. Le fait ne se produit pas pour toutes les valeurs du nombre total de chiffres employés (ici égal à 10 puisque nous utilisons le système décimal) et du nombre de chiffres formant les numéros considérés. »

(Les numéros utilisés dans cette loterie possèdent tous six chiffres.)



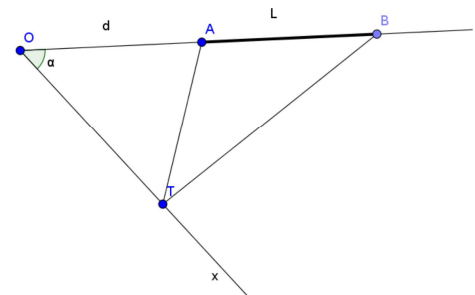
- 1) Que vaut ce nombre total de paires évoqué par Emile Borel ?
- 2) Dans quelles bases et pour quels numéros cette coïncidence peut-elle se reproduire ?

### 108-2 de Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :

Quel est le nombre maximal de régions du plan déterminées par  $n$  cercles ?

### 108-3 de Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :

En quel point de  $[Ox)$  doit se placer le tireur  $T$  pour voir le but  $[AB]$  sous un angle  $\widehat{ATB}$  maximal ?



### 108-4 de Dominique Gaud (Migné-Auxances) :

Si l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan est une ellipse, en quelle courbe se transforme-t-elle quand on déroule le patron du cône sur un plan ?



**105-3 de Walter Mesnier :**

Enigme inspirée de celle du calendrier des énigmes 2016 du 13 Mai.

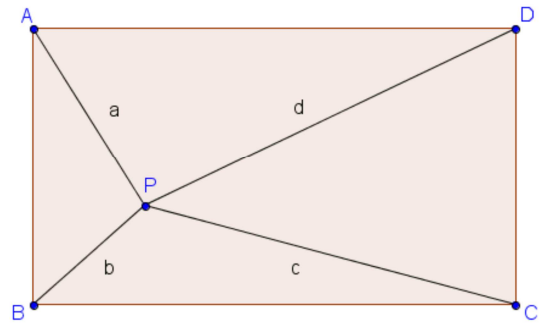
Il s'agissait de calculer la longueur  $PD = d$  dans un rectangle  $ABCD$  où  $P$  est un point intérieur au rectangle, et où  $PA = a$ ,  $PB = b$  et  $PC = c$  sont donnés (égaux à 9, 4 et 6).

→ L'étonnante relation  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  permet de répondre. Mais on peut encore creuser. Je propose de modifier les longueurs données et de prolonger le questionnement :

1) On suppose  $a = 5$ ,  $b = 1$  et  $c = 5$ . Démontrer que  $d = 7$  et que l'aire maximale du rectangle est 32.

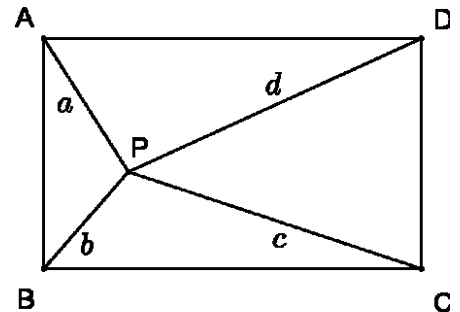
2) On suppose  $a = 4$ ,  $b = 1$  et  $c = 7$ . Calculer  $d$  et l'aire maximale du rectangle.

3) On suppose que  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres entiers à un chiffre. Quels triplets peut-on choisir pour que  $d$  soit aussi un nombre entier. L'aire maximale du rectangle est-elle alors aussi un nombre entier ?

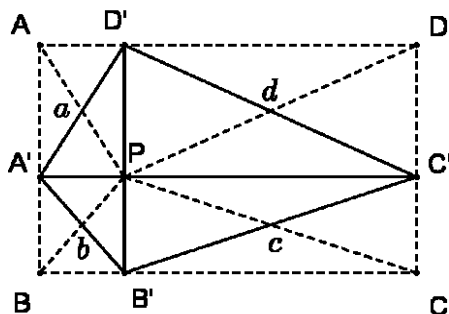
**Solution de Bruno Alaplantive**

On peut toujours se ramener à la configuration ci-contre à des symétries près.

