Ru – Bri – COL↘AGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

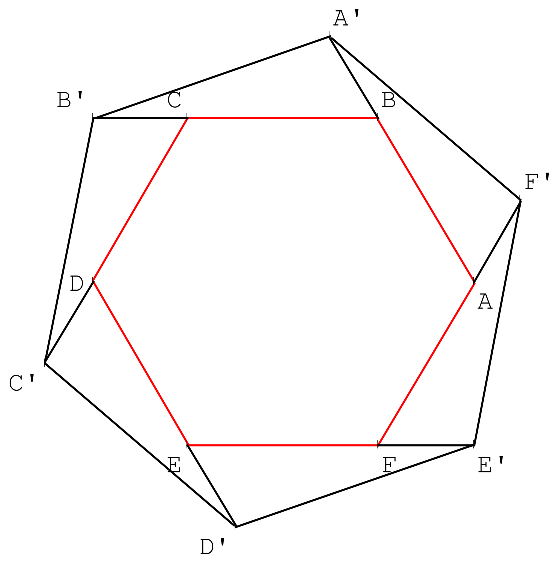
107-1 *posé à des élèves singapouriens de niveau seconde lors d'un concours* :
Cheryl donne à ses deux amis dix dates possibles de son anniversaire : les 15, 16 et 19 mai ; le 17 et 18 juin ; le 14 et 16 juillet ; le 14, 15 et 17 août. Cheryl a ensuite dit à Albert le mois, et à Bernard le jour de son anniversaire. Albert affirme ensuite : *« Je ne sais pas quand est l'anniversaire de Cheryl mais je sais que Bernard ne le sait pas non plus. »* Bernard ajoute : *« Au départ, je ne savais pas quand était l'anniversaire de Cheryl, mais maintenant je sais. »* Albert répond : *« Alors je sais aussi quand est l'anniversaire de Cheryl. »*

Et vous, avez-vous deviné la date de l'anniversaire de Cheryl ?

107-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Peut-on trouver à l'intérieur d'un triangle équilatéral de côté 185 un point situé à des distances entières de chacun des trois sommets ?

107-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

On donne un hexagone régulier dont le côté est a ; on prolonge les côtés dans le même sens d'une longueur égale à ma ; on joint les extrémités de ces côtés ainsi prolongés, et l'on demande de prouver que la figure ainsi formée est un hexagone régulier et que l'aire de ce nouvel hexagone est égale à l'aire du premier hexagone multiplié par $m^2 + m + 1$.

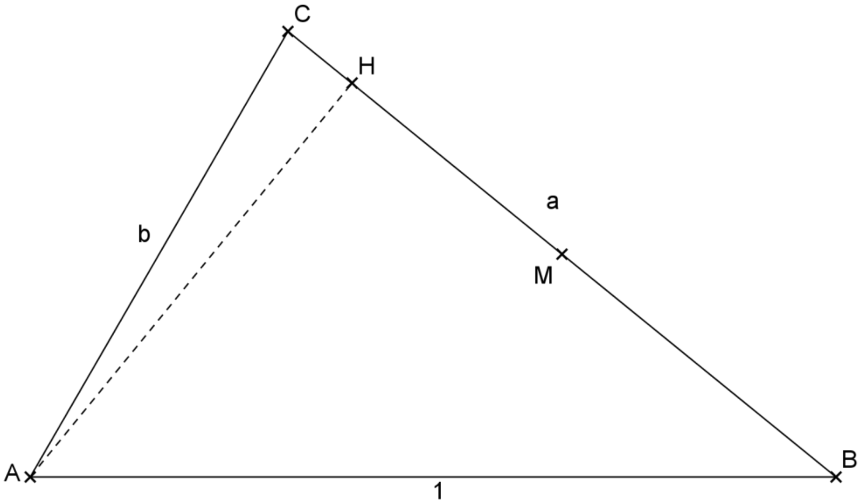


107-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ldots-\frac{1}{n^2}$ converge-t-elle et si oui vers quelle limite ?

103-2 *de Louis Rivoallan* :
Ce triangle ABC a une propriété curieuse : le côté [AB] mesure le double de la distance HM, où H est le pied de la hauteur issue de A et M est le milieu de [BC]. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle $\widehat{ACB}$?

