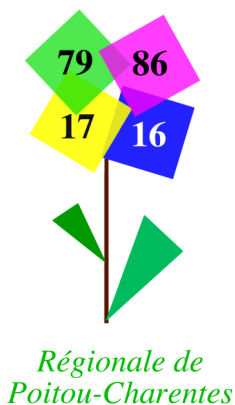




Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



Corol'aire

Décembre 2016

n°107

Faisons le point.

Sébastien Dassule-Debertonne

L'année a été riche en chamboulements heureux ou moins heureux.

Commençons par ce qui nous fait plaisir : nous pouvons d'ores et déjà annoncer que l'expo Maths & Puzzles est un succès, particulièrement auprès des écoles primaires. C'est une vraie satisfaction pour nous de voir ainsi récompensées quatre années de travail. Je tiens encore une fois à remercier tous ceux et celles qui se sont investies dans ce travail. Nous commençons à réfléchir à l'exposition itinérante dont je ne doute pas qu'elle aura le même succès.

Le rallye est lui aussi toujours plébiscité. L'équipe s'est renforcée et c'est avec beaucoup d'envie qu'elle prépare le sujet que vous retrouverez au mois de mars. Nul doute que la conférence que donnera Mickaël Lounay lors de la remise des prix ne fera que renforcer votre envie de participer.

Ce sont nos grandes satisfactions de l'année.

Une nouvelle à la fois bienvenue et pourtant qui nous met dans l'embarras est le remboursement

des frais de stage par le Rectorat. Bienvenue car on ne peut que s'en réjouir mais, pour la Régionale, c'est l'organisation même de sa Journée qui est remise en cause. J'ai demandé une audience auprès de Mme la Rectrice pour envisager une solution qui puisse convenir à tous.

Enfin, avec l'échéance électorale qui se profile en mai, et celle qui vient de se terminer aux États-Unis, les idées a priori semblent toujours vouloir voler en éclat. On pourrait croire que les sondeurs ont de plus en plus de mal à sonder. Pourtant, à l'aide d'urnes dans les urnes et de boules qui changent spontanément de couleur, vous comprendrez que ce sont les conditions même des sondages qu'il faut revoir.

Je vous souhaite d'aborder cette nouvelle année avec beaucoup de joies dans votre vie personnelle, professionnelle et associative. Et surtout, soyez heureux et libres !

Sommaire

Edito.....	p.1
Rallye.....	p.3
Compte rendu du comité.....	p.4
Histoire d'angles.....	p.6
Rien ne va plus en statistique... ..	p.7
Rubricollage.....	p.10
Ca fait bondir.....	p.16

Conférence de

Julien MICHEL

*Professeur de mathématiques à l'université de Poitiers
et Directeur de l'IREM de Poitiers*



Arithmétique & probabilités pour les promenades en forêt

En 1918, Georges Polya publie un (court) article sur la visibilité dans une forêt : à quelle distance peut porter notre regard dans une direction sans être bloqué par le tronc d'un arbre, quelle distance maximale en fonction du diamètre de ces troncs... dans le cas d'une forêt plantée régulièrement ou de façon aléatoire ?

Nous exposerons ses solutions ainsi que des développements plus récents : arithmétique et probabilités élémentaires ainsi que quelques notions un peu plus poussées.

POUR AFFICHAGE

Mercredi
25 janvier
à 15 h
NIORT
Amphi - IUT STID
8 rue Archimède



Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Groupe Rallye



Dans Corollaire n°106 d'octobre, nous vous informons que l'équipe du Rallye, grâce à l'arrivée de Cécile et de Delphine, atteignait presque la parité actifs-retraités. C'est main-

tenant chose faite avec l'arrivée de Sébastien Frugier, enseignant au collège Mendès France de La Rochelle. C'est donc une équipe dynamique et motivée qui a travaillé sur les épreuves d'entraînement.

Tous les documents papier relatifs aux diverses formalités du Rallye ont été envoyés dans vos établissements par l'intermédiaire du Rectorat que nous remercions.

Les énoncés des épreuves d'entraînement sont maintenant sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes à l'adresse suivante :

<http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article266>

Vous y trouverez aussi une sitographie, aide précieuse pour aborder le thème de cette année : « Nombres, formes et jeux » (<http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article265>)

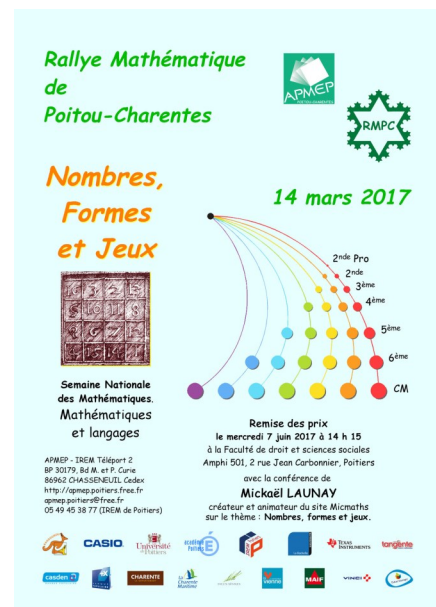
À ce jour, près de 270 classes sont inscrites. Nous vous rappelons que la date limite des inscriptions est le lundi 16 janvier 2017.

Pour la remise des prix, le 7 juin à Poitiers,

nous aurons le plaisir d'accueillir Mickaël Lounay, créateur, animateur du site « Micmaths » et auteur du livre « Le grand roman des maths ». Invité des media, radios et télévisions, il n'arrête pas de promouvoir des mathématiques attrayantes et ludiques, des mathématiques pour tous, comme nous le faisons avec ce Rallye.

L'affiche du Rallye qui accompagne cet article est disponible sur le site de la Régionale à la rubrique Rallye.

Soyez nombreux à inscrire vos classes ; et c'est très motivés que vous participerez au Rallye le mardi 14 mars 2017.



Conférence de Julien Michel

La conférence de Julien Michel intitulée **Arithmétique & probabilités pour les promenades en forêt** aura lieu le mercredi 25 janvier 2017 à Niort.

Toutes les informations utiles ont été présentées dans l'affiche page 2.

Et si nous parlons d'affiche, c'est parce que nous comptons sur votre efficacité d'adhérent pour placarder celle-ci en salle des professeurs,

dans votre labo de maths afin de mobiliser les professeurs de mathématiques pour cette conférence.

Cela peut vous paraître une toute petite chose, mais sans votre geste, la publicité se fait mal. Et il y a peu d'auditeurs.

Pensez que des non adhérents peuvent être intéressés ... cela nous donne l'occasion de les faire adhérer !