Longueur :  $L = AD$  ; largeur  $l = AB$ .



On introduit le quadrilatère convexe  $A'B'C'D'$  comme indiqué ci-après.



La relation  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  résulte du théorème de Pythagore aux quatre triangles rectangles en  $P$ . L'inégalité de Ptolémée appliquée à  $A'B'C'D'$  donne :

$$A'C' \times B'D' \leq A'D' \times B'C' + A'B' \times C'D' ;$$

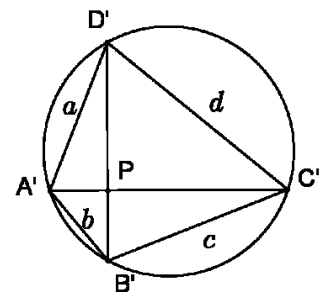
soit encore  $L \times l \leq ac + bd$ .

La valeur maximale de l'aire est donc égale à  $ac + bd$  (si on peut l'atteindre). On sait que l'égalité de Ptolémée équivaut au fait que le quadrilatère considéré est inscriptible.

Inscrits de part et d'autre de la corde  $[A'C']$ , les angles en  $D'$  et en  $B'$  sont supplémentaires et leurs cosinus opposés.

L'application du théorème d'Al-Kashi dans le triangle  $A'D'C'$  permet d'écrire  $A'C'^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos(D')$ .

De même dans  $A'B'C'$  on obtient  $A'C'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(B')$  ; soit encore  $A'C'^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(D')$ .



On en déduit que  $\cos(D') = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$  puis que  $A'C'^2 = L^2 = a^2 + d^2 - ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$ .

Et de même par permutation :  $B'D'^2 = l^2 = a^2 + b^2 - ab \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}$ .

**1<sup>ère</sup> question.** On obtient  $d^2 = a^2 + c^2 - b^2 = 49$  d'où  $d = 7$ .

L'aire maximale est  $ac + bd = 5 \times 5 + 1 \times 7 = 32$ .

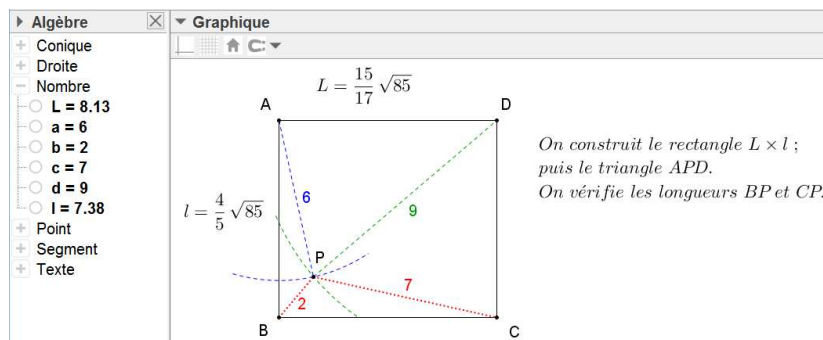
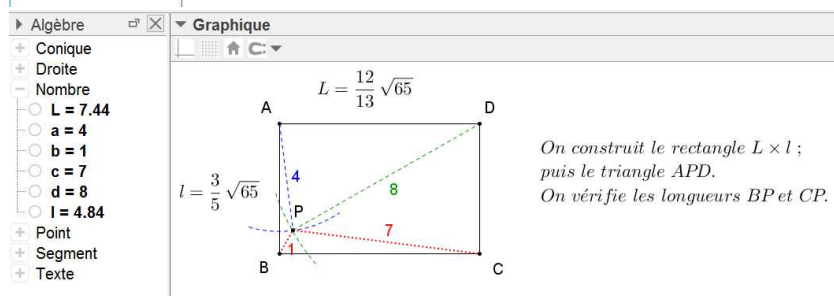
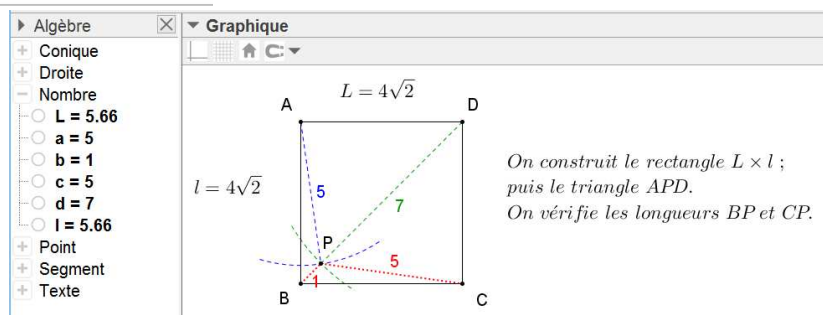
**2<sup>ème</sup> question.** On obtient  $d^2 = a^2 + c^2 - b^2 = 64$  d'où  $d = 8$ .  
L'aire maximale est  $ac + bd = 4 \times 7 + 1 \times 8 = 36$ .