Solution de Jean-Christophe Laugier



On peut sans nuire à la généralité du problème supposer AB = 1. Avec les notations habituelles dans un triangle ABC, et en prenant comme sens positif sur (BC) le sens de B vers C, il vient : $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{BH}} = \cos\hat{\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{BM}} = \frac{a}{2}$ d'où $\overline{\mathrm{HM}} = -\cos\hat{\mathrm{B}} + \frac{a}{2}$. La propriété possédée par le triangle ABC se traduit par $-\cos\hat{\mathrm{B}} + \frac{a}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$ avec $\varepsilon = \pm 1$, soit $a = 2\cos\hat{\mathrm{B}} + \varepsilon$.

Il en résulte que le triangle ABC n'existe que si $\cos\hat{\mathrm{B}} > -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\hat{\mathrm{B}} < 120°$.

Plus précisément, si $60° \leq \hat{\mathrm{B}} < 120°$, il y a une seule valeur possible pour a : $2\cos\hat{\mathrm{B}} + 1$.
Si $\hat{\mathrm{B}} < 60°$, il y a deux valeurs possibles pour a : $2\cos\hat{\mathrm{B}} + 1$ et $2\cos\hat{\mathrm{B}} - 1$.
Déterminons à présent les valeurs possibles pour $\cos\hat{\mathrm{C}}$.

$$\cos\hat{\mathrm{C}} = \frac{\overline{\mathrm{HC}}}{b} = \frac{\overline{\mathrm{HM}} + \overline{\mathrm{MC}}}{b} = \frac{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2}}{b}.$$

D'autre part :

$$b^2 = 1 + (2\cos\hat{\mathrm{B}} + \varepsilon)^2 - 2\times 1\times(2\cos\hat{\mathrm{B}} + \varepsilon)\times\cos\hat{\mathrm{B}} = 2(1+\varepsilon\cos\hat{\mathrm{B}})$$

D'où :

$$\cos\hat{\mathrm{C}} = \frac{\cos\hat{\mathrm{B}} + \varepsilon}{\sqrt{2(1+\varepsilon\cos\hat{\mathrm{B}})}} = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon\cos\hat{\mathrm{B}})}{\sqrt{2(1+\varepsilon\cos\hat{\mathrm{B}})}} = \varepsilon\sqrt{\frac{(1+\varepsilon\cos\hat{\mathrm{B}})}{2}}$$

Supposons d'abord $\hat{\mathrm{B}} < 60°$. Si $\varepsilon = 1$, alors $\cos\hat{\mathrm{C}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\hat{\mathrm{B}})}{2}} = \cos\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ d'où $\hat{\mathrm{C}} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, donc $\hat{\mathrm{C}} < 30°$.

Si $\varepsilon = -1$, alors $\cos\hat{\mathrm{C}} = -\sin\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ d'où $\hat{\mathrm{C}} = 90° + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ donc $90° < \hat{\mathrm{C}} < 120°$.

Si $60° \leq \hat{\mathrm{B}} < 120°$, alors $\varepsilon = 1$ d'où $\hat{\mathrm{C}} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ donc $30° \leq \hat{\mathrm{C}} < 60°$.

Conclusion : l'ensemble des valeurs de $\hat{\mathrm{C}}$ en degrés est $]0° \,;\, 60°[\cup]90° \,;\, 120°[$.

104-2 *de Jacques Chayé* :
On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et dont les diagonales se coupent en O ; connaissant les côtés a et b des carrés respectivement équivalents aux triangles AOB et COD, calculer le côté c du carré équivalent au trapèze tout entier.

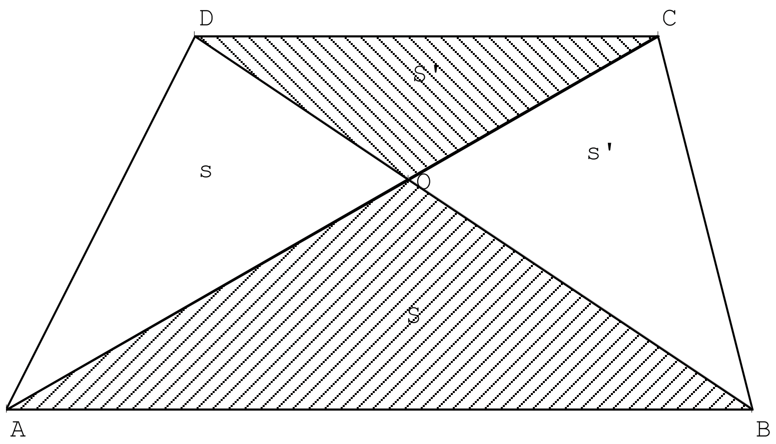
Solution de l'auteur
Cherchons une relation entre l'aire A du trapèze et les aires S et S' des triangles OAB et OCD. Les deux triangles étant semblables on a : $S'/S = OC^2/OA^2$.

