Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

106-1 *proposé par Daniel Perrin lors d'une de ses conférences* :
ABC est un triangle, P est un point du côté [BC], M est le projeté orthogonal de P sur (AB) et N le projeté orthogonal de P sur (AC). Où placer P pour que MN soit minimum ?

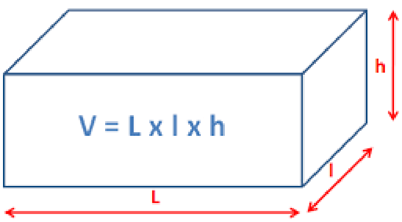
106-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Une étonnante égalité relie π et son approximation historique donnée par Archimède :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7} - \pi$$

Comment l'établir ?

106-3 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Je propose l'étude de la fonction $x \mapsto 2\sin^4 x + 2\cos^4 x + \sin^2 2x$ et pour se mettre en bouche, de commencer par essayer de chercher la plus petite période.

106-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Montrer qu'il existe une infinité de boites parallélépipédiques à côtés rationnels (exprimés en m), dont le volume vaut 48 m^3 et dont la longueur totale des arêtes vaut 48 m.



Des solutions

Jean-Christophe Laugier de Rochefort a envoyé un très intéressant complément à la suite de la solution apportée par Jean-Matthieu Bernat et Pascal Heimburger au problème 104-3. L'importance de sa contribution n'a pas permis d'insérer son texte dans le présent numéro. Mais ce n'est que partie remise …

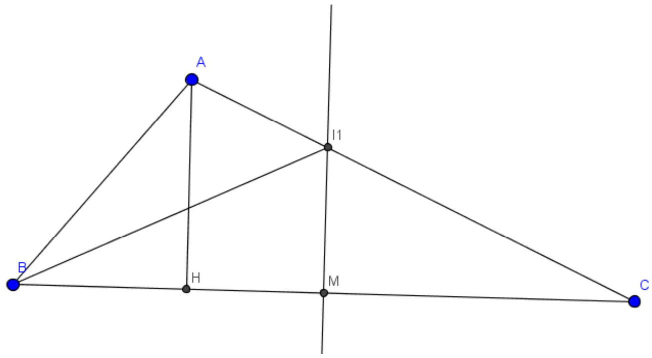
103-2 *de Louis Rivoallan* :

Ce triangle ABC a une propriété curieuse : le côté [AB] mesure le double de la distance HM, où H est le pied de la hauteur issue de A et M est le milieu de [BC]. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle $\widehat{ACB}$?

Solution de l'auteur

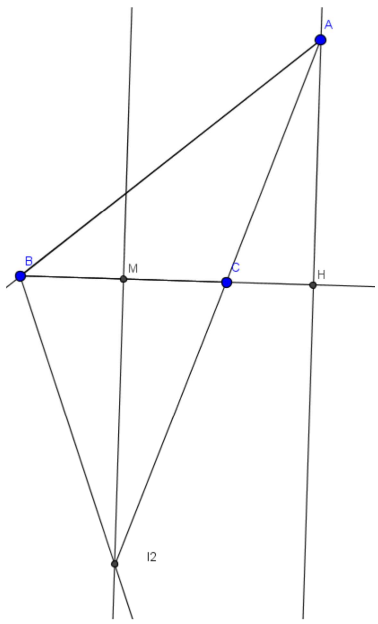
Soit ABC un triangle, M le milieu de [BC], H le projeté orthogonal de A sur (BC), et tel que AB = 2MH. Soit x la mesure en degré de l'angle $\widehat{ACB}$. Notons I_1 et I_2 les pieds respectifs des bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{ABC}$. On a la relation $-\frac{\overline{I_1A}}{\overline{I_1C}}=\frac{\overline{I_2A}}{\overline{I_2C}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$. Par ailleurs $\frac{MH}{MC}=\frac{2MH}{2MC}=\frac{BA}{BC}$. Par conséquent, soit $\frac{\overline{MH}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{I_2A}}{\overline{I_2C}}$ soit $\frac{\overline{MH}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{I_1A}}{\overline{I_1C}}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, l'une des deux droites (MI_1) ou (MI_2) est parallèle à la droite (AH), et est donc perpendiculaire à [BC] en son milieu M, c'est-à-dire qu'elle en est la médiatrice. Par conséquent, un des triangles BI_1C ou BI_2C est isocèle.

Premier cas : BI_1C est isocèle.



Les angles $\widehat{I_1CB}$ et $\widehat{I_1BC}$ sont égaux. Puisque $\widehat{ACB}=x$, alors $\widehat{ABC}=2x$ et $\widehat{BAC}=180°-3x$. Chacune de ces mesures devant être positive, on déduit que $0 < x < 60°$.

