Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur … Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

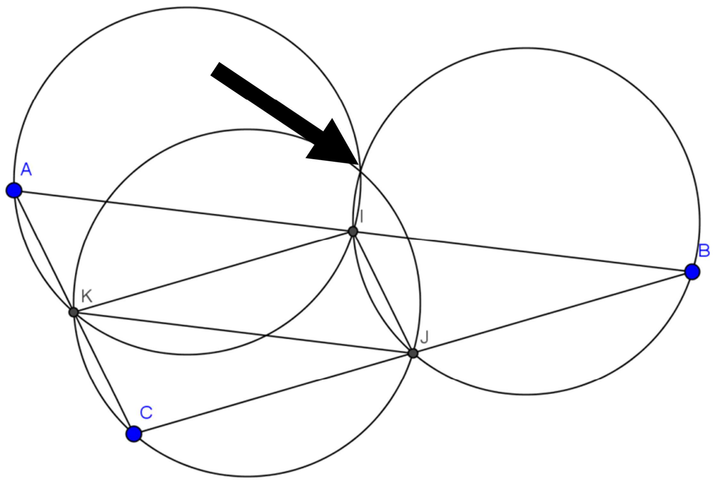
Des problèmes

105-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Calculer la somme de la série : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ldots$ dans laquelle les termes sont les inverses des entiers positifs dont les seuls facteurs premiers sont des 2 et des 3.

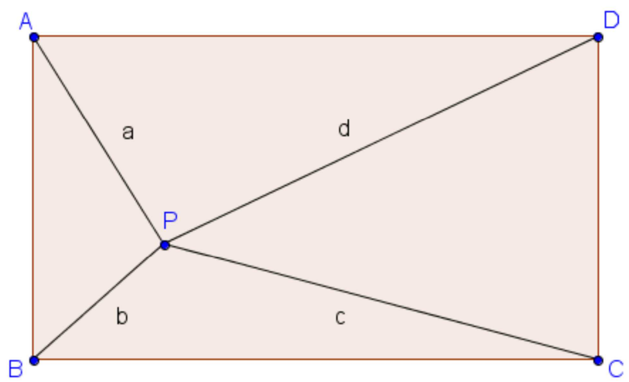
105-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

À partir d'un triangle quelconque ABC et des milieux I, J et K des côtés [AB], [BC] et [CA], on construit trois cercles circonscrits aux triangles AIK, BIJ et CJK. Il semblerait que ces trois cercles aient un point commun. Pourriez-vous l'assurer ?
Si on n'impose plus aux points I, J et K d'être les milieux d'un côté mais simplement d'appartenir à ce côté, les trois cercles correspondants continuent-ils à avoir un point commun ?



105-3 *de Walter Mesnier (Poitiers)* :

Enigme inspirée de celle du calendrier des énigmes 2016 du 13 Mai.
Il s'agissait de calculer la longueur PD = d dans un rectangle ABCD où P est un point intérieur au rectangle, et où PA = a, PB = b et PC = c sont donnés (égaux à 9, 4 et 6).
→ L'étonnante relation $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ permet de répondre. Mais on peut encore creuser. Je propose de modifier les longueurs données et de prolonger le questionnement :



1) On suppose a = 5, b = 1 et c = 5. Démontrer que d = 7 et que l'aire maximale du rectangle est 32.
2) On suppose a = 4, b = 1 et c = 7. Calculer d et l'aire maximale du rectangle.
3) On suppose que a, b et c sont des nombres entiers à un chiffre. Quels triplets peut-on choisir pour que d soit aussi un nombre entier. L'aire maximale du rectangle est-elle alors aussi un nombre entier ?

100-3 *de Frédéric de Ligt* :
Combien de pavés droits différents peut-on former avec 100^{100} cubes identiques ?

Correction de Claude Morin

J'ai relevé une coquille dans la solution à ce problème. Le résultat obtenu est valable pour 10^{100} et pas pour $100^{100} = 10^{200}$. Mais il suffit de changer 51 en 101 et 101×102 en 201×202. On peut d'ailleurs généraliser à 10^n cubes. Le nombre de pavés différents est égal à $\dfrac{\binom{n+2}{2}^2+3\left(1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)^2}{6}$ ($+\frac{1}{3}$ si 3 divise n) avec $\binom{n+2}{2}$ coefficient binomial et $\left[\frac{n}{2}\right]$ partie entière de $\frac{n}{2}$.