Compte-rendu du comité du 7 déc. 2016

Élection du bureau et mise en place du comité

Le bureau est reconduit à l'unanimité :

Président : Sébastien Dassule-Debertonne

Vice-Président : Philippe Rogeon

Trésorier : Jean Marie Parnaudeau

Trésorier adjoint : Jacques Germain

Secrétaire : Corinne Parcelier

Le tableau de la répartition des charges reste identique à l'an passé.

Lien avec l'inspection

L'Inspection Régionale de Mathématiques a regretté la parution d'un article dans Corol'aire n°106 la mettant en cause. Sébastien a échangé par courriel avec M. La Fontaine. La volonté de l'Inspection Régionale comme de l'APMEP est la promotion des mathématiques et la qualité de leur enseignement. Les objectifs étant communs, les relations restent donc très constructives.

Cet épisode pose la question du contenu et de la relecture des articles de Corol'aire. Le comité réaffirme sa volonté d'indépendance tout en prenant note qu'il devra être attentif à la forme.

Semaine des mathématiques

Sébastien et Julien se sont rendus au comité de pilotage. Avec les 20 participants dont l'Inspecteur Général M. Torossian, ils ont visité l'exposition « Maths & Puzzles ». Les actions relevées sont entre autres :

- le concours de calcul mental (les épreuves seront désormais) organisées par cycle ;
- le Rallye Mathématiques de Poitou-Charentes ;
- divers concours nationaux (dont le Kangourou) ;
- un nouveau concours de codage « Coding UP » organisé par l'Université de Poitiers en lien avec l'ENSIP le samedi 18 mars à Poitiers.

Lors des échanges, ont été soulignés les problèmes de communication entre les différents acteurs Université / IREM / APMEP / EMF.

Il est demandé à la Régionale d'adapter le thème du rallye à celui de la semaine des maths. La connaissance de celui-ci est actuellement trop tardive pour le permettre. De plus l'équipe organisatrice souhaite rester libre du choix du thème qui nécessite un travail important dès le mois de juin.

Exposition Maths & Puzzles

L'affiche semble ne pas être suffisamment diffusée bien que l'EMF l'ait envoyée dans tous les établissements. Les retours sont cependant très bons

(lire notamment le livre d'or). Le matériel reste pour l'instant en bon état, les animateurs en prennent soin.

Il est question d'exporter l'exposition à Lyon et peut-être au Palais de la Découverte.

Concernant le matériel, il faut maintenant penser à la version itinérante. Dominique pose la question de l'organisation de la valise d'accompagnement. Une réunion est à programmer en début d'année pour voir le matériel qu'il est possible de dupliquer.

Le catalogue a été vendu à une centaine d'exemplaires lors des Journées de Lyon.

Rallye

À ce jour, 265 classes sont inscrites, en majorité de collège, seulement 3 lycées professionnels. Les inscriptions peuvent être enregistrées encore jusqu'au 16 janvier.

Le rallye prend une dimension internationale avec la participation d'un établissement au Canada et un en Malaisie. Dans ces cas, on rend la participation gratuite mais les classes sont hors compétition. Il y a également un collège des Bouches du Rhône qui participera cette année.

L'AMOPA86, Association des Membres de l'Ordre des Palmes Académiques, devrait soutenir le rallye.

La recherche de partenaires durables est toujours en cours. Toutes les idées sont bienvenues.

Concernant le Futuroscope, le partenariat établi l'an passé est reconduit.

Journée de la Régionale

Comment l'organiser l'année prochaine avec les nouvelles dispositions du Rectorat (le remboursement des frais de déplacement des stagiaires coûte trop cher, donc la journée risque de ne plus apparaître comme stage de formation) ?

Sébastien propose de demander une audience à Mme la Rectrice afin de lui exposer nos besoins en regard de notre investissement pour la promotion des mathématiques. Il s'agirait notamment de conserver le statut de journée de formation à la journée de la Régionale avec un ordre de mission sans frais.

Corol'aire

Un comité de relecture est établi composé des auteurs d'article ainsi que de Jean Fromentin, Jacques Germain et Philippe Rogeon.

Calendrier

Prochain comité national : 18 & 19 mars 2017.

Prochain comité régional : 15 février 2017.

Puzzles et géométrie

Conférence d'André Deledicq

Professeur agrégé, prix d'Alembert 1994, prix Erdős 2004, créateur du Kangourou et auteur de nombreux ouvrages de mathématiques.

Vendredi 17 mars 2017, 20h30

Espace Mendès France, Poitiers.

Les mathématiques sont amusantes et appréciées des jeunes, comme toutes les activités ludiques. Parmi ces activités, les puzzles cachent souvent d'intéressantes curiosités et, parfois, de vrais théorèmes. Dans l'histoire de la géométrie et du divertissement, nous montrerons quelques jolis exemples de jeux et de belles démonstrations à la portée de tous .

Ponts mathématiques vers la littérature

Conférence d'Olivier Salon

Mathématicien, comédien, écrivain et membre de l'Oulipo

Mardi 4 avril , 20h30

Espace Mendès France, Poitiers.

En 1960, François Le Lionnais, scientifique passionné de littérature, et Raymond Queneau, écrivain féru de mathématiques, créaient l'Ouvroir de Littérature Potentielle : l'Oulipo. Ce groupe avait pour but d'inventer des structures littéraires, des procédés d'écriture, des procédures, en s'inspirant le cas échéant de structures mathématiques.

56 ans plus tard, l'Oulipo existe toujours et poursuit inlassablement l'œuvre démarrée par ses fondateurs.

Au cours d'un survol nourri d'abondants exemples, Olivier Salon, membre de l'Oulipo, exposera une douzaine de pistes explorées par l'Oulipo à partir de structures ou de théorèmes mathématiques, ayant pour but de déboucher sur des textes littéraires.

Il sera question entre autres de translation, de poésie combinatoire, de symétrie, de théorie des graphes, de la structure du roman de Georges Perec La Vie mode d'emploi, de poésie des troubadours.

Aucune connaissance mathématique poussée n'est nécessaire pour suivre cet exposé.

Histoire d'angles

IREM de Poitiers, groupe collège

Épisode 4 : le sextant, des propriétés angulaires en acte.

Connaître la hauteur angulaire d'un astre sur l'horizon est nécessaire au marin pour se repérer. La principale difficulté à surmonter réside dans le mouvement du bateau. Un théodolite classique ne peut pas convenir. De nombreux instruments de navigation ont été inventés au cours du temps. Le sextant, encore utilisé aujourd'hui, est l'un d'eux. Inventé par le capitaine Campbell en 1757, il perfectionne l'octant mis au point quelques années auparavant et permet de mesurer des hauteurs d'angle allant jusqu'à 120° . Son fonctionnement illustre bien la façon dont les propriétés des angles au programme de la cinquième ont été mises en œuvre pour concevoir un tel mesureur d'angle.