D'autre part, les triangles ACD et BCD ont une aire commune égale au demi-produit de CD par la hauteur du trapèze ; donc les triangles BCO et ADO d'aires s et s' ont la même aire, $s = s'$.

Par suite, $A = S + S' + 2s$. Mais les aires des triangles DOC et DOA sont proportionnelles à OC et OA : $S'/s = OC/OA$ donc $S'/S = S'^2/s^2$, c'est-à-dire $s^2 = SS'$ ou encore $s = (SS')^{1/2}$.

Finalement $A = S + S' + 2(SS')^{1/2} = (S^{1/2} + S'^{1/2})^2$.

Par conséquent $c^2 = (a + b)^2$ c'est-à-dire $c = a + b$.



104-3 *de Frédéric de Ligt* :
Existe-t-il une suite d'entiers naturels non nuls contenant **tous** les entiers naturels non nuls, exactement une fois chacun, et telle que la moyenne arithmétique de ses k premiers termes pour $k = 1, 2, \ldots$ donne toujours un résultat entier ?

Complément apporté par Jean-Christophe Laugier à la solution de Jean-Matthieu Bernat et de Pascal Heimburger dans le Corol'aire n° 105

À la fin de leur exposé, les auteurs soulèvent l'intéressante question de l'unicité de la suite (u_n). Il existe en fait une infinité de suites (u_n) solutions de ce problème comme nous allons le démontrer. Mais auparavant voici une propriété remarquable de la solution (u_n) donnée dont la démonstration pourrait faire l'objet d'un petit problème :

(u_n) est involutive, c'est-à-dire $(u(u(n)) = n$ pour tout entier naturel non nul.

Remarquons que le problème 104-3 peut être formulé de la façon suivante :

Existe-t-il une suite (u_n) $(n > 0)$ d'entiers supérieurs ou égaux à 1 qui soit une énumération de $\mathbf{N}^*$ (l'application qui à n associe u_n est bijective) et vérifie pour tout entier $k > 0$, $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = 0 \bmod k$?

Introduisons la définition suivante :

Disons qu'une suite finie u_1, u_2, ..., u_n (resp. infinie u_1, u_2, ...) d'entiers supérieurs ou égaux à 1 possède la propriété (P) si tous les termes de la suite sont distincts et si $u_1 + u_2 + ...+ u_k = 0 \bmod k$ pour tout $k = 1, 2,..., n$ (resp. pour tout $k > 0$).

Démontrons tout d'abord qu'il existe une infinité de suites (u_n) $(n > 0)$ vérifiant (P).

Voyons comment une telle suite (u_n) peut être construite par récurrence. Introduisons comme dans la solution donnée la suite (M_n) définie par $M_n = (u_1 + u_2 + ...+ u_n)/n$.

Posons $u_1 = 1$ et supposons déterminée la suite u_1, u_2, ..., u_n vérifiant (P).

On doit avoir $u_1 + u_2 + ...+ u_n + u_{n+1} = 0 \bmod n+1$.

$nM_n + u_{n+1} = (n + 1)M_n + u_{n+1} - M_n = 0 \bmod n+1$ donc u_{n+1} doit être de la forme $M_n + k\ (n + 1)$ avec k entier relatif.

Si k est choisi assez grand, alors $M_n + k(n + 1)$ est supérieur ou égal à 1 et distinct de u_1, u_2, ..., u_n. Il y a donc une infinité de choix possibles pour u_{n+1} et par conséquent une infinité de suites (u_n) vérifiant (P).

Nous allons montrer que parmi toutes les suites (u_n) vérifiant (P), il en existe une infinité telles que (u_n) soit une énumération de $\mathbf{N}^*$.

L'existence de ces suites va résulter du lemme suivant :

Soit u_1, u_2, ..., u_n une suite vérifiant (P) et p un entier supérieur ou égal à 1 distinct de u_1, u_2, ..., u_n. Alors, soit la suite u_1, u_2, ..., u_n, p vérifie (P), soit il existe q, distinct de u_1, u_2, ..., u_n et de p tel que la suite u_1, u_2, ..., u_n, q, p vérifie (P).