**3<sup>ème</sup> question.** En gardant la configuration  $b < a < d$  et  $b < c$ , il existe un seul troisième triplet :  
(a ; b ; c) = (6 ; 2 ; 7) (obtenu par exhaustion des cas sur tableur), on a alors  $d = 9$ .  
En prenant  $a = b < c = d$  on obtient de nouveaux triplets et de même en prenant  $a = b = c = d$ .  
Ci après on donne les constructions des 3 solutions de la configuration  $b < a < d$  et  $b < c$ .

|   |                                                                                                                                                |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | a:=5<br>→ a := 5                                                                                                                               |
| 2 | b:=1<br>→ b := 1                                                                                                                               |
| 3 | c:=5<br>→ c := 5                                                                                                                               |
| 4 | d:=7<br>→ d := 7                                                                                                                               |
| 5 | $L = \sqrt{a^2 + d^2 - a d \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a d + b c}}$<br>✓ $L = \sqrt{a^2 + d^2 - a d \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a d + b c}}$ |
| 6 | $L = \sqrt{a^2 + d^2 - a d \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a d + b c}}$<br>→ $L = \sqrt{2} \cdot 4$                                               |
| 7 | $l = \sqrt{a^2 + b^2 - a b \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a b + c d}}$<br>→ $l = \sqrt{2} \cdot 4$                                               |

|   |                                                                                                                                                |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | a:=4<br>→ a := 4                                                                                                                               |
| 2 | b:=1<br>→ b := 1                                                                                                                               |
| 3 | c:=7<br>→ c := 7                                                                                                                               |
| 4 | d:=8<br>→ d := 8                                                                                                                               |
| 5 | $L = \sqrt{a^2 + d^2 - a d \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a d + b c}}$<br>✓ $L = \sqrt{a^2 + d^2 - a d \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a d + b c}}$ |
| 6 | $L = \sqrt{a^2 + d^2 - a d \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a d + b c}}$<br>→ $L = \frac{12}{13} \sqrt{65}$                                        |
| 7 | $l = \sqrt{a^2 + b^2 - a b \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a b + c d}}$<br>→ $l = \frac{3}{5} \sqrt{65}$                                          |

|   |                                                                                                         |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | a:=6<br>→ a := 6                                                                                        |
| 2 | b:=2<br>→ b := 2                                                                                        |
| 3 | c:=7<br>→ c := 7                                                                                        |
| 4 | d:=9<br>→ d := 9                                                                                        |
| 5 | $L = \sqrt{a^2 + d^2 - a d \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{a d + b c}}$<br>→ $L = \frac{15}{17} \sqrt{85}$ |
| 6 | $l = \sqrt{a^2 + b^2 - a b \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a b + c d}}$<br>→ $l = \frac{4}{5} \sqrt{85}$   |



**106-2 de Frédéric de Ligt :**

Une étonnante égalité relie  $\pi$  et son approximation historique donnée par Archimède :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi$$

Comment l'établir ?