Caractéristiques de l'instrument

Le miroir en A est fixé dans l'axe du bras mobile AE. Le miroir en M, à moitié transparent et à moitié argenté, est parallèle à [AC]. Le triangle ABC est équilatéral. La droite (MN) est parallèle à la corde [BC].

Maniement

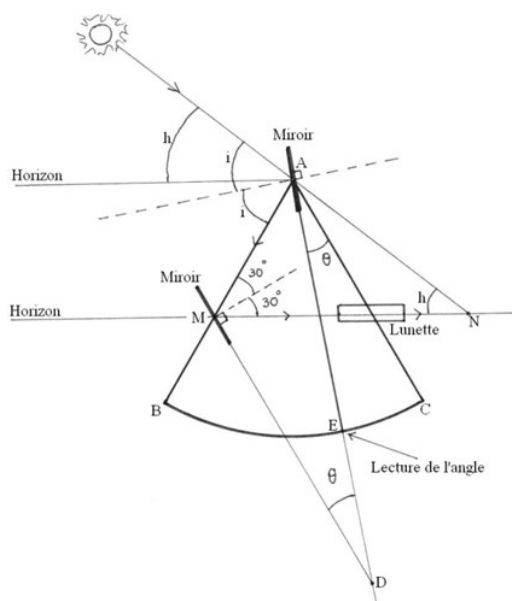
On actionne le bras AE, mobile autour de A, jusqu'à faire coïncider dans la lunette l'horizon avec l'astre visé. On lit la hauteur angulaire h de l'astre visé sur l'horizon directement sur l'arc de cercle gradué allant de B à C.

Une grande partie de la simplicité d'utilisation du sextant tient dans l'égalité $h = 2\theta$.



Un ancien sextant

Source : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UJ/Pedago/physique/02/optigeo/images/sextan2.jpg>



Preuve de cette égalité

Dans le triangle AMD on a avec la somme des angles du triangle :

$$\widehat{MAD} + \widehat{AMD} + \widehat{MDA} = 180^\circ$$

Ou encore :

$(90^\circ - i) + (30^\circ + 90^\circ) + \vartheta = 180^\circ$ (angles complémentaires, angles alternes-internes)

D'où $\vartheta = i - 30^\circ$.

Dans le triangle AMN on a :

$$\widehat{AMN} + \widehat{MAN} + \widehat{MNA} = 180^\circ$$

Ou encore $60^\circ + (180^\circ - 2i) + h = 180^\circ$ (angles supplémentaires et correspondants)

D'où $h = 2i - 60^\circ$; on a bien $h = 2\theta$.

La lecture directe sur l'arc de cercle gradué donne donc 0° quand le bras est en C et 120° quand il est en B. Les graduations ont été doublées par rapport à un rapporteur classique pour tenir compte de l'égalité précédente.

Référence : IREM de Poitiers, Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les ANGLES, Poitiers, 2009.

Rien ne va plus en statistique... Tout va bien en statistique...

Jean-Marie Parnaudeau

En quelques mois, dans différents pays, les résultats de référendums ou d'élections ont surpris : le Brexit en Grande-Bretagne, l'élection de Donald Trump et la primaire de la droite et du centre en France. Surprise parce que le résultat final n'était pas en adéquation avec les « chiffres » des différents sondages d'intention de votes.

Faut-il jeter les sondages ? Les sondages sont-ils truqués ? Les sondés répondent-ils n'importe quoi ? Les votants votent-ils pour faire mentir les sondages ? Examinons cette histoire de plus près.

En simplifiant beaucoup, mais les lecteurs de Corol'aire connaissent bien ce qui suit, la théorie des sondages est enseignée « à la Bernoulli ». On dispose d'une urne contenant des boules toutes identiques à l'exception de la couleur, supposons des blanches et des noires. La répartition des couleurs est inconnue et on suppose qu'il y a beaucoup de boules (sinon on vide la boîte et on compte !). On souhaite avoir une estimation de la proportion de boules blanches (ou de noires peu importe) dans l'urne. On prélève (EAS¹) un certain nombre de boules et on calcule la proportion de boules blanches dans cet échantillon. Cette proportion est une estimation ponctuelle de la proportion de boules blanches dans l'urne. On peut aussi donner un intervalle de confiance (voir, par exemple, les programmes de terminale S ou ES) concernant cette proportion, la demie amplitude de cet intervalle est souvent nommée, par les médias, marge d'erreur ; terme malheureux, car il laisse croire à des erreurs de méthodes ou de calculs. C'est, en résumant, ce qui est enseigné au lycée. Terminons en disant que les boules sont honnêtes et que, si la composition de l'urne est inconnue, elle est supposée fixe.

Pour appliquer cette méthode mathématique, tous les sondages devraient être effectués suivant ce protocole, mais on comprend bien qu'en pratique, ce serait techniquement compliqué, voire infaisable. Comment procède-t-on dans la réalité ?

En France, les sondages (électorales au moins) sont fondés, non pas sur une méthode aléatoire comme celle décrite ci-dessus, mais sur la méthode des quotas. Cette méthode fait partie des méthodes de sondage dite par choix raisonné. L'idée est de considérer que si un échantillon est un modèle réduit, construit à partir de certains critères, d'une population, alors il est représentatif de cette population. Le terme statistique exact est variables de contrôle et non critères ; ces variables de contrôle doivent vérifier au moins deux conditions, être fortement corrélées avec la (ou les) variable(s) étudiée(s) et avoir une distribution statistique connue. On commence donc par construire une partition de la population. Le plus souvent, pour le cas qui nous intéresse, les critères retenus sont la proportion hommes/femmes, l'âge, la répartition géographique (grande villes, petites villes...) et les classes sociales (PCS). À partir des études de l'INSEE, on connaît la proportion de la population pour chacune des parties ainsi construites. Tout échantillon sera construit en respectant cette répartition. Par exemple, si 4% de la population appartient à une partie, alors 4% de l'échantillon sera constitué d'individus de cette partie. Pour cette méthode, l'aléatoire n'intervient que dans le choix d'individus dans chaque partie et la détermination des parties se base sur « ce que l'on sait déjà par ailleurs », d'où le nom de méthode par choix raisonné. Il n'y a pas de théorie mathématique, mais pour « les milieux autorisés », ça fonctionne bien².

Notons que, la méthode des quotas n'est pas celle utilisée par certains médias (télévision

1. EAS signifie échantillon aléatoire simple, c'est à dire que l'on prélève les boules, une par une, au hasard avec remise après chaque prélèvement, on peut ainsi appliquer la loi binomiale en toute rigueur.