101-2 *de Frédéric de Ligt* :

Métempsychose

« Un jour, passant près de quelqu'un qui maltraitait son chien, on raconte qu'il [Pythagore] fut pris de compassion et qu'il adressa à l'individu ces paroles : "Arrête et ne frappe plus, car c'est l'âme d'un homme qui était mon ami, et je l'ai reconnu en entendant le son de sa voix" » (Diogène Laërce, *Vie et doctrines des philosophes illustres*, VIII, 36).

Depuis le temps de Pythagore la science a fait bien des progrès. On dispose maintenant de statistiques.

Il est établi qu'un humain a deux fois plus de chances de se réincarner en animal plutôt qu'en humain et de même un animal a deux fois plus de chances de se réincarner en humain plutôt qu'en animal.

Si la quatrième réincarnation d'un humain est encore un humain, qu'elle est la probabilité qu'il soit resté humain après sa première réincarnation ?

Solution de l'auteur

On peut réaliser un arbre de probabilité. On note H_i quand la ième réincarnation de notre homme est un homme et A_i quand cette ième réincarnation est un animal. Les différentes branches descendantes correspondent aux différentes réincarnations possibles. Ainsi seules 8 possibilités permettent d'aboutir à un homme après quatre réincarnations :

$H_1H_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^4$;
$H_1H_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$H_1A_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$H_1A_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$A_1H_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$A_1H_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(2/3)^4$;
$A_1A_2H_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$;
$A_1A_2A_3H_4$ dont la probabilité vaut $(1/3)^2(2/3)^2$.

La probabilité de $H_1 \cap H_4$ s'obtient en additionnant les quatre premières probabilités de la liste ci-dessus. On a $(1/3)^4 + 3(1/3)^2(2/3)^2 = 13/81$.

La probabilité de H_4 quant à elle s'obtient en additionnant les huit probabilités ci-dessus. On a $(1/3)^4 + 6(1/3)^2(2/3)^2 + (2/3)^4 = 41/81$.

Finalement $p(H_1/H_4) = p(H_1 \cap H_4)/p(H_4) = 13/41$

102-2 *de Frédéric de Ligt* :

Pour tout point M intérieur à un quadrilatère convexe ABCD, dont on note P, Q, R, S les projetés orthogonaux sur (AB), (BC), (CD), (DA) respectivement, montrer que l'on a l'inégalité :

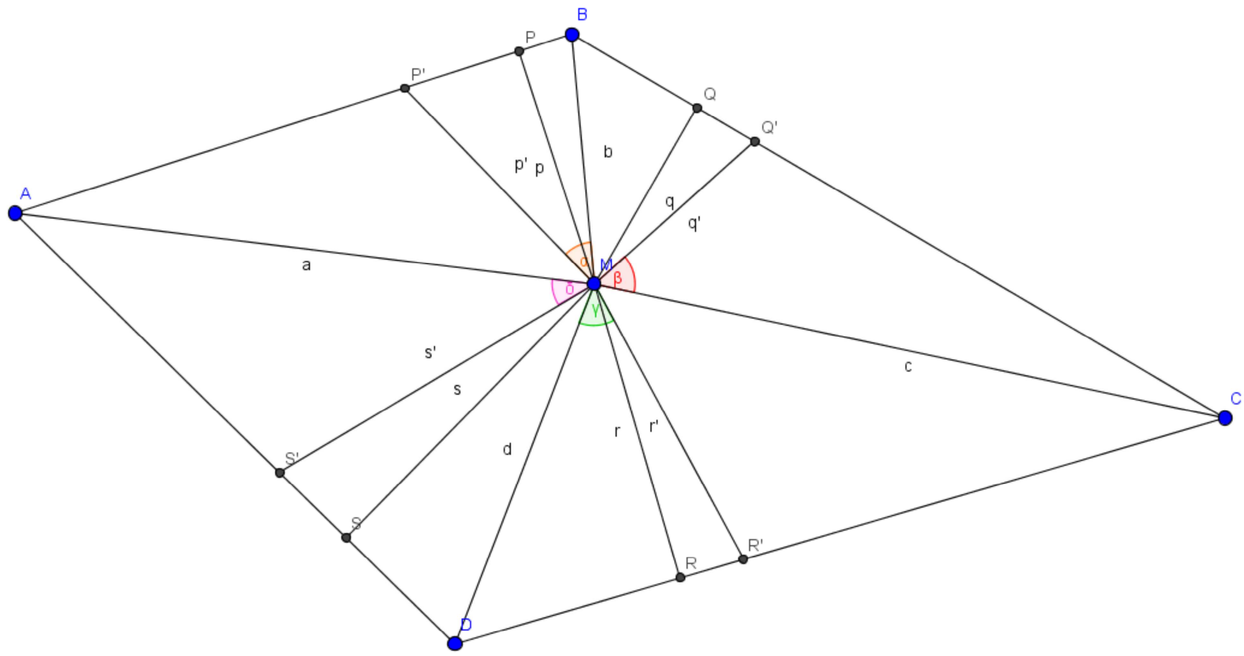
$$MA + MB + MC + MD \geq \sqrt{2}\,(MP + MQ + MR + MS)$$