Deuxième cas : BI_2C est isocèle.



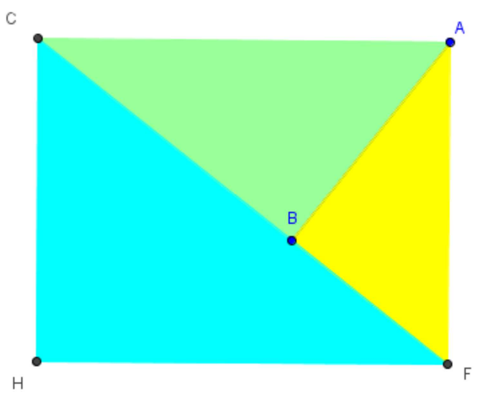
Alors $\widehat{I_2CB}$ et $\widehat{I_2BC}$ donc $\widehat{ABC}=180°-2\times(180°-x)=2x-180°$ et $\widehat{BAC}=180°-x-(2x-180°)=360°-3x$.
Là encore, chacune de ces mesures devant être positive, on a donc dans ce cas $90° < x < 120°$.

Réciproquement, il est aisé de constater en utilisant le théorème de Thalès et de la bissectrice intérieure, que si $0° < x < 60°$ on peut construire un triangle ABC avec $\widehat{ABC}=2x$ et qu'alors 2MH = AB et que si $90° < x < 120°$, il est possible de construire un triangle ABC avec $\widehat{ABC}=2x-180°$ et avec l'aide de la bissectrice extérieure cette fois et toujours du théorème de Thalès, on aura 2MH = AB.

104-1 *de Jean-Paul Guichard* :

Puzzle à 3 pièces

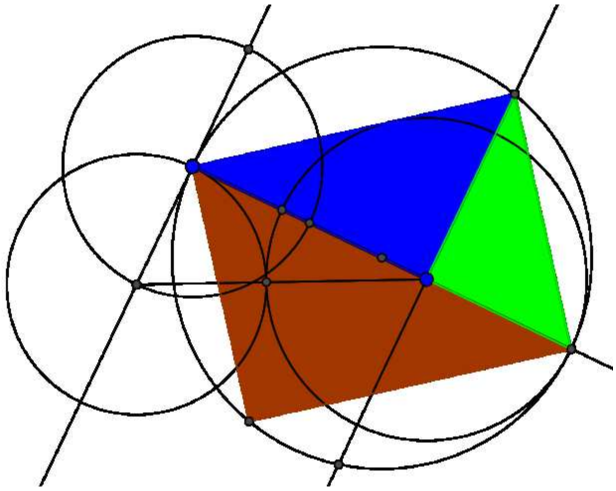
Le rectangle est constitué de 3 triangles rectangles tels que AF = BC. Sauriez-vous le construire ?



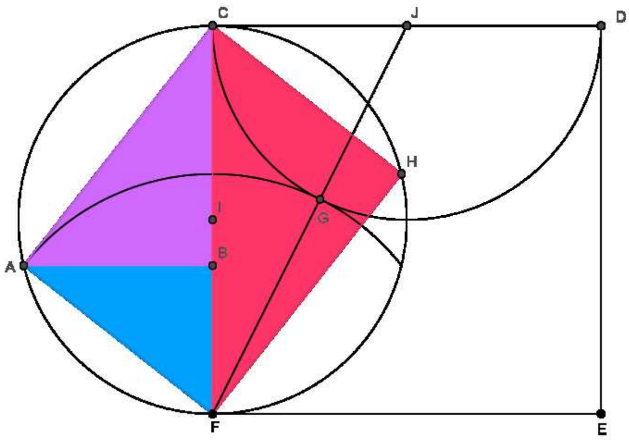
Solution de l'auteur
En prenant pour base de la construction le segment BC et sa perpendiculaire en B, on peut construire A et F de 2 manières.

1) Directement avec une équerre et la neusis d'Archimède : le sommet de l'équerre de déplace sur la perpendiculaire, un côté de l'équerre passe par C, et on marque sur l'autre côté de l'équerre la longueur BC à partir du sommet, et on ajuste pour que la marque soit sur la demi droite [CB).

2) A la règle et au compas. On construit sur BC un triangle rectangle en C de côté CD=1/2BC. On place sur l'hypoténuse BD un point E tel que DE=DC. On place sur la droite BC (du bon côté) le point F tel que BF=BE. Pour trouver le point A on utilise la construction classique de la racine carrée : on trace le demi-cercle de diamètre CF qui coupe la perpendiculaire en A.
On peut laisser au lecteur le soin de justifier la construction...