2. Sur la définition légale des sondages et du vocabulaire associé, on pourra consulter <http://www.vie-publique.fr/actualite/faq-citoyens/sondages-opinion/>. On pourra remarquer que, sur ce site officiel, la méthode des quotas comporte les mots "fiable" et "précis", alors que la méthode aléatoire "consiste en une sélection au hasard d'un nombre élevé de personnes appartenant à la population de référence".

d'information en continue ou site internet). Il s'agit alors d'échantillon dit spontané ; en simplifiant : « je vois, si je suis pour ou contre, je clique » ou bien « j'entends, je téléphone ou je SMS ».

Aux États-Unis et en Grande-Bretagne, les méthodes utilisées sont différentes. Il s'agit de méthodes « aléatoires », le plus souvent par contact téléphonique ou par internet. Le mot aléatoire est entre guillemets parce que la base de données des instituts de sondages (liste de numéros de téléphone et/ou adresse courriel) ne correspond pas exactement à la base de sondage (population américaine en âge de voter) : individus non répertoriés ou individus comptés plusieurs fois. L'aléatoire ne porte que sur le numéro de téléphone ou l'adresse électronique et sur la réponse ou non de la personne contactée. Les échantillons obtenus sont la plupart du temps très différents d'un modèle réduit de la population, par exemple, la proportion femmes/hommes peut atteindre 65/35 très loin des 51/49. Les instituts procèdent alors à des redressements d'échantillons.

L'utilisation de techniques de redressement des sondages est une procédure utilisée par presque tous les instituts de sondages ; elle consiste à modifier les résultats bruts en utilisant des connaissances extérieures au sondage proprement dit. Ce qui signifie que les résultats rendus publics ne sont pas les résultats bruts. Pour certains, il s'agit de « magouille » ou de recettes secrètes mais, en France en tout cas, les méthodes de redressement sont publiques³. À titre d'illustration, les instituts de sondages savent que certains individus ne disent pas, pour différentes raisons, la vérité sur leur intention de vote et en ce sens ne sont pas honnêtes comme cela était le cas des boules ; pour être le plus proche possible de la « réalité », il faut donc en tenir compte et modifier⁴ les résultats bruts.

Les sondages électoraux menés aux États-Unis donnaient Hillary Clinton gagnante, elle a obtenu la majorité des voix et pourtant elle a perdu. Pour mémoire, Hillary Clinton a obtenu 47,8% des voix et Donald Trump 47,3% et pourtant il a eu une majorité de grands électeurs. Examinons cette question de plus près.

Aux États-Unis, le président n'est pas élu au suffrage universel, comme en France, mais par les grands électeurs. Les grands électeurs sont élus le jour de l'« election day⁵ ». Chaque État élit deux sénateurs (le sénat est donc composé de 100 sénateurs puisqu'il y a 50 états) et un ou plusieurs représentants à la chambre des représentants. Le nombre des représentants est fixé à 435, le nombre de représentants d'un état est, en gros, proportionnel au nombre d'habitants de l'État ; le nombre de grands électeurs varie de 3, pour les états les moins peuplés, à 55 pour la Californie. Il y a aussi 3 grands électeurs pour le district de Columbia, ils participent à l'élection du président mais ne siègent nulle part. Il y a donc en tout 538 grands électeurs. Pour être élu, il faut avoir au moins 270 grands électeurs. MAIS, les élections se font État par État suivant le principe du « the winner takes all », le gagnant rafle tout (sauf deux États où la répartition se fait à la proportionnelle). Dans chaque État on comptabilise les bulletins et celui ou celle qui a le plus de voix obtient tous les grands électeurs de cet État. Il suffit d'avoir la majorité plus une voix pour obtenir tous les grands électeurs d'un État, quelle que soit la taille de cet état.

Ce système de désignation explique que l'on peut être majoritaire en voix et minoritaire en nombre de grands électeurs et donc perdre l'élection présidentielle et qu'un parti majoritaire en voix peut être minoritaire dans une assemblée voire dans les deux. Cette méthode d'élection explique aussi que les grands « meetings » des candidats se soient déroulés dans les « swing states », les états pour lesquels le résultat était indécis et qui pouvaient faire « basculer » le résultat final, par exemple la Floride.

Dans une optique à la Bernoulli, on a une urne, dans laquelle se trouve 50 urnes de tailles et de compositions différentes, et, par exemple, si dans une urne on prélève 4 blanches et 3

3. Par exemple, on pourra consulter les notices, dans lesquelles la (ou les) méthode(s) de redressement sont indiquée(s) sur <http://www.commission-des-sondages.fr/> ; l'étude de certaines de ces notices me semble d'une part un bon exercice de mathématiques, car certaines affirmations sont fausses mathématiquement, mais socialement acceptées (par exemple l'interprétation des intervalles de confiance) et d'autre part, un excellent exercice d'initiation au décryptage de l'information liée aux sondages et par suite à la citoyenneté.

4. L'auteur ne prend aucunement position sur le sujet, mais ne fait que décrire une pratique professionnelle.

5. Qui se déroule le premier mardi qui suit le premier lundi de novembre (ce n'est pas forcément le premier mardi de novembre...)

noires, alors on décide que toutes les boules sont blanches. On est loin de la loi binomiale... Ainsi, aux États-Unis, il devient aberrant, pour une élection présidentielle, de se fonder sur des sondages nationaux.

Enfin en France, les primaires de la droite et du centre. Cette élection, pour désigner le candidat de la droite et du centre à la prochaine élection présidentielle, s'est terminée par la victoire de François Fillon. Longtemps « très loin » dans les sondages, sa victoire a été une surprise médiatique.

Examinons cette question de plus près.

Les « études » estimaient le nombre de participants entre 2 et 5 millions, cela signifie que l'urne était de taille certes inconnue, mais variable entre les sondages et la primaire. Les programmes des candidats étant proches, le choix des participants pouvaient être modifié à tout instant, au gré des déclarations, même marginales, des uns et des autres ; ce qui signifie que les boules pouvaient changer de couleur au fil du temps et donc que la composition de l'urne était variable au cours du temps. Phénomène que les instituts de sondages qualifient de fluidité de l'électorat. Les participants, à cette élection, au dire encore des sondages, n'étaient pas tous des sympathisants de la droite et du centre, ce qui signifie qu'on rajoutait (ou on enlevait), à l'insu de tous, des boules de l'urne. Enfin, pour cette élection, aucun redressement n'était possible, puisque l'on ne disposait d'aucun recul historique. On est loin, même très loin, du modèle d'urne de Bernoulli...