Solution de l'auteur

Il s'agit de l'extension au quadrilatère convexe du fameux théorème d'Erdös-Mordell. La preuve présentée ici s'inspire largement de celle trouvée par Mordell en 1960 (source : Coxeter, H.S.M. *Introduction to geometry. Second edition*, Wiley, 1989, p. 419). Cette extension n'est pas originale puisqu'il a été montré qu'une inégalité de ce type est valable pour tout polygone convexe à *n* côtés à condition de remplacer $\sqrt{2}$ par $\dfrac{1}{\cos(\dfrac{\pi}{n})}$ (inégalité de Fejes-Toth). Cependant toutes les preuves que j'ai pu consulter pour le cas *n* = 4 sont fort complexes. Il me semble que l'identité miraculeuse (qui m'a coûté bien de la peine) introduite à la fin de la démonstration raccourcit notablement celle-ci.

Notations

Pour alléger l'écriture on note *a* = MA ; *b* = MB ; *c* = MC ; *d* = MD ; *p* = MP ; *q* = MQ ; *r* = MR ; *s* = MS ; $\widehat{AMB} = 2\alpha$; $\widehat{BMC} = 2\beta$; $\widehat{CMD} = 2\gamma$; $\widehat{DMA} = 2\delta$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ coupe (AB) en P' ; la bissectrice de $\widehat{BMC}$ coupe (BC) en Q' ; la bissectrice de $\widehat{CMD}$ coupe (CD) en R' ; la bissectrice de $\widehat{DMA}$ coupe (DA) en S'. On note *p'* = MP' ; *q'* = MQ' ; *r'* = MR' ; *s'* = MS'.
Comme le point M est intérieur au quadrilatère on a d'une part que *a*, *b*, *c* et *d* sont strictement positifs et d'autre part que α, β, γ et δ sont strictement inférieurs à l'angle droit.



L'aire du triangle AMB peut ainsi s'écrire $\dfrac{ab\sin 2\alpha}{2}$ ou bien, si l'on considère qu'il est formé de la réunion des triangles AMP' et P'MB, $\dfrac{p'(a+b)\sin\alpha}{2}$. Comme par ailleurs $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, on obtient l'égalité $2ab\cos\alpha = p'(a+b)$. L'inégalité arithmético-géométrique valable ici pour $a,b>0$: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ permet d'écrire $p'(a+b) = 2ab\cos\alpha = 2\sqrt{ab}\sqrt{ab}\cos\alpha \leq (a+b)\sqrt{ab}\cos\alpha$ et donc après simplification d'avoir $\sqrt{ab}\cos\alpha \geq p'$, mais il est clair que $p' \geq p$ et donc $\sqrt{ab}\cos\alpha \geq p$. On montre de même que $\sqrt{bc}\cos\beta \geq q$, $\sqrt{cd}\cos\gamma \geq r$ et $\sqrt{da}\cos\delta \geq s$. D'où l'inégalité :

$$a+b+c+d-\sqrt{2}(p+q+r+s) \geq a+b+c+d-\sqrt{2}(\sqrt{ab}\cos\alpha+\sqrt{bc}\cos\beta+\sqrt{cd}\cos\gamma+\sqrt{da}\cos\delta)$$