Solution de Frédéric de Ligt
En voici une assez simple, construite à partir de la diagonale du rectangle, qui utilise le fait que le rapport de la diagonale du rectangle à sa largeur est dans la proportion du nombre d'or.



104-4 *de Walter Mesnier* :

Dans une classe de 34 élèves quelle est la probabilité qu'il y ait un mois de l'année où aucun élève n'ait d'anniversaire ?
On suppose, pour simplifier, que tous les mois de l'année ont le même nombre de jours et que, pour les dates de naissance, tous les mois de l'année sont équiprobables.

Solution de Frédéric de Ligt
On va calculer la probabilité de l'évènement contraire, c'est-à-dire la probabilité pour que, dans une classe de 34 élèves, il y ait au moins un élève qui soit né chaque mois de l'année. Cela revient, dans un premier temps, à dénombrer le nombre de surjections d'un ensemble à 34 éléments dans un ensemble à 12 éléments. On sait que ce nombre de surjections est donné par la somme $\sum_{k=1}^{12}(-1)^{12-k}\binom{12}{k}k^{34}$.

La probabilité de ces évènements vaut donc :

$$\frac{\sum_{k=1}^{12}(-1)^{12-k}\binom{12}{k}k^{34}}{12^{34}}.$$

En détaillant la somme :

$$-12\times\left(\frac{1}{12}\right)^{34}+66\times\left(\frac{2}{12}\right)^{34}-220\times\left(\frac{3}{12}\right)^{34}+495\times\left(\frac{4}{12}\right)^{34}-792\times\left(\frac{5}{12}\right)^{34}+924\times\left(\frac{6}{12}\right)^{34}-792\times\left(\frac{7}{12}\right)^{34}$$

$$+495\times\left(\frac{8}{12}\right)^{34}-220\times\left(\frac{9}{12}\right)^{34}+66\times\left(\frac{10}{12}\right)^{34}-12\times\left(\frac{11}{12}\right)^{34}+1$$

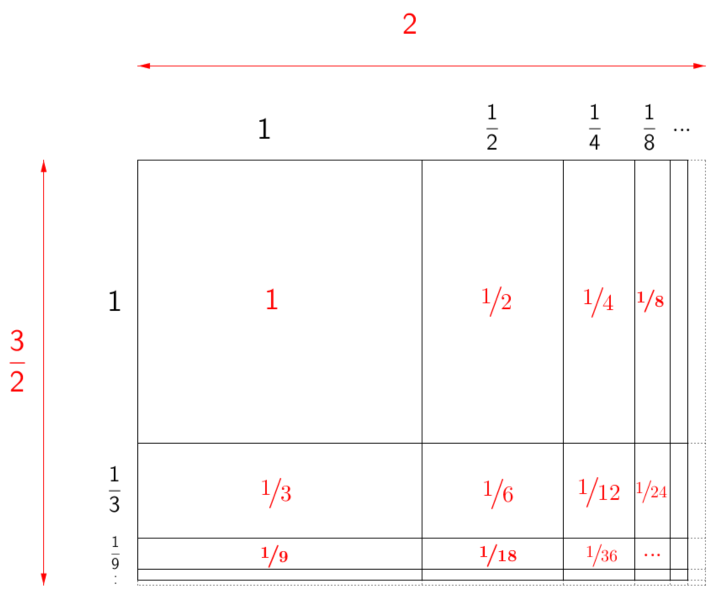
On trouve avec une bonne calculatrice 0,499324766975282.
La probabilité cherchée vaut donc « environ » 0,500675233024718 et donc avec certitude plus que 0,5. On peut donc parier dessus ! Le tableur aurait été à la peine avec ce problème pour donner un intervalle de confiance ne contenant pas 0,5.

105-1 *de Jacques Chayé* :

Calculer la somme de la série : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ldots$ dans laquelle les termes sont les inverses des entiers positifs dont les seuls facteurs premiers sont des 2 ou des 3.