En effet, d'après ce qui précède u_1, u_2, ..., u_n, q, p satisfait (P) ssi il existe des entiers relatifs k et l tels que d'une part, $M_n + k\ (n + 1) = q$ soit supérieur ou égal à 1 et distinct de u_1, u_2, ..., u_n et p, et d'autre part, $p = M_{n+1} + l\ (n + 2) = M_n + k + l(n + 2)$.

D'après l'égalité précédente, $k = -l\ (n + 2) + p - M_n$.

Si l'entier relatif l est assez petit, alors k est assez grand pour que $q = M_n + k\ (n + 1)$ soit distinct de u_1, u_2, ..., u_n et p. Donc la suite u_1, u_2, ..., u_n, q, p vérifie bien (P) si l'on choisit pour l la plus grande valeur possible ; celle qui minimalise q.

Le lemme précédent permet de construire une infinité de suites (u_n) satisfaisant (P) et qui énumèrent $\mathbf{N}^*$.

En effet, posons $u_1 = a$, a étant un entier supérieur ou égal à 1 donné.

Supposons définie la suite u_1, u_2, ..., u_n vérifiant (P) ; soit p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 distinct de u_1, u_2, ..., u_n.

Si la suite u_1, u_2, ..., u_n, p vérifie (P), posons $u_{n+1} = p$ sinon appliquons le lemme précédent et posons $u_{n+1} = q$ et $u_{n+2} = p$.

La suite infinie (u_n) ainsi construite par récurrence vérifie (P).

Montrons qu'elle atteint tout entier supérieur ou égal à 1.

1 est atteint si $a = 1$ sinon $u_2 = 1$ ou $u_3 = 1$ selon que a est impair ou pair.

Supposons les nombres 1, 2, …, p atteints sur l'intervalle 1, …, n. Si $p + 1$ n'est pas atteint sur 1, …, n alors $u_{n+1} = p + 1$ si $u_1, u_2, …, u_n, p + 1$ vérifie (P) sinon, d'après le lemme $u_{n+2} = p + 1$.

(u_n) est bien une énumération de $\mathbf{N}^*$.

Le tableau ci-dessous fournit les premières valeurs de u_n et de M_n lorsque $a = 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	11	12	13	14	15	16	17	18	19
u_n	1	3	2	10	4	52	5	43	6	54	7	65	8	76	9	103	11	99	12
M_n	1	2	2	4	4	12	11	15	14	18	17	21	20	24	23	28	27	31	30

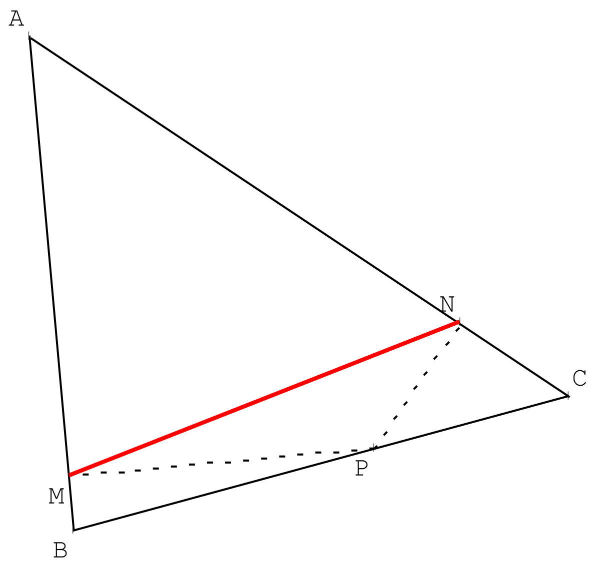
La suite que l'on vient de construire est parmi les suites (u_n) solutions du problème 104-3 celle qui minimalise pour tout entier p le temps d'attente de 1, …, p, c'est-à-dire le plus petit des entiers x tels que (u_n) atteigne les valeurs 1, 2, …, p sur l'intervalle 1, …, x.

Quant à la suite (u_n) fournie par nos auteurs, c'est la solution qui minimalise pour tout entier p supérieur ou égal à 1 la valeur de u_p.

Pour terminer, on peut poser trois questions qui prolongent le problème posé :

1) Existe-t-il une suite (u_n) d'entiers naturels non nuls telle que $M_n = (u_1 + u_2 + …+ u_n)/n$ soit toujours un entier non nul pour tout entier $n > 0$ et (u_n) et (M_n) soient <u>toutes deux</u> des énumérations de $\mathbf{N}^*$?
2) Existe-t-il une suite (u_n) d'entiers relatifs telle que $M_n = (u_1 + u_2 + …+ u_n)/n$ soit toujours un entier relatif pour tout entier $n > 0$ et (u_n) et (M_n) soient <u>toutes deux</u> des énumérations de $\mathbf{Z}$?
3) L'ensemble des solutions au problème 104-3 est-il dénombrable ?