Mais le membre de droite peut se mettre sous la forme (un développement permet de s'en convaincre) :

$$[(\sqrt{2a}-\cos\alpha\sqrt{b}-\cos\delta\sqrt{d})^2+(\sqrt{2c}-\cos\beta\sqrt{b}-\cos\gamma\sqrt{d})^2+(\sin\alpha\sqrt{b}-\sin\delta\sqrt{d})^2+(\sin\beta\sqrt{b}-\sin\gamma\sqrt{d})^2]/2$$

Il faut noter que l'expression $(\cos\alpha\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta+\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)$ vaut toujours 0 car $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ et donc $\cos(\alpha+\delta)=-\cos(\beta+\gamma)$. Il est clair que cette dernière demi-somme de carrés est toujours positive ou nulle. Finalement on a bien l'inégalité $a+b+c+d \geq \sqrt{2}(p+q+r+s)$ avec égalité quand le quadrilatère est un carré et que le point M est en son centre.

103-1 *de Frédéric de Ligt* :

Passe-t-on si facilement de 15 à 16 ?

Il n'est pas aisé, sur l'intervalle [0 ; 1], de faire la distinction entre les représentations graphiques des fonctions f_{15} et f_{16} définies par $f_{15}(t)$ = 15^{-t} et $f_{16}(t)$ = 16^{-t}. Pourtant l'outil informatique semble indiquer que les suites $(f_{15}^n(0))_{n\geq1}$ et $(f_{16}^n(0))_{n\geq1}$ n'ont pas le même comportement. Qu'en est-il ?
(f_{15}^n et f_{16}^n désignent les nièmes itérées des fonctions f_{15} et f_{16} avec f_{15}^1 = f_{15} et f_{16}^1 = f_{16}).

Complément de Claude Morin

Pour compléter la solution (qui est très bien) de ce problème parue dans le précédent numéro, on peut introduire l'unique point fixe que je note L (car si la suite (u_n) converge c'est vers ce L). Quel que soit u_0 les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers L_1 et L_2 (car elles sont monotones, bornées, la fonction f^2 étant croissante de]0 ; 1[dans]0 ; 1[. Il y a alors deux cas selon que L est un point fixe répulsif ou non.

Premier cas : $|f'(L)| > 1$ qui est équivalent à $\ln(L) < -1$ ou encore $a > e^e$. On montre alors avec la définition de la convergence d'une suite et l'égalité des accroissements finis appliquée à $f(u_n) - f(L)$ que si la suite (u_n) converge alors $u_0 = L$. Par suite, si u_0 est différent de L alors L_1 est différent de L_2.

Deuxième cas : $|f'(L)| \leq 1$ qui est équivalent à $a \leq e^e$. L_1 et L_2 sont solutions de $f^2(x) = x$ qui peut s'écrire $g(x) = 0$ avec $g(x) = \ln(\ln a) - x\ln(a) - \ln(-\ln(x))$. Le calcul de $g'(x)$ conduit à l'étude de $h(x) = x\ln(x)$ qui donne aisément $-1/h(x) \geq e$ d'où $g'(x) \geq e - \ln(a) \geq 0$. La fonction g est donc croissante (et même strictement). Puisque $g(L) = 0$ on déduit que g ne s'annule qu'en L et donc dans ce deuxième cas $L_1 = L_2 = L$. La suite (u_n) converge vers L pour tout u_0.

104-3 *de Frédéric de Ligt* :

Existe-t-il une suite d'entiers naturels non nuls contenant **tous** les entiers naturels non nuls, exactement une fois chacun, et telle que la moyenne arithmétique de ses k premiers termes pour k = 1, 2, ... donne toujours un résultat entier ?