**Solution de l'auteur**

Le développement du polynôme  $X^4(1-X)^4$  donne  $X^8 - 4X^7 + 6X^6 - 4X^5 + X^4$  et par division euclidienne on a l'identité  $X^8 - 4X^7 + 6X^6 - 4X^5 + X^4 = (X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4)(X^2 + 1) + (-4)$

$$\text{D'où } \frac{X^4(1-X)^4}{X^2+1} = X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4 - \frac{4}{X^2+1}.$$

$$\text{Par conséquent } \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1}) dx = \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 4 \arctan 1 = \frac{22}{7} - \pi$$

**107-1 posé à des élèves singapouriens de niveau seconde lors d'un concours :**

Cheryl donne à ses deux amis dix dates possibles de son anniversaire : les 15, 16 et 19 mai ; le 17 et 18 juin ; le 14 et 16 juillet ; le 14, 15 et 17 août. Cheryl a ensuite dit à Albert le mois, et à Bernard le jour de son anniversaire. Albert affirme ensuite : « *Je ne sais pas quand est l'anniversaire de Cheryl mais je sais que Bernard ne le sait pas non plus.* » Bernard ajoute : « *Au départ, je ne savais pas quand était l'anniversaire de Cheryl, mais maintenant je sais.* » Albert répond : « *Alors je sais aussi quand est l'anniversaire de Cheryl.* »

Et vous, avez-vous deviné la date de l'anniversaire de Cheryl ?

**Solution de Frédéric de Ligt**

Avec juste la connaissance du mois de naissance Albert ne peut pas deviner la date de l'anniversaire de Cheryl puisqu'il y a deux ou trois jours possibles par mois. Albert affirme que Bernard ne peut pas savoir lui non plus. Ce ne peut être que parce que le mois que lui a révélé Cheryl n'est ni mai ni juin sinon Cheryl aurait très bien pu donner à Bernard comme jour le 18 ou le 19 et ce dernier en aurait immédiatement pu en déduire le mois de naissance. Cheryl est obligatoirement née en juillet ou en août. Bernard ayant fait ce raisonnement il reste à choisir entre cinq dates. Dans cette liste le 14 est le seul jour à apparaître deux fois, or si Cheryl avait donné à Bernard ce jour-là, Bernard ne pourrait pas affirmer qu'il connaît désormais la date de l'anniversaire de Cheryl. Il reste donc seulement trois dates disponibles à ce moment du dialogue. La dernière affirmation d'Albert n'a de sens que s'il n'y a qu'un seul jour compatible avec le mois que Cheryl lui a communiqué. Il s'agit du 16 juillet. Cheryl est donc née un 16 juillet.

**107-4 de Frédéric de Ligt :**

La suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie par  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{n^2}$  converge-t-elle et si oui vers quelle limite ?

**Solution de l'auteur**

On note  $(H_n)_{n \geq 1}$  la série harmonique définie par  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$  où  $\gamma$  est la constante d'Euler-Mascheroni.

Par conséquent on a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{n^2} - \ln(n^2) = \gamma$ . On peut écrire :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{n^2} = H_n - (H_{n^2} - H_n) = 2H_n - H_{n^2} = 2(H_n - \ln(n)) - (H_{n^2} - \ln(n^2)).$$

$$\text{Finalement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(H_n - \ln(n)) - (H_{n^2} - \ln(n^2)) = \gamma.$$



# Connaissez-vous la Maison des Maths ?

Dominique Gaud

Depuis 15 mois, a ouvert dans la banlieue de Mons en Belgique une Maison des Maths. Mais qu'est-ce qu'une maison des maths ?

Le mieux est de laisser parler le site de MdM <http://maisondesmaths.be/>

Depuis 2003, l'asbl Entr'aide accompagne des jeunes sur le chemin de l'apprentissage. Chaque année, c'est plus d'un millier d'élèves qui retrouvent ainsi confiance et estime de soi. Le projet « Clé de la Réussite » a d'ailleurs reçu en juin 2014 le premier prix de la Fondation Reine Paola récompensant le sérieux et la qualité du chemin parcouru.