106-1 *proposé par Daniel Perrin lors d'une de ses conférences* :
ABC est un triangle, P est un point du côté [BC], M est le projeté orthogonal de P sur (AB) et N le projeté orthogonal de P sur (AC). Où placer P pour que MN soit minimum ?



Solution de Jean Souville
Considérons les symétriques M' et N' du point P par rapport aux droites (AB) et (AC). Selon le théorème de la droite des milieux la longueur MN est la moitié de la longueur M'N'. Or N' est l'image de M' par la composée des symétries axiales d'axes (AB) et (AC) donc par la rotation de centre A et d'angle le double de l'angle entre ces droites. Le triangle isocèle AM'N' est d'angle au sommet fixe. Sa base M'N' est minimale si son côté AM' = AN' l'est. Or ce côté est égal à AP. La

solution est donc que P soit le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) si ce projeté est bien dans le segment [BC], sinon le sommet B ou C, où le triangle ABC admet un angle obtus.

Solution donnée par l'auteur lors de sa conférence

Les triangles APM et APN sont rectangles avec [AP] comme hypoténuse commune. Le quadrilatère AMPN est donc inscriptible dans le cercle de diamètre [AP]. D'après le théorème de Ptolémée on a la relation entre les côtés et les diagonales : AP × MN = AM × PN + AN × MP. En divisant par AP^2 les deux membres de l'égalité on a :

$$\frac{MN}{AP} = \frac{AM}{AP} \times \frac{PN}{AP} + \frac{AN}{AP} \times \frac{MP}{AP} = \cos(\widehat{MAP}) \times \sin(\widehat{PAN}) + \cos(\widehat{PAN}) \times \sin(\widehat{MAP}) = \sin(\hat{A}).$$

Par conséquent, $\min MN = \sin\hat{A} \times \min AP$. Si le triangle est acutangle minAP est obtenu quand P est le pied de la hauteur issue de A., sinon P est placé en B ou en C.

106-3 *de Jacques Chayé* :

Je propose l'étude de la fonction $x \mapsto 2\sin^4 x + 2\cos^4 x + \sin^2 2x$ et pour se mettre en bouche, de commencer par essayer de chercher la plus petite période.

Solution de Frédéric de Ligt

Pour tout x réel on a les identités :

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$
$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

En additionnant membre à membre on obtient :

$$1 + \cos^2 2x = 2\cos^4 x + 2\sin^4 x$$

D'où finalement $2\sin^4 x + 2\cos^4 x + \sin^2 2x = 1 + \cos^2 2x + \sin^2 2x = 2$ et donc il s'agit d'une fonction constante.

In memoriam

Colette Bloch nous a quittés en cette fin d'année 2016 à l'âge de 97 ans. Enseignante à l'Université de Poitiers, spécialiste de probabilités et statistiques à une époque où ces disciplines avaient peu la vogue, elle y avait initié de nombreuses générations de professeurs de mathématiques.

Elle était tellement modeste, que peu d'entre nous savaient qu'elle avait traduit, de l'allemand, le livre fondateur sur le calcul des probabilités d'Alfred Rényi, qui avait dit d'elle : Au cours de son travail consciencieux elle a corrigé de nombreuses fautes d'imprimerie et quelques imprécisions. Par conséquent la traduction surpasse indubitablement l'original.

Elle participa aux travaux de l'IREM dès sa création ; ses compétences y étaient très prisées. Elle continua à y œuvrer bien après sa retraite. Ses connaissances de l'allemand et du russe nous ont été une aide irremplaçable pour accéder à des textes mathématiques non encore traduits. Nous appréciions aussi sa connaissance de la langue française qui en faisait une relectrice hors pair des brochures IREM et du journal Corol'aire de notre Régionale.

Membre de l'APMEP elle avait présidé notre Régionale durant de nombreuses années.

Colette Bloch était une personne engagée dans ses convictions, membre de la Résistance durant la seconde guerre mondiale, emprisonnée et marquée par les drames qui ont touché la famille de son mari durant la guerre (France Bloch et son mari Frédéric Sérazin ont été assassinés par les allemands).

Nous garderons d'elle le souvenir d'une personne disponible et lettrée.