Quelques points positifs tout de même, entre les deux tours de cette élection, la taille des échantillons a fortement augmenté, on a vu apparaître des sondages comportant jusqu'à 9000 personnes, ce qui revient à diviser la « marge d'erreur » par 3 par rapport à un échantillon usuel de 1000 personnes ; les commentateurs sont devenus plus réservés sur leurs affirmations suite à une publication et enfin si un sondage est une enquête statistique à un moment donné, la notion de tendance ou d'évolution des intentions de vote est davantage prise en compte. Remarquons aussi que depuis déjà quelques mois, certains médias, télévision et presse écrite, ne commandent plus de sondage.

Que conclure de tout cela ?

En statistique, comme partout, il y a des principes. Citons en deux. La stratégie du réverbère et le principe GIGO (Garbage In, Garbage Out).

La stratégie du réverbère, issue de l'histoire suivante : la nuit, un passant voit une personne regardant le sol avec attention. Intrigué, il s'approche et lui demande ce qu'il fait. « Je cherche mes clefs » lui répond-il. Le passant demande alors « Êtes-vous sûr de les avoir perdues ici ? » ; « Non, lui répond la personne, mais il n'y a qu'ici qu'il y a de la lumière ». Les élections américaines me semblent une bonne illustration de cette stratégie : faute de faire des sondages État par État puisque les élections se font État par État, il a été fait des sondages sur l'ensemble du pays (ou du moins les médias n'ont relayé que des sondages nationaux). Les élections américaines de 2000 n'avaient pas servi de leçon.

Le principe GIGO se traduit par le fait que si on veut estimer la composition d'une urne par prélèvement d'un échantillon, on s'assure au moins que cette urne est stable, on sait ce qu'il y a dedans et le contenu est inchangé au regard du protocole statistique. Tous les statisticiens sont d'accord, avant de faire une étude statistique, il faut que la population soit parfaitement identifiée : « Tous les échantillonnages visent à découvrir des renseignements au sujet d'une population particulière. Nous devons savoir clairement à quelle population nous nous intéressons⁶. »

C'était loin d'être le cas pour les élections de la droite et du centre.

Terminons sur deux conseils de lecture « L'enseignement des sondages à l'usage du plus grand nombre : quelques réflexions tirées de l'expérience » de Benoît RIANDEY et Isabelle WIDMER paru dans la revue Statistique et Enseignement 7 et l'article de Jeanne Fine et Jean-Louis Piednoir « Les sondages délaissés par les statisticiens et malmenés par les politologues » paru en 2008 dans le bulletin Vert N°474.

6. M.J Moroney Comprendre la statistique Ed Marabout 1970 page 119.

7. <http://publications-sfds.math.cnrs.fr/ojs/index.php/StatEns/issue/view/1>

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

107-1 posé à des élèves singapouriens de niveau seconde lors d'un concours :

Cheryl donne à ses deux amis dix dates possibles de son anniversaire : les 15, 16 et 19 mai ; le 17 et 18 juin ; le 14 et 16 juillet ; le 14, 15 et 17 août. Cheryl a ensuite dit à Albert le mois, et à Bernard le jour de son anniversaire. Albert affirme ensuite : « *Je ne sais pas quand est l'anniversaire de Cheryl mais je sais que Bernard ne le sait pas non plus.* » Bernard ajoute : « *Au départ, je ne savais pas quand était l'anniversaire de Cheryl, mais maintenant je sais.* » Albert répond : « *Alors je sais aussi quand est l'anniversaire de Cheryl.* »

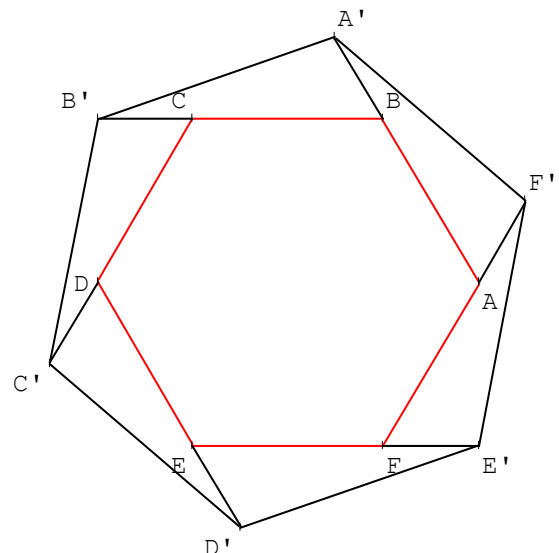
Et vous, avez-vous deviné la date de l'anniversaire de Cheryl ?

107-2 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :

Peut-on trouver à l'intérieur d'un triangle équilatéral de côté 185 un point situé à des distances entières de chacun des trois sommets ?

107-3 de Jacques Chayé (Poitiers) :

On donne un hexagone régulier dont le côté est a ; on prolonge les côtés dans le même sens d'une longueur égale à ma ; on joint les extrémités de ces côtés ainsi prolongés, et l'on demande de prouver que la figure ainsi formée est un hexagone régulier et que l'aire de ce nouvel hexagone est égale à l'aire du premier hexagone multiplié par $m^2 + m + 1$.



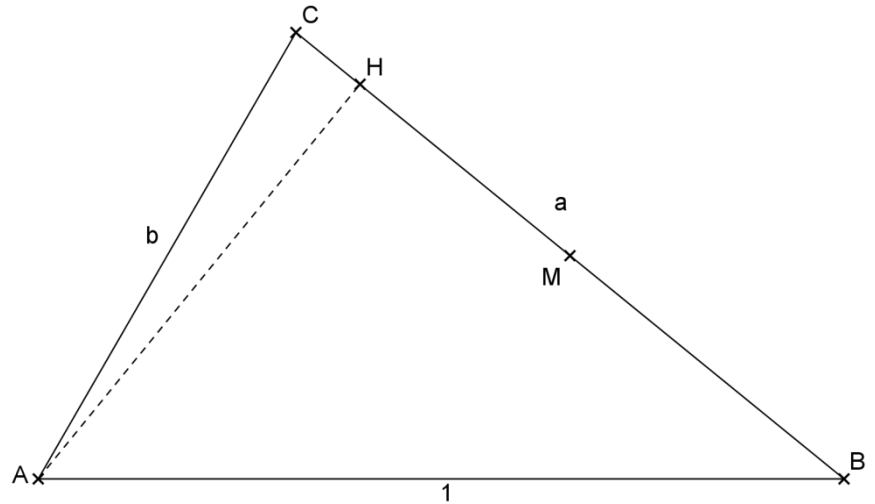
107-4 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :

La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{n^2}$ converge-t-elle et si oui vers quelle limite ?