Malheureusement, les mathématiques reçoivent irrémédiablement la palme des difficultés par 71% des élèves accompagnés. Non seulement, la palme des difficultés mais aussi la palme de la démotivation et de l'incompréhension.

Pourtant, depuis la nuit des temps, les mathématiques fascinent. Certes, avec un coup d'œil trop furtif, on peut les percevoir comme ennuyeuses, tristes et monotones. Mais qui prend le temps de s'y attarder quelque peu voit vite apparaître – à sa grande surprise – récréations, poésie et créativité.

C'est justement pour aider tout un chacun à trouver le bon éclairage que l'asbl Entr'aide a décidé de fonder la MdM. De 3 à 103 ans, la MdM vous fera découvrir un univers passionnant et insoupçonné.

**MdM** comme **M**aison des **M**aths mais aussi comme **M**anipuler, **d**écouvrir, **M**odéliser. Tout un programme !



S'il n'est pas impossible de trouver quelques endroits qui font la part belle aux sciences et parfois même s'autorisent une digression autour des mathématiques, aucun lieu – à ce jour – ne leur était dédié en Belgique. C'est maintenant chose faite.

Toutefois, la Belgique ne sera pas le premier pays à accueillir une Maison des Maths puisque ce projet s'inscrit dans une collaboration internationale. D'abord, grâce à la coopération de l'Allemagne et de son célèbre Mathematikum, considéré comme l'un des plus grands centres scientifiques européens intégralement consacrés aux mathématiques. Ce temple du plaisir mathématique accueille aujourd'hui 150.000 visiteurs chaque année.

On trouvera aussi un reportage télévisé sur MdM sur le lien [En quelques images, c'est ici](#).

Selon son directeur, il n'existe que 3 maisons des maths dans le monde. Le fameux Mathematikum allemand <http://www.mathematikum.de/das-mathematikum/exponate.html> et le Momath à New York <http://momath.org/>.

Ces maisons ne doivent pas être confondues avec les musées de maths dont on trouve une liste éclectique sur le site :

<http://algorithmes.blogspot.fr/2010/07/musees-mathematiques-dans-le-monde.html>

Durant les vacances de février, l'Espace Mendès-France a informé Julien Michel, directeur de l'IREM, Jean Paul Guichard et moi-même de la venue d'Emmanuel Houdard directeur de la maison des maths de Belgique et nous a sollicités pour l'accueillir afin de lui présenter

l'exposition. Julien Michel et moi-même étions présents le mercredi 1er mars à 14 h pour lui présenter l'exposition.

Nous avons vu arriver une famille : lui, sa femme et leurs 4 enfants (âgés de moins de 13 ans) qui parcouraient la France en fixant leur itinéraire en fonction des expos maths : Palais de la découverte, expo Maths et Puzzles à Poitiers, mathéssime à Bordeaux, musée Fermat à Beaumont de Lomagne, etc.). Autant dire des passionnés !

Emmanuel Houdard et Geneviève Houdard son épouse sont tous les deux salariés à la MdM. Ce sont des enseignants, Geneviève enseignait aux enfants de 6-10 ans et lui aux élèves de plus de 15 ans. Sur leur site vous trouverez beaucoup d'autres explications sur le fonctionnement de cette MdM.

Ils ont été bluffés par la qualité de notre exposition (sur les idées, la conception, la qualité graphique, la richesse du catalogue et l'organisation : coin lecture, bar à casse-tête...) comme l'avaient été auparavant nos deux conférenciers Jean Paul Delahaye et Vincent Borelli. Cela a été d'autant plus intéressant qu'en ce mercredi de vacances, ils ont pu voir évoluer une bonne vingtaine de visiteurs passionnés dont beaucoup de gamins avec leurs grands parents (c'était les vacances !) dont certains avaient rejoints leur progéniture à genoux sur le sol pour mieux appréhender les casse-tête !