Solution de Bruno Alaplantive

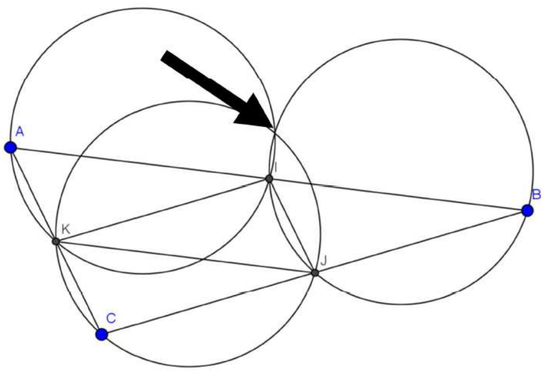
La somme demandée est égale à 3. Une preuve sans mots :



Solution de l'auteur

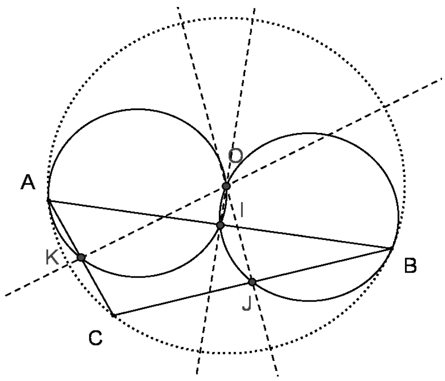
Un terme de cette série est de la forme $\frac{1}{2^p\times 3^q}=\frac{1}{2^p}\times\frac{1}{3^q}$. Il s'exprime d'une manière unique comme le produit d'un terme de la série géométrique S = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ qui converge vers 2 et d'un terme de la série géométrique S' = $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ qui converge vers $\frac{3}{2}$. Le produit d'un terme de S et d'un terme de S' est un terme unique de la série proposée. En conséquence cette série converge vers 3.

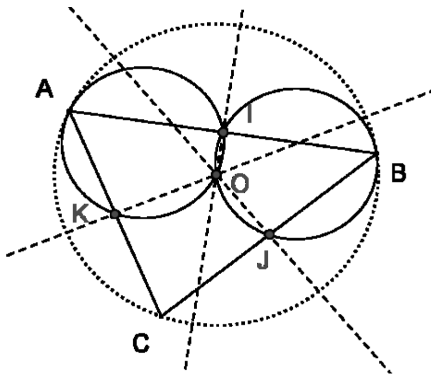
105-2 *de Frédéric de Ligt* :
A partir d'un triangle quelconque ABC et des milieux I, J et K des côtés [AB], [BC] et [CA], on construit trois cercles circonscrits aux triangles AIK, BIJ et CJK. Il semblerait que ces trois cercles aient un point commun. Pourriez-vous l'assurer ?



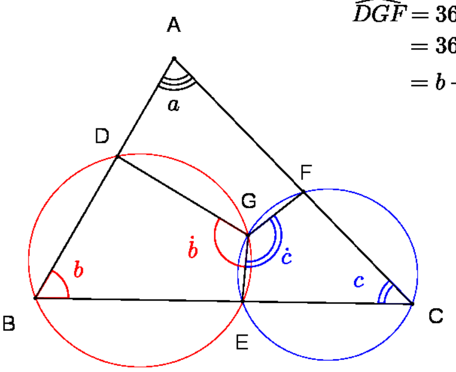
Si on n'impose plus aux points I, J et K d'être les milieux d'un côté mais simplement d'appartenir à ce côté, les trois cercles correspondants continuent-ils à avoir un point commun ?

Solution de Bruno Alaplantive
Sur les figures ci-dessous les cercles circonscrits aux triangles AIK et BIJ se recoupent en O. Ces triangles étant isométriques, les cercles ont le même rayon et puisque AI=IB alors $\widehat{AOI} = \widehat{BOI}$. Les points A et B sont ainsi symétriques par rapport à (OI). On en déduit que O est un point de la médiatrice de [AB]. Les triangles AIO et BIO étant rectangles en I, [AO] et [BO] sont des diamètres, les triangles AKO et BJO sont rectangles en K et J, … O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

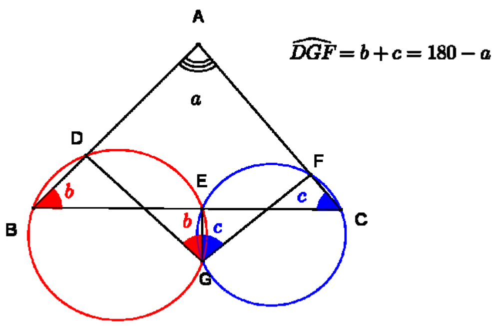




On montrerait de la même manière que les deux cercles circonscrits aux triangles AIK et CJK se recoupent au centre du cercle circonscrit à ABC, c'est-à-dire en O. Si le triangle est rectangle en C, les points O et I sont confondus. Dans le cas général, les trois cercles continuent d'avoir un point commun comme le montrent les configurations suivantes.



$$\begin{aligned}\widehat{DGF} &= 360 - \dot{b} - \dot{c} \\ &= 360 - (180 - b) - (180 - c) \\ &= b + c = 180 - a\end{aligned}$$



Les angles opposés du quadrilatère ADGF sont supplémentaires. ADGF est inscriptible.