103-2 de Louis Rivoallan :

Ce triangle ABC a une propriété curieuse : le côté [AB] mesure le double de la distance HM, où H est le pied de la hauteur issue de A et M est le milieu de [BC]. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle $\widehat{ACB}$?

Solution de Jean-Christophe Laugier



On peut sans nuire à la généralité du problème supposer $AB = 1$. Avec les notations habituelles dans un triangle ABC, et en prenant comme sens positif sur (BC) le sens de B vers C, il vient :

$\overline{BC} = a$, $\overline{BH} = \cos \hat{B}$, $\overline{BM} = \frac{a}{2}$ d'où $\overline{HM} = -\cos \hat{B} + \frac{a}{2}$. La propriété possédée par le triangle ABC

se traduit par $-\cos \hat{B} + \frac{a}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$ avec $\varepsilon = \pm 1$, soit $a = 2\cos \hat{B} + \varepsilon$.

Il en résulte que le triangle ABC n'existe que si $\cos \hat{B} > -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\hat{B} < 120^\circ$.

Plus précisément, si $60^\circ \leq \hat{B} < 120^\circ$, il y a une seule valeur possible pour a : $2\cos \hat{B} + 1$.

Si $\hat{B} < 60^\circ$, il y a deux valeurs possibles pour a : $2\cos \hat{B} + 1$ et $2\cos \hat{B} - 1$.

Déterminons à présent les valeurs possibles pour $\cos \hat{C}$.

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{HC}}{b} = \frac{\overline{HM} + \overline{MC}}{b} = \frac{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a}{2}}{b}.$$

D'autre part :

$$b^2 = 1 + (2\cos \hat{B} + \varepsilon)^2 - 2 \times 1 \times (2\cos \hat{B} + \varepsilon) \times \cos \hat{B} = 2(1 + \varepsilon \cos \hat{B})$$

D'où :

$$\cos \hat{C} = \frac{\cos \hat{B} + \varepsilon}{\sqrt{2(1 + \varepsilon \cos \hat{B})}} = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon \cos \hat{B})}{\sqrt{2(1 + \varepsilon \cos \hat{B})}} = \varepsilon \sqrt{\frac{1 + \varepsilon \cos \hat{B}}{2}}$$

Supposons d'abord $\hat{B} < 60^\circ$. Si $\varepsilon = 1$, alors $\cos \hat{C} = \sqrt{\frac{1 + \cos \hat{B}}{2}} = \cos \frac{\hat{B}}{2}$ d'où $\hat{C} = \frac{\hat{B}}{2}$, donc $\hat{C} < 30^\circ$.

Si $\varepsilon = -1$, alors $\cos \hat{C} = -\sin \frac{\hat{B}}{2}$ d'où $\hat{C} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}$ donc $90^\circ < \hat{C} < 120^\circ$.

Si $60^\circ \leq \hat{B} < 120^\circ$, alors $\varepsilon = 1$ d'où $\hat{C} = \frac{\hat{B}}{2}$ donc $30^\circ \leq \hat{C} < 60^\circ$.

Conclusion : l'ensemble des valeurs de $\hat{C}$ en degrés est $]0^\circ ; 60^\circ[\cup]90^\circ ; 120^\circ[$.

104-2 de Jacques Chayé :

On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et dont les diagonales se coupent en O ; connaissant les côtés a et b des carrés respectivement équivalents aux triangles AOB et COD, calculer le côté c du carré équivalent au trapèze tout entier.

Solution de l'auteur

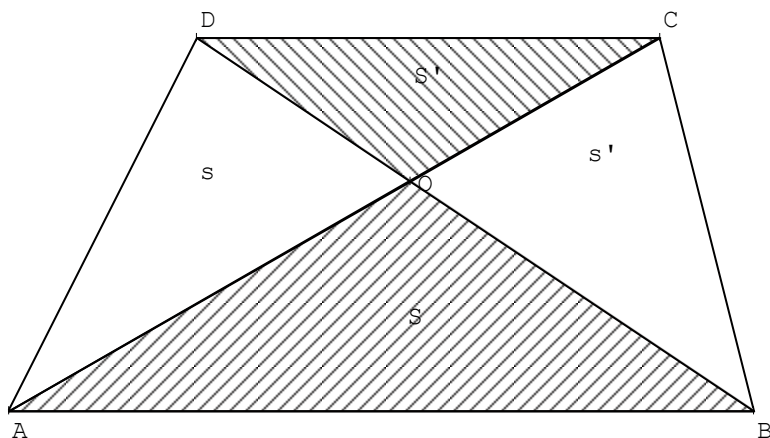
Cherchons une relation entre l'aire A du trapèze et les aires S et S' des triangles OAB et OCD. Les deux triangles étant semblables on a : $S'/S = OC^2/OA^2$.

D'autre part, les triangles ACD et BCD ont une aire commune égale au demi-produit de CD par la hauteur du trapèze ; donc les triangles BCO et ADO d'aires s et s' ont la même aire, $s = s'$.

Par suite, $A = S + S' + 2s$. Mais les aires des triangles DOC et DOA sont proportionnelles à OC et OA : $S'/s = OC/OA$ donc $S'/S = S'^2/s^2$, c'est-à-dire $s^2 = SS'$ ou encore $s = (SS')^{1/2}$.

Finalement $A = S + S' + 2(SS')^{1/2} = (S^{1/2} + S'^{1/2})^2$.

Par conséquent $c^2 = (a + b)^2$ c'est-à-dire $c = a + b$.



104-3 de Frédéric de Ligt :

Existe-t-il une suite d'entiers naturels non nuls contenant **tous** les entiers naturels non nuls, exactement une fois chacun, et telle que la moyenne arithmétique de ses k premiers termes pour $k = 1, 2, \dots$ donne toujours un résultat entier ?

Complément apporté par Jean-Christophe Laugier à la solution de Jean-Mathieu Bernat et de Pascal Heimburger dans le Corollaire n° 105

À la fin de leur exposé, les auteurs soulèvent l'intéressante question de l'unicité de la suite (u_n) . Il existe en fait une infinité de suites (u_n) solutions de ce problème comme nous allons le démontrer. Mais auparavant voici une propriété remarquable de la solution (u_n) donnée dont la démonstration pourrait faire l'objet d'un petit problème :

(u_n) est involutive, c'est-à-dire $(u(u(n))) = n$ pour tout entier naturel non nul.

Remarquons que le problème 104-3 peut être formulé de la façon suivante :

Existe-t-il une suite (u_n) ($n > 0$) d'entiers supérieurs ou égaux à 1 qui soit une énumération de $\mathbf{N}^*$ (l'application qui à n associe u_n est bijective) et vérifie pour tout entier $k > 0$, $u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0 \pmod k$?