Une rencontre avec Didier Moreau, directeur de l'Espace Mendès France, s'en est suivi ainsi que des discussions improvisées sur un partenariat. Compte tenu du fait que nos approches concernant la vulgarisation des mathématiques étaient semblables, il a été convenu d'entreprendre une collaboration entre l'Espace Mendès-France et la Maison des Maths belge.



Il en ressort qu'une collaboration étroite va s'instaurer entre la MdM belge et l'espace Mendès-France. Elle va se concrétiser dans un premier temps sur l'exposition actuelle, les expositions antérieures et celles à venir. L'IREM et notre Régionale APMEP y seront bien entendu associés. Une collaboration permettra de mutualiser les dépenses et surtout de soulager notre charge de travail.

Mais Didier Moreau voit plus loin : il a en tête des projets plus ambitieux pour cette collaboration. Il nous en tiendra informé le moment venu car notre Régionale et l'IREM seront les pivots de ces projets.

Tout ça mérite une récompense : une bière brassée par un voisin de la MdM à l'intention de celle-ci et nommée Mathournée !!!



# On nous écrit

## Un, Deux, Trois, Cinq... tu seras mathématicienne !

Les débuts sont balbutiants, Un Deux, Papa, Maman, facile...  
Trois, le R est dur, mais j'existe, c'est super, ça passe,  
Un, Deux, Trois, Cinq... Non ! compte bien voyons...  
Un, Deux, Trois, Cinq... rien n'y fait, point de Quatre.  
Il est vrai que Quatre est doublement dur, deux syllabes difficiles,  
Cool, pas de souci Suzon, tu ne seras pas une « dys » à cause de cela...

Petit essai en voiture, Un Deux, Trois... encore raté !  
Tiens ils ont zébré la route, c'est nouveau... Un, Deux, Trois, Cinq !  
Mais ils ont oublié de mettre Quatre barres !  
Tu vois, ne te tracasse pas Louna, tu n'es pas toute seule...

Une petite recherche et Monsieur G nous renvoie à l'Équipement,  
Passage de Trois à Cinq bandes rugueuses, pour faire ralentir,  
En donnant l'impression d'augmentation de vitesse,  
Créer visuellement une accélération ? Fallait y penser...  
Mais oui, Suzon, tu deviendras technicienne  
Dans l'Équipement, et pourquoi pas ingénieure ?

Mais au fait, Un, Deux, Trois, Cinq,  
C'est peut-être tout simplement pour apprendre l'addition  
Un plus Deux égale Trois, Deux plus Trois égale Cinq...  
Et la crainte de dysphonie se trouve effacée  
Des capacités de calcul, ça rassure tout de suite les parents !  
Tu seras comptable Louna, et pourquoi pas informaticienne...

Un, Deux, Trois, Cinq... mais on trouve ça dans la nature...  
Rien de neuf, c'est vieux comme le monde,  
Et la théorie au moins aussi vieille que Fibonacci...  
Trois, Cinq, Huit, Treize  
Comme le nombre de rangées dans les théâtres antiques  
Et si les techniciens de l'Équipement avaient voulu faire de la déco ?  
Attirer l'œil simplement, pour dire « observe bien » !  
Les rapports successifs s'approchant de Phi, quoi de plus joli...  
Elle connaît les suites !... Elle est précoce !  
Tu seras mathématicienne Suzon ! ou pourquoi pas artiste Louna ?

*Gilles Maréchal*

APMEP, IREM Bâtiment de mathématiques  
Téléport 2—BP30179  
Bd Marie et Pierre Curie  
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

Site : <http://apmep.poitiers.free.fr/>

Mél. [apmep.poitiers@free.fr](mailto:apmep.poitiers@free.fr)

Tél. 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

*Directeur de la publication*

S. Dassule-Debertonne

*Éditeur*

APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

*Comité de rédaction*

F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne,  
J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.

*Siège Social*

IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie  
86962 Chasseneuil CEDEX

*Imprimerie*

IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie  
86962 Chasseneuil CEDEX

*Dépôt légal*

Mars 2017