Solution de Jean-Matthieu Bernat et Pascal Heimburger

Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite en question et (M_n) la suite des moyennes soit $M_n=\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}$. On va déterminer une relation entre u_{n+1}, M_n et M_{n+1}.

$$M_{n+1}=\frac{u_1+u_2+...+u_n+u_{n+1}}{n+1}=\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n+1}+\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{n}{n+1}M_n+\frac{u_{n+1}}{n+1}$$

Ainsi $(n+1)M_{n+1}=nM_n+u_{n+1}$ soit $u_{n+1}=n(M_{n+1}-M_n)+M_{n+1}$.

On va alors s'arranger pour que $M_{n+1}=M_n$ ou $M_{n+1}=M_n+1$, ceci pour tout entier n non nul de sorte que la suite (M_n) est croissante et contient tous les entiers (mais pas de manière unique !). On construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$u_1 = 1$ et donc $M_1 = 1$;
si $M_n \notin \{u_k, 1 \le k \le n\}$ (1), $u_{n+1} = M_n$ et dans ce cas $M_{n+1} = M_n$;
si $M_n \in \{u_k, 1 \le k \le n\}$, $u_{n+1} = n+1+M_n$ ce qui donne $M_{n+1} = M_n + 1$.
Puisque $M_{n+1} = M_n$ ou $M_{n+1} = M_n + 1$, on est sûr de faire apparaître tous les entiers avec (1). Reste à prouver que chaque entier n'apparaît qu'une fois.
Petite récurrence :
Soit P_n : « Tous les u_i pour $1 \le i \le n$ sont distincts deux à deux »
P_3 est clairement vraie.
On suppose P_n vraie $(n \ge 3)$ alors
soit $u_{n+1} = M_n$ et dans ce cas P_{n+1} est vraie ;
soit $u_{n+1} = n+1+M_n \ge 5$.
Supposons qu'il existe un indice $k < n+1$ tel que $u_{n+1} = u_k$, $(k > 2)$, alors
soit $u_k = M_{k-1}$, $(k > 2)$, et dans ce cas $M_{k-1} = n+1+M_{n+1}$ ce qui est absurde car $M_{n+1} \ge M_{k-1}$;
soit $u_k = k + M_{k-1}$ ce qui donne $k + M_{k-1} = n+1+M_n$, absurde car $M_n \ge M_{k-1}$ et $n+1 > k$.
Ainsi P_{n+1} est vraie, ce qui achève la démonstration. Ci-dessous un calcul des u_n et M_n pour $1 \le n \le 100$.

n	u_n	M_n	n	u_n	M_n	n	u_n	M_n	n	u_n	M_n
1	1	1	26	42	17	51	82	32	76	47	47
2	3	2	27	17	17	52	84	33	77	124	48
3	2	2	28	45	18	53	33	33	78	126	49
4	6	3	29	18	18	54	87	34	79	49	49
5	8	4	30	48	19	55	34	34	80	129	50
6	4	4	31	50	20	56	90	35	81	131	51
7	11	5	32	20	20	57	92	36	82	51	51
8	5	5	33	53	21	58	36	36	83	134	52
9	14	6	34	55	22	59	95	37	84	52	52
10	16	7	35	22	22	60	97	38	85	137	53
11	7	7	36	58	23	61	38	38	86	139	54
12	19	8	37	23	23	62	100	39	87	54	54
13	21	9	38	61	24	63	39	39	88	142	55
14	9	9	39	63	25	64	103	40	89	144	56
15	24	10	40	25	25	65	105	41	90	56	56
16	10	10	41	66	26	66	41	41	91	147	57
17	27	11	42	26	26	67	108	42	92	57	57
18	29	12	43	69	27	68	110	43	93	150	58
19	12	12	44	71	28	69	43	43	94	152	59
20	32	13	45	28	28	70	113	44	95	59	59
21	13	13	46	74	29	71	44	44	96	155	60
22	35	14	47	76	30	72	116	45	97	60	60
223	37	15	48	30	30	73	118	46	98	158	61
24	15	15	49	79	31	74	46	46	99	160	62
25	40	16	50	31	31	75	121	47	100	62	62

Prolongement proposé : La suite est-elle unique ?