Introduisons la définition suivante :

Disons qu'une suite finie $u_1, u_2, \dots, u_n$ (resp. infinie $u_1, u_2, \dots$) d'entiers supérieurs ou égaux à 1 possède la propriété (P) si tous les termes de la suite sont distincts et si $u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0 \pmod k$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$ (resp. pour tout $k > 0$).

Démontrons tout d'abord qu'il existe une infinité de suites (u_n) ($n > 0$) vérifiant (P).

Voyons comment une telle suite (u_n) peut être construite par récurrence. Introduisons comme dans la solution donnée la suite (M_n) définie par $M_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$.

Posons $u_1 = 1$ et supposons déterminée la suite $u_1, u_2, \dots, u_n$ vérifiant (P).

On doit avoir $u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} = 0 \pmod{n+1}$.

$nM_n + u_{n+1} = (n+1)M_n + u_{n+1} - M_n = 0 \pmod{n+1}$ donc u_{n+1} doit être de la forme $M_n + k(n+1)$ avec k entier relatif.

Si k est choisi assez grand, alors $M_n + k(n+1)$ est supérieur ou égal à 1 et distinct de $u_1, u_2, \dots, u_n$. Il y a donc une infinité de choix possibles pour u_{n+1} et par conséquent une infinité de suites (u_n) vérifiant (P).

Nous allons montrer que parmi toutes les suites (u_n) vérifiant (P), il en existe une infinité telles que (u_n) soit une énumération de $\mathbf{N}^*$.

L'existence de ces suites va résulter du lemme suivant :

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ une suite vérifiant (P) et p un entier supérieur ou égal à 1 distinct de $u_1, u_2, \dots, u_n$. Alors, soit la suite $u_1, u_2, \dots, u_n, p$ vérifie (P), soit il existe q , distinct de $u_1, u_2, \dots, u_n$ et de p tel que la suite $u_1, u_2, \dots, u_n, q, p$ vérifie (P).

En effet, d'après ce qui précède $u_1, u_2, \dots, u_n, q, p$ satisfait (P) ssi il existe des entiers relatifs k et l tels que d'une part, $M_n + k(n+1) = q$ soit supérieur ou égal à 1 et distinct de $u_1, u_2, \dots, u_n$ et p , et d'autre part, $p = M_{n+1} + l(n+2) = M_n + k + l(n+2)$.

D'après l'égalité précédente, $k = -l(n+2) + p - M_n$.

Si l'entier relatif l est assez petit, alors k est assez grand pour que $q = M_n + k(n+1)$ soit distinct de $u_1, u_2, \dots, u_n$ et p . Donc la suite $u_1, u_2, \dots, u_n, q, p$ vérifie bien (P) si l'on choisit pour l la plus grande valeur possible ; celle qui minimise q .

Le lemme précédent permet de construire une infinité de suites (u_n) satisfaisant (P) et qui énumèrent $\mathbf{N}^*$.

En effet, posons $u_1 = a$, a étant un entier supérieur ou égal à 1 donné.

Supposons définie la suite $u_1, u_2, \dots, u_n$ vérifiant (P) ; soit p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 distinct de $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Si la suite $u_1, u_2, \dots, u_n, p$ vérifie (P), posons $u_{n+1} = p$ sinon appliquons le lemme précédent et posons $u_{n+1} = q$ et $u_{n+2} = p$.

La suite infinie (u_n) ainsi construite par récurrence vérifie (P).

Montrons qu'elle atteint tout entier supérieur ou égal à 1.

1 est atteint si $a = 1$ sinon $u_2 = 1$ ou $u_3 = 1$ selon que a est impair ou pair.

Supposons les nombres $1, 2, \dots, p$ atteints sur l'intervalle $1, \dots, n$. Si $p + 1$ n'est pas atteint sur $1, \dots, n$ alors $u_{n+1} = p + 1$ si $u_1, u_2, \dots, u_n$ $p + 1$ vérifie (P) sinon, d'après le lemme $u_{n+2} = p + 1$.

(u_n) est bien une énumération de $\mathbf{N}^*$.

Le tableau ci-dessous fournit les premières valeurs de u_n et de M_n lorsque $a = 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	11	12	13	14	15	16	17	18	19
u_n	1	3	2	10	4	52	5	43	6	54	7	65	8	76	9	103	11	99	12
M_n	1	2	2	4	4	12	11	15	14	18	17	21	20	24	23	28	27	31	30

La suite que l'on vient de construire est parmi les suites (u_n) solutions du problème 104-3 celle qui minimise pour tout entier p le temps d'attente de $1, \dots, p$, c'est-à-dire le plus petit des entiers x tels que (u_n) atteigne les valeurs $1, 2, \dots, p$ sur l'intervalle $1, \dots, x$.

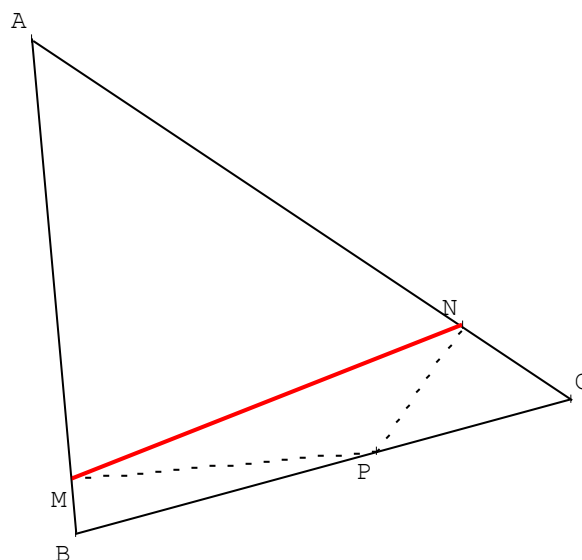
Quant à la suite (u_n) fournie par nos auteurs, c'est la solution qui minimise pour tout entier p supérieur ou égal à 1 la valeur de u_p .

Pour terminer, on peut poser trois questions qui prolongent le problème posé :

- 1) Existe-t-il une suite (u_n) d'entiers naturels non nuls telle que $M_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$ soit toujours un entier non nul pour tout entier $n > 0$ et (u_n) et (M_n) soient toutes deux des énumérations de $\mathbf{N}^*$?
- 2) Existe-t-il une suite (u_n) d'entiers relatifs telle que $M_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$ soit toujours un entier relatif pour tout entier $n > 0$ et (u_n) et (M_n) soient toutes deux des énumérations de $\mathbf{Z}$?
- 3) L'ensemble des solutions au problème 104-3 est-il dénombrable ?

106-1 *proposé par Daniel Perrin lors d'une de ses conférences :*

ABC est un triangle, P est un point du côté [BC], M est le projeté orthogonal de P sur (AB) et N le projeté orthogonal de P sur (AC). Où placer P pour que MN soit minimum ?



Solution de Jean Souville

Considérons les symétriques M' et N' du point P par rapport aux droites (AB) et (AC). Selon le théorème de la droite des milieux la longueur MN est la moitié de la longueur $M'N'$. Or N' est l'image de M' par la composée des symétries axiales d'axes (AB) et (AC) donc par la rotation de centre A et d'angle le double de l'angle entre ces droites. Le triangle isocèle $AM'N'$ est d'angle au sommet fixe. Sa base $M'N'$ est minimale si son côté $AM' = AN'$ l'est. Or ce côté est égal à AP. La

solution est donc que P soit le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) si ce projeté est bien dans le segment [BC], sinon le sommet B ou C, où le triangle ABC admet un angle obtus.

Solution donnée par l'auteur lors de sa conférence

Les triangles APM et APN sont rectangles avec [AP] comme hypoténuse commune. Le quadrilatère AMPN est donc inscriptible dans le cercle de diamètre [AP]. D'après le théorème de Ptolémée on a la relation entre les côtés et les diagonales : $AP \times MN = AM \times PN + AN \times MP$. En divisant par AP^2 les deux membres de l'égalité on a :

$$\frac{MN}{AP} = \frac{AM}{AP} \times \frac{PN}{AP} + \frac{AN}{AP} \times \frac{MP}{AP} = \cos(\widehat{MAP}) \times \sin(\widehat{PAN}) + \cos(\widehat{PAN}) \times \sin(\widehat{MAP}) = \sin(\widehat{A}).$$

Par conséquent, $\min MN = \sin \hat{A} \times \min AP$. Si le triangle est acutangle $\min AP$ est obtenu quand P est le pied de la hauteur issue de A., sinon P est placé en B ou en C.

106-3 de Jacques Chayé :

Je propose l'étude de la fonction $x \mapsto 2\sin^4 x + 2\cos^4 x + \sin^2 2x$ et pour se mettre en bouche, de commencer par essayer de chercher la plus petite période.

Solution de Frédéric de Ligt

Pour tout x réel on a les identités :

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

En additionnant membre à membre on obtient :

$$1 + \cos^2 2x = 2\cos^4 x + 2\sin^4 x$$

D'où finalement $2\sin^4 x + 2\cos^4 x + \sin^2 2x = 1 + \cos^2 2x + \sin^2 2x = 2$ et donc il s'agit d'une fonction constante.

In memoriam

Colette Bloch nous a quittés en cette fin d'année 2016 à l'âge de 97 ans. Enseignante à l'Université de Poitiers, spécialiste de probabilités et statistiques à une époque où ces disciplines avaient peu la vogue, elle y avait initié de nombreuses générations de professeurs de mathématiques.

Elle était tellement modeste, que peu d'entre nous savaient qu'elle avait traduit, de l'allemand, le livre fondateur sur le calcul des probabilités d'Alfred Rényi, qui avait dit d'elle : Au cours de son travail consciencieux elle a corrigé de nombreuses fautes d'imprimerie et quelques imprécisions. Par conséquent la traduction surpasse indubitablement l'original.

Elle participa aux travaux de l'IREM dès sa création ; ses compétences y étaient très prisées. Elle continua à y œuvrer bien après sa retraite. Ses connaissances de l'allemand et du russe nous ont été une aide irremplaçable pour accéder à des textes mathématiques non encore traduits. Nous apprécions aussi sa connaissance de la langue française qui en faisait une relectrice hors pair des brochures IREM et du journal Corollaire de notre Régionale.

Membre de l'APMEP elle avait présidé notre Régionale durant de nombreuses années.

Colette Bloch était une personne engagée dans ses convictions, membre de la Résistance durant la seconde guerre mondiale, emprisonnée et marquée par les drames qui ont touché la famille de son mari durant la guerre (France Bloch et son mari Frédéric Sérazin ont été assassinés par les allemands).

Nous garderons d'elle le souvenir d'une personne disponible et lettrée.

Mathématiques et Futuroscope

L'an passé, le Futuroscope a généreusement doté le rallye de 105 invitations pour les classes et leurs enseignants.

Nous avons remarqué, à cette époque et encore maintenant, le manque de documentation pédagogique liée au mathématiques pour préparer ou utiliser une visite au parc. C'est aussi une demande régulière qui est faite au parc du Futuroscope par des enseignants.

Nous avons repris contact avec les personnes en charge de ces dossiers et nous envisageons sérieusement de fournir des fiches. Bien entendu, l'architecture du Futuroscope est un point à traiter, mais d'autres (comme la gestion des flux) pourraient aussi faire l'objet de fiches pédagogiques intéressantes. Et encore, d'autres idées germent peut-être aussi déjà dans votre tête.

Si cela vous intéresse de participer à l'élaboration de telles fiches, que vous ayez ou non des idées, n'hésitez pas à prendre contact avec nous pour étoffer l'équipe. Une réunion aura lieu en janvier, à une date fixée pour faciliter la participation de tous les intéressés.

Toute demande de renseignements peut se faire par courriel auprès de Sébastien Dassule-Debertonne :

sdassule.apmep [at] gmail.com

Ça nous fait bondir ! ... la suite.

Nous faisons état, dans le numéro précédent, d'une publicité de la FDJ pour la nouvelle option du jeu Euro Millions®.

La publicité comportait la mention « Plus d'1 chance sur 4 de gagner » avec comme renvoi « 1 chance sur 4,62 » !

Contact pris avec la FDJ, elle corrige le renvoi en « 1 chance sur 3,8 ».

Nous vous laissons le soin de contrôler les valeurs. Pour nous défausser, nous arguerons d'un problème de marge trop étroite (comme toujours en mathématiques !).

APMEP, IREM Bâtiment de mathématiques
Téléport 2—BP30179
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope CHASSENEUIL CEDEX

Site : <http://apmep.poitiers.free.fr/>

Mél. apmep.poitiers@free.fr

Tél. 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication

S. Dassule-Debertonne

Éditeur

APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

Comité de rédaction

F. de Ligt, S. Dassule-Debertonne,
J. Germain, J. Fromentin, P. Rogeon.

Siège Social

IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX

Imprimerie

IREM, Téléport 2, BP 30179 Bd M. et P. Curie
86962 Chasseneuil CEDEX

Dépôt légal

Décembre 2016